

Feuille de TD 3
Intégrales impropres

Exercice 1 :

Étudier la nature des intégrales suivantes et déterminer leur valeur si elles convergent :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}; \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)t^2}; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt; \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^2}.$$

Exercice 2 :

Étudier la convergence des intégrales :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt; \quad J = \int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx; \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt[3]{(x^2-x-2)^2}} dx.$$

Exercice 3 :

Calculer à l'aide d'un changement de variable les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt; \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \log(\tan t) dt; \quad I_3 = \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}, \text{ où } a < b$$

Exercice 4 :

Étudier la nature des intégrales :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \log t dt; & I_2 &= \int_0^{+\infty} \arcsin\left(\frac{\sin t}{t}\right) dt; & I_3 &= \int_0^{+\infty} \cos(e^t) dt; \\ I_4 &= \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt, \alpha > 0; & I_5 &= \int_0^{+\infty} (x+1-\sqrt{x^2+2x+2}) dx; & I_6 &= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t}; \\ I_7 &= \int_0^1 \sin t \log t dt; & I_8 &= \int_1^{+\infty} \arctan \frac{1}{t} dt; & I_9 &= \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \log\left(\cos \frac{1}{t}\right) dt; \\ I_{10} &= \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - \sqrt{t}}; & I_{11} &= \int_0^{+\infty} (x^7 - 7x^4 + 16x^3 - 5x + 2)e^{-x} dx; & I_{12} &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx; \end{aligned}$$

Exercice 5 :

Déterminer pour quelles valeurs du paramètre réel $a \in \mathbb{R}$ les intégrales suivantes sont convergentes.

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+a} dt; \quad I_2 = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x} + a \sin x}{x^2} dx; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{5dx}{x^3 - ax^2 + x - a}$$

Exercice 6 :

Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \quad (2) \int_0^{+\infty} \tanh t dt \quad (3) \int_0^1 \ln x dx \quad (4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$$

On calculera la valeur des intégrales convergentes

Exercice 7 :

Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \quad (3) \int_0^{+\infty} \cos t \, dt \quad (4) \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{t^2}$$

Exercice 8 :

Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$$(1) \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \quad (2) \int_0^1 \frac{e^t}{t} \, dt \quad (3) \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \, dt \quad (4) \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{t^2} \, dt$$

Exercice 9 :

Etudier suivant les valeurs des réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la convergence de l'intégrale :

$$I_{\alpha,\beta} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t^\beta)}$$

Représenter graphiquement l'ensemble $C = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, I_{\alpha,\beta} \text{ converge}\}$.

Exercice 10 :

Soit $\alpha > 0$ et soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{1+x^\alpha \sin^2 x}$$

1. Montrer que f est de classe C^∞ , strictement positive puis que f n'est pas bornée.
2. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ nous avons :

$$\frac{\pi(-\pi/2 + k\pi)}{\sqrt{1 + (\pi/2 + k\pi)^\alpha}} \leq \int_{-\pi/2 + k\pi}^{\pi/2 + k\pi} \frac{x}{1 + x^\alpha \sin^2 x} \, dx \leq \frac{\pi(\pi/2 + k\pi)}{\sqrt{1 + (-\pi/2 + k\pi)^\alpha}}$$

En déduire que si $k \in \mathbb{N}^*$ est assez grand nous avons :

$$\frac{\pi^{2-\alpha/2}}{2} \cdot \frac{1}{k^{\alpha/2-1}} \geq \int_{-\pi/2 + k\pi}^{\pi/2 + k\pi} \frac{x}{1 + x^\alpha \sin^2 x} \, dx \geq 3 \frac{\pi^{2-\alpha/2}}{2} \cdot \frac{1}{k^{\alpha/2-1}}$$

3. On considère la suite $(u_n), n \in \mathbb{N}^*$, définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \int_{-\pi/2 + k\pi}^{\pi/2 + k\pi} \frac{x}{1 + x^\alpha \sin^2 x} \, dx$$

Montrer que la suite $(u_n), n \in \mathbb{N}^*$, est convergente si et seulement si nous avons $\alpha > 4$.

4. En déduire que l'intégrale impropre

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1 + x^\alpha \sin^2 x} \, dx$$

est convergente si et seulement si $\alpha > 4$.

Exercice 11 :

1. Montrer que la suite (u_n) suivante est divergente :

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \log k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

2. Montrer que pour tout entier $k \geq 4$ nous avons :

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin^2 t dt}{t \log t} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{k \log k}.$$

3. En déduire que l'intégrale généralisée I suivante est divergente :

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 t dt}{t \log t}$$