Tutorat 3 de Mathématiques (2ème année)

Marches aléatoires et marchés financiers

Groupe 4 – tuteur : J. Bouttier

8 février 2010

Résumé

Depuis la thèse de Bachelier, les marchés financiers ont constitué un important domaine d'application de la théorie des probabilités. Ce tutorat en donne un bref aperçu. Dans la première partie, le cours d'une action est vu comme une marche aléatoire discrète, le mouvement brownien étant obtenu en passant à la limite continue. Dans la seconde partie, on étudie le problème des options. En suivant la même approche, on obtient la célèbre formule de Black et Scholes, un résultat fondamental des mathématiques financières.

1 Prix d'un actif et mouvement brownien

Dans le modèle le plus simple décrivant l'évolution du prix d'un actif financier (action, cours d'une matière première...), on décrit celui-ci par une variable aléatoire S_t, dépendant du temps dont l'évolution est donnée par

$$S_{t+\delta t} = (1 + r\delta t + dB_t)S_t,$$

où δt décrit un accroissement infinitésimal du temps, r est un réel décrivant le rendement moyen de l'actif et dB_t est une variable aléatoire infinitésimale décrivant les fluctuations de prix et supposée : (i) de moyenne nulle, (ii) indépendante de S_t (et plus généralement de tous les cours passés), (iii) valant $\pm\delta b$ avec probabilité $p_+ = p_- = 1/2$ (*N.B.* comme on le verra plus bas, δb n'est *a priori* pas d'ordre δt).

1. On considère la variable aléatoire $X_t = \ln S_t$. Montrer que

   $$X_{t+\delta t} = X_t + dR_t,$$

   où dR_t est une variable aléatoire dont on donnera la loi de probabilité (on posera $\delta r_\pm = \ln(1 + r\delta t \pm \delta b)$.

2. Soit $\mathbb{P}(X_t \in [x, x+dx])$ la probabilité que X_t appartienne à l'intervalle $[x, x+dx]$. En posant $\mathbb{P}(X_t \in [x, x+dx]) = f(x,t)dx$, montrer que

   $$f(x, t+\delta t) = \frac{1}{2}\left(f(x - \delta r_-, t) + f(x - \delta r_+, t)\right).$$

3. En développant en série l'équation précédente à l'ordre dominant en δt, montrer que l'on a

   $$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\delta r_+^n + \delta r_-^n}{\delta t}\right)\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right) + O(\delta t).$$

Montrer que pour un choix convenable de δb, cette équation prend la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -r' \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Où l'on exprimera r' et σ en fonction de r et δb. On dit alors que B_t est une variable *brownienne.*

4. On pose $g(x,t) = f(x + r't, t)$. De quelle équation g est-elle solution ? Justifier le terme de *volatilité* utilisé pour décrire σ.
5. Relier $g(x,0)$ à $f(x,0)$. En déduire que l'on peut chercher g sous la forme

$$g(x,t) = \int dx' f(x',0) \mathcal{G}(x - x', t),$$

où l'on donnera $\mathcal{G}$.

6. On suppose connue de façon certaine la valeur s_0 de l'actif à $t = 0$. Que vaut alors $f(x,0)$? En déduire $f(x,t)$. Quelle est la loi de probabilité de S_t ? Quel théorème retrouve-t-on ? Comment peut-on généraliser l'hypothèse (iii) ?

2 Évaluation des options et modèle de Black–Scholes

Introduction

Qu'est-ce-qu'une option ?

La plupart des échanges sur les marchés boursiers ne portent pas sur les actifs eux-mêmes mais sur des produits dits "dérivés", appelés également options. Un exemple fondamental est celui d'un *call* (ou option d'achat) qui est un contrat donnant le droit, mais non l'obligation, d'acheter à une *échéance* fixée un actif à un prix d'*exercice* convenu d'avance (car on dit qu'on *exerce* une option). Un call permet par exemple de s'assurer contre les fluctuations des cours du marché : imaginons par exemple une compagnie aérienne ayant d'importants besoins en kérozène et souhaitant se prémunir contre une éventuelle flambée du prix du baril de pétrole. On utilise ici les notations suivantes : comme précédemment S_t désigne le prix de l'actif (baril de pétrole dans notre exemple) au temps t, l'échéance est au temps $t = T$ tandis que l'option est vendue au temps $t = 0$, le prix d'exercice étant noté K.

Afin de mieux comprendre la problématique, mettons-nous d'abord dans la situation de la compagnie aérienne au temps $t = T$. Si $K > S_T$ alors elle n'a pas intérêt à exercer son call, puisqu'elle peut se fournir pour moins cher au prix du marché. Au contraire, si $K < S_T$, elle exercera son call : la banque qui a émis l'option devra alors acheter l'actif au prix du marché et le revendre au prix K, opération qui lui coûtera $S_T - K$. On voit donc que globalement le call équivaut à un transfert $\max(S_T - K, 0)$ (positif ou nul) au temps $t = T$ de la banque vers la compagnie aérienne. En compensation de ce transfert éventuel, le call est vendu à $t = 0$ par la banque à compagnie aérienne à un certain prix V. Toute la difficulté provient du fait que S_T est inconnu à ce moment.

