

Feuille de TD 6
Espaces Euclidiens

Exercice 1 :

1. Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi((x_1, x_2); (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + y_1x_2$$

est un produit scalaire définissant une structure euclidienne de \mathbb{R}^2 .

2. Montrer que l'application $\Psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Psi((x_1, x_2, x_3); (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + y_1x_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_1 + x_1y_3$$

est un produit scalaire définissant une structure euclidienne de \mathbb{R}^3 .

Exercice 2 :

Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(x, y) = 2(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) + 3(x_2 + x_3)(y_2 + y_3) + x_3y_3,$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$.

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer la matrice à laquelle elle est associée.
3. Montrer que φ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 .

Exercice 3 :

Soient a, b, c des paramètres réels et $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(x, y) = a(x_1y_2 + x_2y_1) + b(x_2y_3 + x_3y_2) + c(x_3y_1 + x_1y_3),$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$.

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer la matrice à laquelle elle est associée.
3. Montrer que φ n'est jamais un produit scalaire quelque soit le choix des paramètres réels a, b et c .

Exercice 4 :

Les formes bilinéaires sur \mathbb{R}^3 définies pour tous vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$, comme ci-dessous, sont-elles des produits scalaires sur \mathbb{R}^3 :

1. $\varphi_1(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_2y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_3 + y_2x_3$.
2. $\varphi_2(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1$.
3. $\varphi_3(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_3 + y_2x_3 + x_3y_1 + x_1y_3$.
4. $\varphi_4(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_1y_3 + y_1x_3$.
5. $\varphi_5(x, y) = x_1y_1 + 13x_2y_2 + 6x_3y_3 - 2x_2y_1 - 2x_1y_2 - x_2y_3 - y_2x_3 - x_3y_1 - x_1y_3$.

On précisera à chaque fois la matrice associée à φ_k .

Exercice 5 :

Lorsque $a \in \mathbb{R}$, on note $\varphi_a : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + (a + 12)x_3y_3 - 3x_1y_3 - 3y_1x_3 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2,$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$.

Déterminer l'ensemble des réels a pour lesquels φ_a est un produit scalaire.

Exercice 6 :

Soit l'application $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(X; Y) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)(y_i - y_j),$$

où $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$.

1. Φ définit-elle un produit scalaire sur \mathbb{R}^n ?
2. Soit E le sous-espace vectoriel

$$E = \{X \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}.$$

La restriction de Φ à E est-elle un produit scalaire ?

Exercice 7 :

1. Soient x_1, x_2, \dots, x_n , n nombres réels Montrer l'inégalité

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Pour quelle valeur des x_i a-t-on égalité ?

2. Montrer que pour toute fonction continue sur $[-1, 1]$, on a

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) dx \right| \leq \sqrt{2} \sqrt{\int_{-1}^1 f(x)^2 dx}$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Exercice 8 :

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n .

1. On définit l'application $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Phi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

Montrer que l'application Φ définit un produit scalaire sur E .

2. Calculer une base orthonormée du sous-espace vectoriel engendré par $1, X$ et X^2 .

Exercice 9 :

L'espace \mathbb{R}^3 est muni de la structure euclidienne canonique. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $v_1 = (1, 0, 3)$ et $v_2 = (0, 2, 5)$.

1. Construire une base orthonormée de F . Quel est l'orthogonal F^\perp de F ?
2. Donner la matrice de la projection orthogonale sur F et de la symétrie orthogonale par rapport à F dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
3. Mêmes questions lorsque F est défini par l'équation $2x + 3y - 4z = 0$.

Exercice 10 :

On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 muni de la structure euclidienne canonique et le sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^4 défini par le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \end{cases}$$

1. Donner une base orthonormée de F et une base orthonormée de F^\perp , l'orthogonal de F .
2. Donner la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .

Exercice 11 :

On considère trois vecteurs de \mathbb{R}^3 :

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

1. Donner les normes de u et v et leur produit scalaire.
2. Trouver la matrice, dans la base canonique, du projecteur orthogonal, noté p , sur le plan vectoriel P engendré par u et v .
3. Trouver un vecteur w tel que (u, v, w) soit une base orthonormée de \mathbb{R}^3 et en déduire une équation du plan P .
4. Soit $u' = (1, 0, 1)$. Calculer l'angle entre u' et $p(u')$.

Exercice 12 :

Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 défini par l'équation $x - y + z = 0$.

1. Chercher une base orthonormée de F^\perp .
2. Soit p_1 et p_2 les projecteurs orthogonaux sur F^\perp et F . Calculer $p_1(v) + p_2(v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^3$. En déduire la matrice de p_1 et la matrice de p_2 dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
3. Soit $u = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $d_1 = \text{dist}(u, F)$ et $d_2 = \text{dist}(u, F^\perp)$ et vérifier la relation

$$d_1^2 + d_2^2 = \|u\|^2.$$

Exercice 13 :

Soit E l'espace des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On munit E du produit scalaire

$$\Phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

1. Construire à partir de la base canonique $(1, X, X^2)$ de E une base orthonormée (P_1, P_2, P_3) . En déduire l'orthogonal du sous-espace F engendré par $1, X$.
2. Calculer la projection orthogonale du polynôme $Q(X) = 1 + X + X^2$ sur le sous-espace vectoriel F .
3. Calculer

$$\min_{a, b, c \in \mathbb{R}} \int_{-1}^1 \left(\sin(x) - a - bx - cx^2 \right)^2 dx.$$

Exercice 14 :

On considère l'espace euclidien \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire canonique. Soit F le sous-espace vectoriel défini par le système d'équations

$$\begin{cases} x + 2y - z + \sqrt{2}t = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer F^\perp .
2. Donner une base orthonormée de F et une base orthonormée de F^\perp .
3. Calculer la projection orthogonale du vecteur $V = (1, 1, 1, 1)$ sur F .
4. Calculer la distance de V à F et la distance de V à F^\perp .

Exercice 15 :

On considère l'espace euclidien \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire canonique.

1. Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs

$$V_1 = (1, 0, 1, 0), \quad V_2 = (0, 1, -1, 0), \quad V_3 = (0, 2, 3, 1),$$

puis compléter cette base en une base orthonormée de \mathbb{R}^4 .

2. Ecrire la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.

Exercice 16 :

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique, on considère le plan vectoriel P engendré par les vecteurs

$$v_1 = (1, 0, -1), \quad v_2 = (2, -1, 0).$$

1. Donner une équation de P . Quel est l'orthogonal de P ?
2. En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\{v_1, v_2\}$, trouver une base orthonormée $\{w_1, w_2\}$ de P . La compléter en une base orthonormée $\{w_1, w_2, w_3\}$ de \mathbb{R}^3 telle que la première composante de w_3 soit positive.
3. Écrire les matrices dans la base $\{w_1, w_2, w_3\}$ de :
 - (a) la projection orthogonale p sur P ,
 - (b) la symétrie orthogonale s par rapport à P .
4. Ecrire les matrices de p et de s dans la base canonique.