

# TUTORAT 1 DE MATHÉMATIQUES (1ÈRE ANNÉE)

## TRANSFORMATIONS CONFORMES ET HYDRODYNAMIQUE

GROUPE 3 – TUTEUR : J. BOUTTIER

8 NOVEMBRE 2010

### Résumé

L'objectif de ce tutorat est de montrer comment l'analyse complexe peut être appliquée à l'étude des écoulements bidimensionnels. Les sections 1 et 2 donnent les outils mathématiques nécessaires : nous introduisons tout d'abord les transformations conformes, dont un exemple intéressant est la transformation de Joukovski, avant de discuter brièvement de la relation entre fonctions harmoniques et fonctions holomorphes. En section 3 nous venons à l'hydrodynamique : connexion avec l'analyse complexe, puis utilisation de la transformation de Joukovski pour décrire l'écoulement autour d'un cylindre et d'une aile d'avion.

## 1 Transformations conformes

### 1.1 Généralités

Une transformation conforme peut être définie informellement comme une transformation géométrique qui préserve les angles orientés. Autrement dit, c'est une transformation qui "ressemble" localement à une similitude directe<sup>1</sup>. La figure 1 illustre l'action d'une transformation conforme du plan. Clairement, les similitudes directes sont des transformations conformes. Mais il en existe d'autres...

A. Question culturelle facultative : on se place dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , et on considère la transformation d'*inversion*

$$I : \mathbb{R}^d \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (1)$$
$$\vec{u} \mapsto \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

où  $\|\cdot\|^2$  est la norme euclidienne. Montrez que  $I$  agit localement comme une similitude *indirecte*. (Indication : il s'agit de donner une interprétation géométrique au développement de  $I(\vec{u} + \delta\vec{u})$  au premier ordre en  $\delta\vec{u}$ .)

En composant l'inversion avec une réflexion, on obtient donc une transformation conforme, appelée *transformation conforme spéciale*. Un théorème dû à Liouville énonce qu'en dimension  $d \geq 3$ , toute transformation conforme est obtenue comme composée de translations, rotations, homothéties et transformation conforme spéciale. Il y a donc "peu" de transformations conformes (plus précisément, le groupe des transformations conformes est de dimension finie). En comparaison, la dimension 2 est beaucoup plus riche comme nous allons voir.

On se place dorénavant dans le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$  identifié à  $\mathbb{C}$ . Un point du plan peut être spécifié soit par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ , soit par son affixe  $z = x + iy$ .

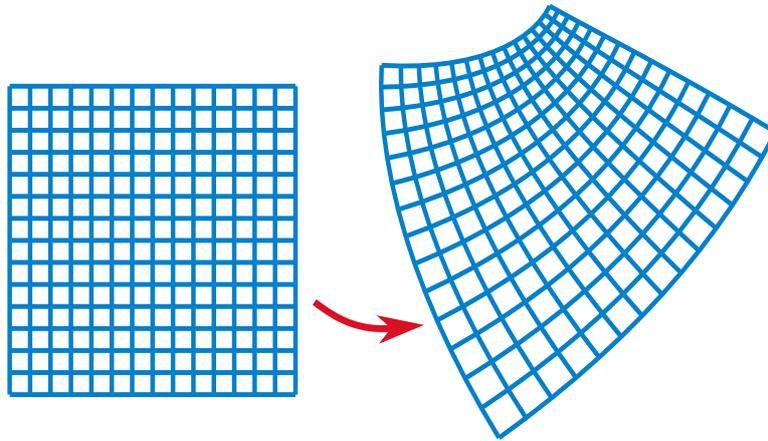


FIGURE 1 – Image d’une grille rectangulaire par une transformation conforme du plan. On observera que les lignes se coupant perpendiculairement sont transformées en des courbes qui se coupent également perpendiculairement.

