

Correction du test 2

Exercice 1 :

- $\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.
 ϕ est bien symétrique car pour tous $P, Q \in \mathbb{R}^3[X]$, on a

$$\phi(Q, P) = \int_{-1}^1 Q(t)P(t) dt = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt = \phi(P, Q).$$

De plus, $\phi(P, P) = \int_{-1}^1 P^2(t) dt \geq 0$, nul uniquement si P est nul sur $] -1, 1[$, c'est-à-dire si $P = 0$. Donc ϕ est définie-positive, c'est donc un produit scalaire.

- $\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P'(t)Q(t) + P'(t)Q(t) dt$.
 ϕ n'est pas symétrique car

$$\phi(X, 1) = \int_{-1}^1 1 + 1 dt = 4,$$

alors que

$$\phi(1, X) = \int_{-1}^1 0 + 0 dt = 0.$$

Ce n'est donc pas un produit scalaire.

- $\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P'(t)Q'(t) dt + P(0)Q(0)$.
 ϕ est symétrique pour la même raison que dans le premier point (un produit de réels est commutatif).

De plus, $\phi(P, P) = \int_{-1}^1 P'(t)^2 dt + P(0)^2 \geq 0$, nul uniquement si P' est nul sur $] -1, 1[$ et $P(0) = 0$, c'est-à-dire si $P' = 0$ et $P(0) = 0$, soit $P = 0$. Donc ϕ est définie-positive, c'est donc un produit scalaire.

- $\phi(P, Q) = \sum_{i=0}^3 a_i b_i$ où $P = \sum_{i=0}^3 a_i X^i$, $Q = \sum_{i=0}^3 b_i X^i$.
 ϕ est ici aussi symétrique (car l'expression est symétrique en P et Q).

De plus, $\phi(P, P) = \sum_{i=0}^3 a_i^2 \geq 0$, nul uniquement si tous les a_i sont nuls, c'est-à-dire si $P = 0$. Donc ϕ est définie-positive, c'est donc un produit scalaire.

Exercice 2 :

- On commence par orthonormaliser la famille V_1, V_2, V_3 , qui est clairement libre, en une base orthonormale e_1, e_2, e_3 de F , grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

$$e_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0).$$

$$V_2 - \langle V_2, e_1 \rangle e_1 = (0, 1, -1, 0) - \frac{1}{\sqrt{2}} * (-1) \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0) = (1/2, 1, -1/2, 0),$$

Donc

$$e_2 = \frac{(1/2, 1, -1/2, 0)}{\|(1/2, 1, -1/2, 0)\|} = \sqrt{\frac{2}{3}}(1/2, 1, -1/2, 0).$$

Et enfin

$$\begin{aligned} V_3 - \langle V_3, e_1 \rangle e_1 - \langle V_3, e_2 \rangle e_2 &= (0, 2, 3, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}} * 3 \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1, 0) - \sqrt{\frac{2}{3}} * \frac{1}{2} * \sqrt{\frac{2}{3}} (1/2, 1, -1/2, 0) \\ &= (0, 2, 3, 1) - \frac{3}{2} (1, 0, 1, 0) - \frac{1}{3} (1/2, 1, -1/2, 0) \\ &= \frac{1}{3} (-5, 5, 5, 3), \end{aligned}$$

donc

$$e_3 = \frac{\frac{1}{3}(-5, 5, 5, 3)}{\|\frac{1}{3}(-5, 5, 5, 3)\|} = \frac{1}{2\sqrt{21}}(-5, 5, 5, 3)$$

Une base orthonormée de F est donc la base (e_1, e_2, e_3) constituée des trois vecteurs calculés précédemment.

Pour compléter cette base en une base de \mathbb{R}^4 , il suffit par exemple d'y ajouter un des vecteurs de la base canonique qui n'est pas déjà dans F et de "terminer" l'orthonormalisation : prenons par exemple $V_4 = (0, 0, 0, 1)$ (pratique car son produit scalaire par e_1 et e_2 vaut 0). En continuant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on a :

$$\begin{aligned} V_4 - \langle V_4, e_1 \rangle e_1 - \langle V_4, e_2 \rangle e_2 - \langle V_4, e_3 \rangle e_3 &= (0, 0, 0, 1) - 0 - 0 - \frac{3}{2\sqrt{21}} * \frac{1}{2\sqrt{21}} (-5, 5, 5, 3) \\ &= \frac{5}{28} (1, -1, -1, 5), \end{aligned}$$

et donc

$$e_4 = \frac{\frac{5}{28}(1, -1, -1, 5)}{\|\frac{5}{28}(1, -1, -1, 5)\|} = \frac{1}{2\sqrt{7}}(1, -1, -1, 5).$$

- On calcule les projections sur F des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^4 . Pour cela, on enlève simplement la projection sur le dernier vecteur, e_4 :

◇ $(1, 0, 0, 0)$:

$$(1, 0, 0, 0) - \langle (1, 0, 0, 0), e_4 \rangle e_4 = (1, 0, 0, 0) - \frac{1}{28}(1, -1, -1, 5) = \frac{1}{28}(27, 1, 1, -5)$$

◇ $(0, 1, 0, 0)$:

$$(0, 1, 0, 0) + \frac{1}{28}(1, -1, -1, 5) = \frac{1}{28}(1, 27, -1, 5)$$

◇ $(0, 0, 1, 0)$:

$$(0, 0, 1, 0) + \frac{1}{28}(1, -1, -1, 5) = \frac{1}{28}(1, -1, 27, 5)$$

◇ $(0, 0, 0, 1)$:

$$(0, 0, 0, 1) - 5 \frac{1}{28}(1, -1, -1, 5) = \frac{1}{28}(-5, 5, 5, 3)$$

Et la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique est donc :

$$\frac{1}{28} \begin{pmatrix} 27 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 27 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 27 & 5 \\ -5 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

(on vérifie qu'on a bien une trace de 3, et que la matrice est symétrique vu qu'on a une projection orthogonale)