Plaçons-nous à présent dans la situation de la banque. Notre premier problème (*évaluation* ou "pricing") consiste à évaluer au mieux le prix V auquel vendre le call au temps $t = 0$. S'il est trop élevé, une banque concurrente pourrait proposer moins cher ; s'il est trop bas, nous pourrions perdre de l'argent. Notre second problème (*couverture*) est de trouver une stratégie d'investissement qui, à partir de la somme V encaissée au temps $t = 0$, permettra d'obtenir (au moins) la somme $\max(S_T - K, 0)$ au temps $t = T$ (sachant que nous ne sommes pas devins...).

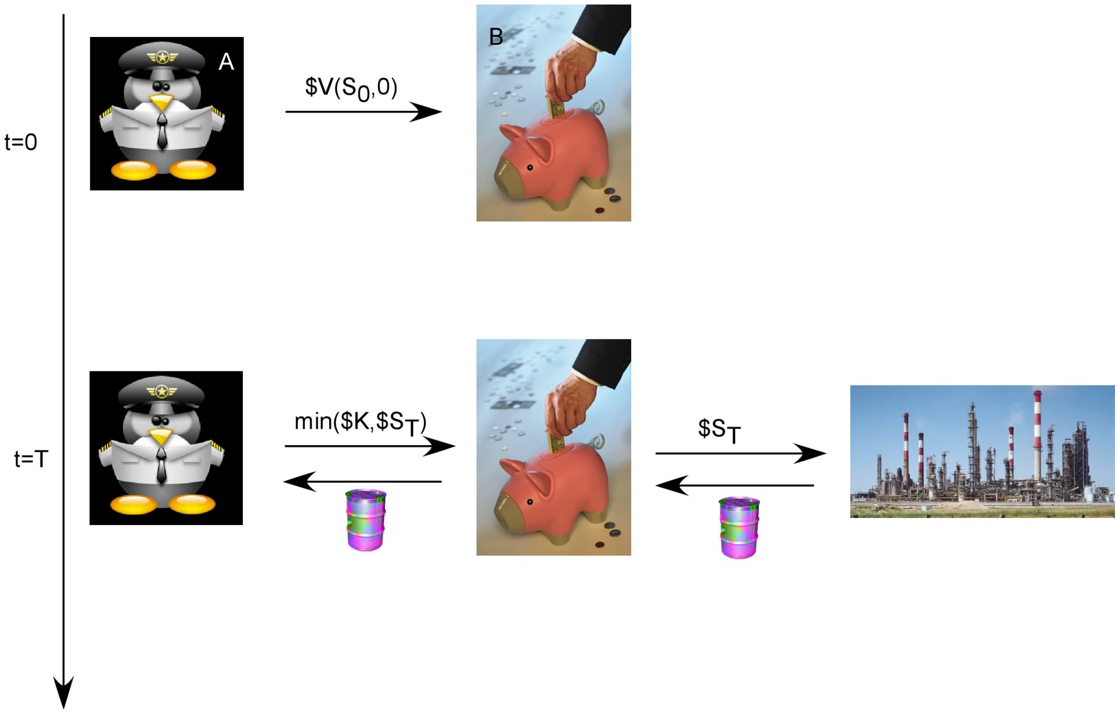

FIGURE 1 – Principe d'un call : un acheteur (A) souhaite acheter un actif à $t = T$ en se prémunissant contre les fluctuations du cours S_t de celui-ci. Pour cela, à $t = 0$ il souscrit auprès d'un organisme financier (B) une option lui garantissant de pouvoir acheter l'actif au prix K fixé à l'avance. Cette assurance coûte $V(S_0, 0)$ qu'il verse à $t = 0$ à la banque. À $t = T$, deux possibilités s'offrent à A. Soit $S_T < K$, auquel cas il n'exerce pas son option, et achète directement l'actif sur le marché au prix S_T. Si en revanche $K < S_T$, alors il exerce son option et achète l'actif à B au prix K. Globalement, il débourse $\min(K, S_T)$, somme que doit alors compléter B de $\max(S_T - K, 0)$ pour atteindre S_T. Le problème est ici pour B de déterminer la valeur de la prime $V(S_0, 0)$ ainsi que la stratégie d'investissement qui lui permettront de couvrir le coût de l'opération.

Plus généralement, nous considérons ici les problèmes de l'évaluation et de la couverture d'une *option européenne* dont la valeur à l'échéance est une fonction arbitraire mais connue de S_T, notée $V(S_T, T)$ (dans le cas du call, $V(S_T, T) = \max(S_T - K, 0)$). Nous verrons plus loin tout l'intérêt de cette notation mais nous anticipons que, pour tout t, $V(S_t, t)$ sera le prix de l'option évalué au temps t (lorsque l'actif vaut S_t). En particulier pour $t = 0$, $V(S_0, 0)$ est le prix de vente V discuté plus haut. Cf la figure 2 résumant le cas d'un call.