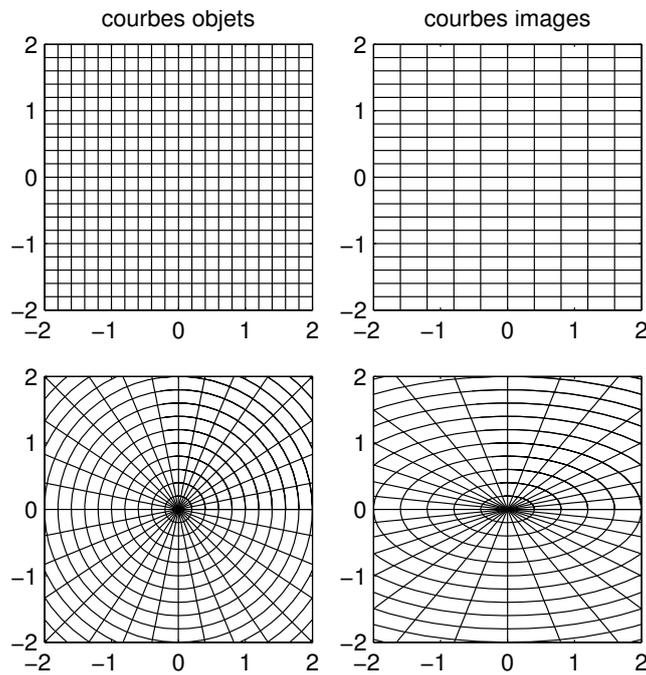


FIGURE 2 – Images par  $(x, y) \mapsto (2x, y)$  d’une grille carrée et d’une grille radiale.

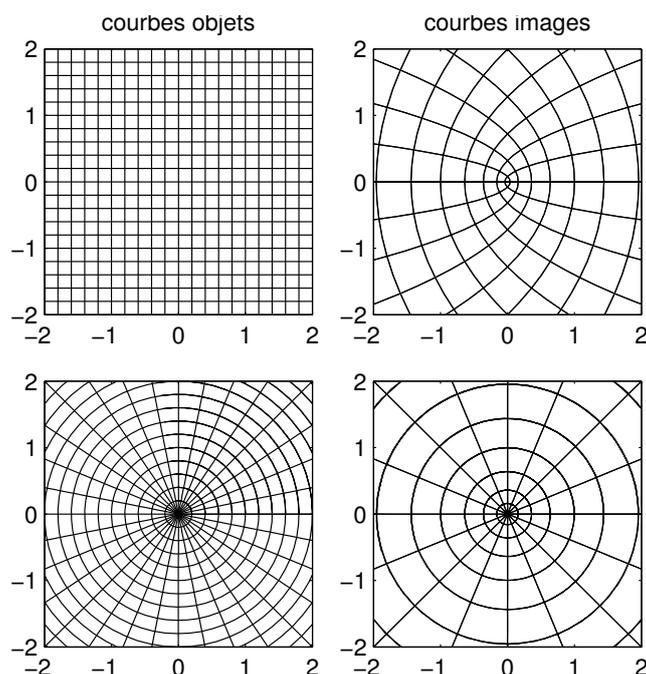


FIGURE 3 – Images par  $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$  d'une grille carrée et d'une grille radiale.

B. Premiers exemples : on considère les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 & \text{et} & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (2x, y) & & (x, y) & \mapsto & (x^2 - y^2, 2xy) \end{array} . \quad (2)$$

En examinant les figures 2 et 3, l'une ou l'autre de ces applications vous semble-t-elle être une transformation conforme ?

C. Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une application holomorphe telle que  $f'$  ne s'annule pas sur  $\Omega$ . Montrez que  $f$  est une transformation conforme. La réciproque est aussi vraie, ce que nous admettrons ici. Quelques remarques :

- Parmi les transformations conformes, on s'intéresse souvent plus particulièrement à celles qui sont bijectives (ce sont les *bijections holomorphes*). La non-annulation de  $f'$  assure que  $f$  est localement bijective, mais ce n'est pas forcément vrai globalement (voir la section suivante).
- Il existe "beaucoup" de transformations conformes en dimension 2, car l'ensemble des applications holomorphes est paramétré par un nombre infini de variables (p.ex. les coefficients du développement de Taylor en un point donné). Une illustration frappante est donnée par le théorème de l'application conforme dû à Riemann : si  $\Omega$  est un ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}$  distinct de  $\mathbb{C}$  lui-même, alors il existe une bijection holomorphe entre  $\Omega$  et le disque-unité  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ . Autrement dit tous les ouverts simplement connexes du plan sont équivalents à une transformation conforme près. Malheureusement, on ne connaît de formule explicite pour cette transformation que dans un petit nombre de cas.

---

1. On rappelle que les similitudes directes sont les translations, les rotations, les homothéties et leurs composées. Les similitudes indirectes sont obtenues en "ajoutant" les réflexions.

## 1.2 Transformation de Joukowski

La transformation de Joukowski (du nom du savant russe Nikolai Joukowski) est l'application

$$J: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad (3)$$
$$z \mapsto z + \frac{1}{z}$$

A. Sur quel domaine  $J$  est-elle une transformation conforme?  $J$  est-elle surjective? Injective? (Indication : on peut voir facilement que tout  $w \neq \pm 2$  admet exactement deux antécédents par  $f$ .) Trouvez une condition que doit satisfaire un domaine  $\Omega$  pour que  $J$  soit injective sur  $\Omega$ . Donnez quelques exemples de tels domaines "admissibles".

