Feuille de TD 2
Intégrales paramétrées

Exercice 1 :
Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer $F(0)$ et $F'(0)$.
2. Montrer que F est strictement décroissante et convexe.
3. Montrer que l'on a $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$.

Exercice 2 :
Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \ln(1 + xe^t)\, dt$.

1. Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$.
2. Donner une expression sans intégrale de $F'(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

Exercice 3 :

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx)\, dt$ converge.

   On définit l'application $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx)\, dt$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = -\dfrac{x}{2} F(x)$.
4. En déduire une expression explicite de $F(x)$.

Exercice 4 :
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx)\, dt$.

1. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $F'(0)$.

Exercice 5 :

1. Soit $x \geqslant 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge.
2. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin t}{t}\, dt$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
3. Calculer $F'(x)$. En déduire que $F(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)$ puis que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 6 :
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt$.

1. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2}\,dt$.

Exercice 7 :
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,dt$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(0)$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = -2e^{-x^2}\displaystyle\int_0^{x} e^{-u^2}\,du$.

Exercice 8 :
On pose $\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$ et pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2x}}{1+t^2}\,dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+x}}\,dt$.

1. Montrer que F et G sont bien définies et continues sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et montrer que $F(x) - F'(x) = 2\alpha/\sqrt{x}$.
3. Montrer que G est dérivable sur $]0,+\infty[$. Au moyen d'une intégration par parties, montrer que pour $x > 0$, on a $G(x) - G'(x) = 1/\sqrt{x}$.
4. Pour tout $x \geqslant 0$ on pose $H(x) = \big(F(x) - 2\alpha G(x)\big)e^{-x}$.
   a) Montrer que pour $x > 0$, on a $H'(x) = 0$.
   b) Montrer que $H(0) = \pi - 4\alpha^2$.
   c) Montrer que $0 \leqslant F(x) \leqslant \pi$ et $0 \leqslant G(x) \leqslant 2\alpha$ pour tout $x \geqslant 0$.
   d) En déduire que $\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 9 :
On définit une fonction $\varphi : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ en posant $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(t) = \dfrac{\arctan(t)}{t}$ si $t > 0$. On pose pour tout $x \geqslant 0$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x\varphi(xt)}{1+t^2}\,dt$$

1. Montrer que φ est continue sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que F est définie et continûment dérivable sur $[0,+\infty[$.
3. Montrer que pour tout $x \in [0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$: $F'(x) = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$.
   Indication : pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, on a : $\dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \dfrac{1}{1-x^2}\left(\dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{x^2}{1+x^2t^2}\right)$.
4. Cette expression de $F'(x)$ est-elle encore valide pour $x = 1$? (on répondra sans effectuer le moindre calcul).
5. Déduire de ce qui précède une expression de $F(x)$ sans intégrale.

Exercice 10 :
Soit F et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2 t}\right)dt$ et $G(x) = \left(\displaystyle\int_0^{x} e^{-u^2}\,du\right)^2$.

1. Montrer que F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F'(x) = -2x\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\exp(-\frac{x^2}{\cos^2 t})}{\cos^2 t}\,dt$ et $G'(x) = 2e^{-x^2}\displaystyle\int_0^{x} e^{-u^2}\,du$.

2. En effectuant le changement de variable $u = x\tan(t)$ dans la dernière intégrale, en déduire pour tout $x \in \mathbb{R}$: $G'(x) + F'(x) = 0$, puis que la fonction $F + G$ est constante. Déterminer cette constante.
3. Montrer que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$: $0 \leqslant e^{-x^2/\cos^2 t} \leqslant e^{-x^2}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$ puis la valeur exacte de l'intégrale impropre :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du$$