Le modèle de Black-Scholes

Le but de cette partie 2 est de montrer que dans le cas d'un actif dont le cours S_t est décrit par un mouvement brownien comme étudié dans la partie 1, et sous quelques hypothèses supplémentaires que nous verrons (le tout constituant le *modèle de Black-Scholes*), il existe un prix parfait de l'option associé à une stratégie de couverture *sans risque* (mais alors la banque ne gagne ni ne perd jamais d'argent, on imagine qu'en pratique elle demandera en plus une petite commission !).

Supposons qu'il existe, en plus de l'actif de cours S_t, un placement sans risque rapportant un taux d'intérêt fixe. Pour simplifier les calculs, supposons que ce taux est nul (en fait, on peut toujours se ramener à ce cas en travaillant avec les cours "actualisés"). Pour se couvrir, la banque va constituer un portefeuille constitué d'une quantité Δ d'actif et Π de placement sans risque, la valeur de ce portefeuille au temps t sera donc $\Delta S_t + \Pi$. Ici, on suppose que Δ et Π et peuvent prendre des valeurs réelles arbitraires (positives ou négatives, non-nécessairement entières...). De plus, comme la banque ajuste la composition du portefeuille en fonction du cours du jour, Δ et Π peuvent varier au cours du temps comme nous verrons.

Questions

1. On commence par étudier le cas d'une option émise au temps t et d'échéance infinitésimale $T = t + \delta t$. À l'émission, S_t est connu tandis que S_T ne l'est pas. Montrer que l'on peut néanmoins constituer au temps t un portefeuille atteignant de manière certaine la valeur $V(S_T, T)$ au temps T. Les quantités composant ce portefeuille seront notées $\Delta(S_t, t)$ et $\Pi(S_t, t)$. [Indication : on se rappelera de la partie précédente que, pour S_t fixé, $S_{t+\delta t}$ ne prend que deux valeurs.]

2. En déduire que le prix de l'option au temps t est donné par :
$$V(S_t, t) = \big(q_+ V(S_t e^{\delta r_+}, t + \delta t) + q_- V(S_t e^{\delta r_-}, t + \delta t)\big) \tag{1}$$
où q_+, q_- sont des probabilités ($q_+ + q_- = 1$) telles que $q_+ e^{\delta r_+} + q_- e^{\delta r_-} = 1$ (autrement dit, sous ces probabilités S_t est conservé en moyenne : c'est une *martingale*).

3. On raisonne ensuite par "récurrence" : considérons une option émise au temps $t - \delta t$ et ayant pour échéance $T = t + \delta t$. La banque constitue initialement un portefeuille de couverture au temps $t - \delta$, connaissant seulement $S_{t-\delta t}$. Au temps t, elle peut ajuster la composition du portefeuille, ayant pris connaissance du nouveau cours S_t. Cet ajustement se fait à valeur totale constante : écrire la condition correspondante. Expliquer quelle est la stratégie de couverture parfaite. Généraliser au cas où l'option est émise au temps 0 et a pour échéance $T = N\delta t$ ($N \gg 1$).

4. Limite continue : en développant l'équation (1) au premier ordre en δt, $V(S, t)$ étant vue comme une fonction suffisamment régulière, obtenir l'*EDP de Black–Scholes* :
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0. \tag{2}$$

Quel est le type de cette équation ? Exprimer la composition Δ, Π du portefeuille de couverture en fonction de V dans la limite $\delta t \to 0$. On remarquera que l'équation ne dépend pas du rendement moyen r de l'actif, mais uniquement de la volatilité σ.

5. Application : en résolvant l'EDP avec la valeur d'échéance $\max(S_T - K, 0)$, déduire la *formule de Black–Scholes* pour le prix $C(S_t, t)$ d'un *call* européen. On introduira la fonction de répartition de la loi normale :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt. \tag{3}$$

Tracer les courbes obtenues pour $K = \sigma = 1$ et diverses valeurs de l'échéance. [Indication : on effectuera les changements de variables $\tau = T - t$, $x = \ln(S/K) - \sigma^2/2\tau$.]

6. On considère à présent un *put* (ou option de vente) qui, à l'échéance T, donne le droit de vendre (au lieu d'acheter) l'actif au prix K. Autrement dit, sa valeur d'échéance est $\max(K - S_T, 0)$. Montrer que le prix P du put au temps t se déduit de celui C du call par la *relation de parité* :

$$C(S_t, t) - P(S_t, t) = S_t - K. \tag{4}$$

[Indication : inutile de faire un calcul compliqué...]

7. Question bibliographique : l'approche suivie ici, correspondant au modèle discret dit de Cox, Ross et Rubinstein, peut paraître simpliste (on utilise en particulier fortement l'hypothèse (iii) de la partie 1 qui n'est pas "universelle"). Les formules continues de Black–Scholes restent toutefois valables sous des hypothèses très générales et sont largement utilisées en pratique. Quelles sont ces hypothèses ? Quelles sont les principales limitations rencontrées en pratique ?