B. Déterminez l'image par  $J$  :

- du cercle centré en 0 de rayon  $R > 0$  (et en particulier du cas  $R = 1$ ),
- de la demi-droite issue de 0 faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe réel.

(Indication : écrire les coordonnées cartésiennes de  $J(z)$  en fonction des coordonnées polaires de  $z$  i.e  $z = re^{i\theta}$ .) Montrez que le domaine  $\{z, |z| > 1\}$  a pour image le plan entier privé du segment  $[-2, 2]$ .

C. On s'intéresse maintenant à l'image par  $J$  de cercles quelconques, non nécessairement centrés en 0. À l'aide du logiciel ou langage de votre choix, écrivez un programme permettant de tracer l'image d'un cercle par la transformation de Joukowski. Tracez en particulier :

- l'image d'un cercle passant par les points 1 et  $-1$  (identifiez-vous la courbe obtenue? bonus pour une preuve mathématique),
- l'image d'un cercle passant par 1 et entourant  $-1$  (essayez d'obtenir une forme évoquant une aile d'avion vue de profil; qu'observe-t-on au voisinage de l'image de 1?).

D. Soit  $\Omega$  le complémentaire d'un disque contenant 1 et  $-1$ . Montrez que  $\Omega$  satisfait la condition trouvée en A, et donc que  $J$  est injective sur  $\Omega$ . (Ceci montre que la transformation de Joukowski admet une transformation inverse bien définie tant qu'on "reste" à l'extérieur d'un des cercles considérés ci-dessus.)

E. Étude de l'action de  $J$  autour du point 1 : on considère une courbe passant par 1 et y admettant une tangente. Montrez que l'image de cette courbe présente un point de rebroussement (*cusp*) en  $J(1)$ . (Indications : la courbe admet une représentation paramétrique  $z(t)$  où  $t \in \mathbb{R}$ ,  $z(0) = 1$ ,  $z'(0) = e^{i\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Écrire le développement de Taylor de  $z(t)$  en 0 à l'ordre 1, et celui de  $J(z)$  en 1 à l'ordre 2.)

## 2 Fonctions harmoniques

On rappelle qu'une fonction  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ( $\Omega$  étant un ouvert de  $\mathbb{C}$ ) est dite *harmonique* si elle vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{où} \quad \Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \quad (4)$$

en tout point de  $\Omega$ . Comme les transformations conformes, les fonctions harmoniques en deux dimensions sont intimement liées aux fonctions holomorphes.

A. Soit  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. Montrez que  $g$ ,  $\varphi = \operatorname{Re} g$ ,  $\psi = \operatorname{Im} g$  sont des fonctions harmoniques.

La réciproque est plus délicate à énoncer (les fonctions antiholomorphes sont aussi harmoniques) et nécessite des hypothèses supplémentaires.

B. Soit  $\varphi$  une fonction harmonique à valeurs réelles définie sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$  simplement connexe. Montrez qu'il existe  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe telle que  $\varphi = \operatorname{Re} g$ . La fonction  $\psi = \operatorname{Im} g$  est appelée *conjuguée harmonique* de  $\varphi$ . (Indication : le gradient de  $\psi$  est connu.) Quelle pathologie peut-on avoir si  $\Omega$  n'est pas simplement connexe?

C. Interprétation géométrique : montrez que les lignes de courant de  $\vec{\nabla}\varphi$  sont les lignes de niveau de  $\psi$ .

D. Conservation de l'harmonicité par une transformation conforme : montrez que, si  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est harmonique et  $f : \Omega' \rightarrow \Omega$  est une transformation conforme, alors  $\Phi = \varphi \circ f$  est aussi harmonique.

### 3 Application à l'hydrodynamique

#### 3.1 Fonctions holomorphes et écoulements parfaits bidimensionnels

On considère un fluide *non-visqueux, incompressible*, en écoulement *irrotationnel* dans une région du plan. Soit  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  le champ de vitesse.

A. Montrez que la *vitesse complexe*  $w(z) = v_x - iv_y$  est une fonction holomorphe. Montrez que la *circulation* du champ de vitesse autour d'un contour  $\gamma$  est donnée par

$$\Gamma = \operatorname{Re} \oint_{\gamma} w(z) dz. \quad (5)$$

À quelle condition  $\Gamma$  peut-elle être non-nulle?

B. On suppose que le fluide s'écoule sans obstacle i.e dans une région simplement connexe. Montrez que  $\vec{v}$  dérive d'un potentiel  $\varphi$  harmonique, i.e  $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$ . D'après les résultats de la section 2, il existe une fonction  $g$  holomorphe telle que  $\varphi = \operatorname{Re} g$ . La fonction  $g$  est appelée *potentiel complexe*, et les lignes de niveau de  $\psi = \operatorname{Im} g$  sont les lignes de courant. Comment le potentiel complexe est-il relié à la vitesse complexe?

C. Supposons à présent que le fluide s'écoule autour d'un obstacle. À quelle condition  $\varphi$  reste-t-il bien défini globalement? Montrez que la condition de non-pénétrabilité de l'obstacle implique que

$$\psi(z) \equiv \operatorname{Im} \int_{z_0}^z w(z) dz \quad (6)$$

ne dépend pas du chemin d'intégration et que  $\psi$  est constante sur le bord de l'obstacle ( $z_0$  étant un point fixé). Ceci permet de définir la fonction de courant globalement. Le potentiel complexe s'écrit toujours  $g = \varphi + i\psi$  (il est donc multivalué ssi  $\varphi$  l'est).

En utilisant l'équation de Bernoulli et avec un peu plus de travail, on peut calculer la résultante des forces de pression exercées par le fluide sur l'obstacle : c'est la *portance*. On établit ainsi le théorème de Kutta-Joukowski : la force de portance est perpendiculaire à la direction de l'écoulement et son intensité vaut

$$F = \rho \Gamma V \quad (7)$$

où  $\rho$  est la densité du fluide,  $\Gamma$  la circulation autour de l'obstacle et  $V$  la vitesse de l'écoulement loin de l'obstacle.

### 3.2 Utilisation de la transformation de Joukowski

A. Considérons l'écoulement d'un fluide de vitesse  $V_0$  parallèle à l'axe réel, uniforme et constante dans le plan. Écrivez le potentiel complexe  $g_0$  associé à cet écoulement.

B. Utilisez la transformation de Joukowski  $J$  pour montrer que le potentiel complexe

$$g(z) = V_0 \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad |z| \geq 1. \quad (8)$$

décrit l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle circulaire centré en 0 et de rayon 1. Quelle est l'interprétation de  $V_0$  ?

C. Donnez l'expression de la vitesse sur les axes réel et imaginaire. Où la vitesse de l'écoulement est-elle maximale ? minimale ? Tracez l'allure des lignes de courant.

D. À quel écoulement correspond le potentiel complexe  $g(z) + \frac{\Gamma}{2i\pi} \ln z$  ?

E. Expliquez qualitativement (sans calculs) comment on peut à nouveau utiliser la transformation de Joukowski pour trouver le potentiel complexe associé à l'écoulement autour d'une aile d'avion ayant l'une des formes obtenues à la question 1.2.C.

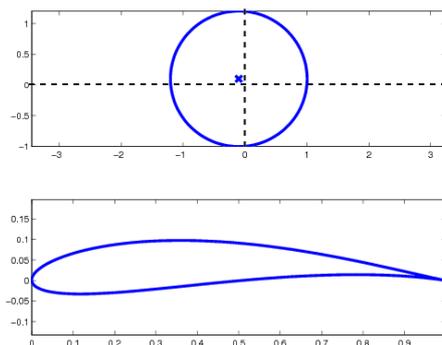


FIGURE 4 – Le profil “Joukowski”.

Remarque culturelle : le fait que ces formes possèdent un point de rebroussement n'est pas anodin. En effet, si on n'impose pas de condition particulière, la vitesse du fluide au voisinage de ce point de rebroussement sera infinie, ce qui est non physique. Pour éviter cela, la *condition de Kutta* prescrit qu'il se crée spontanément une circulation du fluide autour de l'obstacle, de telle sorte que la singularité disparaisse. D'après le théorème de Kutta-Joukowski mentionné plus haut, une force de portance (proportionnelle au carré de la vitesse) s'exerce alors sur l'objet.

Outre l'hydrodynamique, les transformations conformes sont un outil capital dans la compréhension des phénomènes critiques bidimensionnels. Plusieurs distinctions ont récemment récompensé des travaux sur ce sujet : médaille Boltzmann 2010 (la plus prestigieuse distinction en physique statistique) décernée à John Cardy, médailles Fields décernées aux mathématiciens Wendelin Werner (2006) et Stas Smirnov (2010).