

# Cartes planaires et partitions aléatoires

Jérémie Bouttier

Institut de Physique Théorique, CEA Saclay  
Laboratoire de Physique, ENS de Lyon

Soutenance d'habilitation à diriger des recherches  
Lundi 2 décembre 2019

## Quelques éléments de CV

- Chercheur permanent à l'IPhT depuis 2006
- Séjours dans d'autres laboratoires
  - ▶ LIAFA, Paris 7 (2011-2012)
  - ▶ DMA, ENS Paris (2012-2015)
  - ▶ Laboratoire de physique, ENS de Lyon (2015-2021)

# Quelques éléments de CV

- Chercheur permanent à l'IPhT depuis 2006
- Séjours dans d'autres laboratoires
  - ▶ LIAFA, Paris 7 (2011-2012)
  - ▶ DMA, ENS Paris (2012-2015)
  - ▶ Laboratoire de physique, ENS de Lyon (2015-2021)
- Doctorants
  - ▶ François Nunzi (codirectrice S. Corteel, soutenance décembre 2016)  
*Autour de quelques chaînes de Markov combinatoires*
  - ▶ Linxiao Chen (codirecteur N. Curien, soutenance avril 2018)  
*Cartes planaires aléatoires couplées aux systèmes de spins*
  - ▶ Harriet Walsh (codirecteur G. Chapuy, depuis octobre 2019)  
*Probabilités intégrables*

# Travaux de recherche

Intérêts : physique mathématique/statistique, combinatoire, probabilités

28 publications sur la période 2005-2019, dans les thèmes suivants :

- 1 Cartes planaires
  - ▶ Propriétés métriques et asymptotiques : [2,5-10,13,19] (chap. 1)
  - ▶ Aspects bijectifs et énumératifs : [1,3,11,16,17] (chap. 2)
  - ▶ Modèle de boucles  $O(n)$  : [12,14,15,25] (chap. 3)
- 2 Processus de Schur, partitions aléatoires, modèles de dimères, etc : [4,21,22,24,26-28] (chap. 4)
- 3 Jonglage aléatoire et processus d'exclusion : [18,20,23] (cf thèse F. Nunzi)

# Plan

## 1 Introduction

## 2 Quelques aspects des cartes planaires

- Motivations, définitions
- Décomposition en tranches
- Fractions continues
- Cartes irréductibles
- Modèle de boucles  $O(n)$
- Perspectives

## 3 Partitions aléatoires et processus de Schur

- Pavages pentus et gares de triage
- Fermions libres
- Perspectives

# Plan

## 1 Introduction

## 2 Quelques aspects des cartes planaires

- Motivations, définitions
- Décomposition en tranches
- Fractions continues
- Cartes irréductibles
- Modèle de boucles  $O(n)$
- Perspectives

## 3 Partitions aléatoires et processus de Schur

- Pavages pentus et gares de triage
- Fermions libres
- Perspectives

# Plan

## 1 Introduction

## 2 Quelques aspects des cartes planaires

- Motivations, définitions
- Décomposition en tranches
- Fractions continues
- Cartes irréductibles
- Modèle de boucles  $O(n)$
- Perspectives

## 3 Partitions aléatoires et processus de Schur

- Pavages pentus et gares de triage
- Fermions libres
- Perspectives

# Pourquoi s'intéresser (encore) aux cartes ?

Parties de la combinatoire dans les années 60, passées par la physique théorique dans les années 80-90, les cartes sont à l'origine de nombreux développements en théorie des probabilités depuis une vingtaine d'années. En voici une liste non limitative :

- limites d'échelle : carte brownienne et variantes,
- limites locales : épluchage, agencements de cercles et applications,
- approches combinatoires :
  - ▶ bijections, approche unifiée via les orientations,
  - ▶ énumération exacte et asymptotique,
- lien avec la gravité quantique de Liouville.

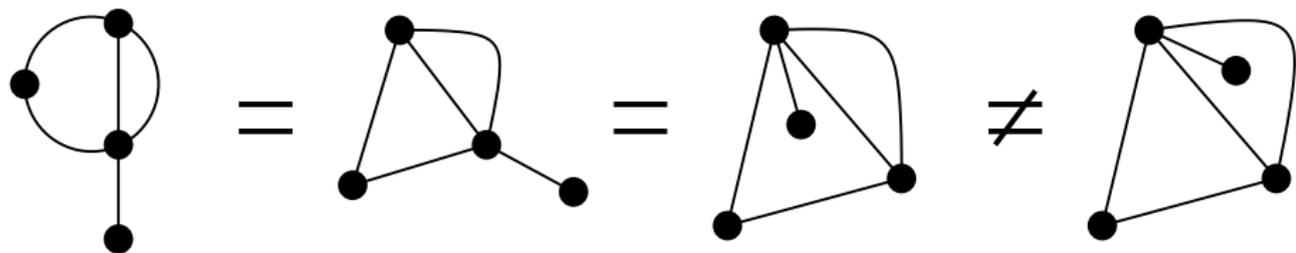
# Pourquoi s'intéresser (encore) aux cartes ?

Parties de la combinatoire dans les années 60, passées par la physique théorique dans les années 80-90, les cartes sont à l'origine de nombreux développements en théorie des probabilités depuis une vingtaine d'années. En voici une liste non limitative :

- limites d'échelle : carte brownienne et variantes,
- limites locales : épluchage, agencements de cercles et applications,
- **approches combinatoires** :
  - ▶ bijections, approche unifiée via les orientations,
  - ▶ énumération exacte et asymptotique,
- lien avec la gravité quantique de Liouville.

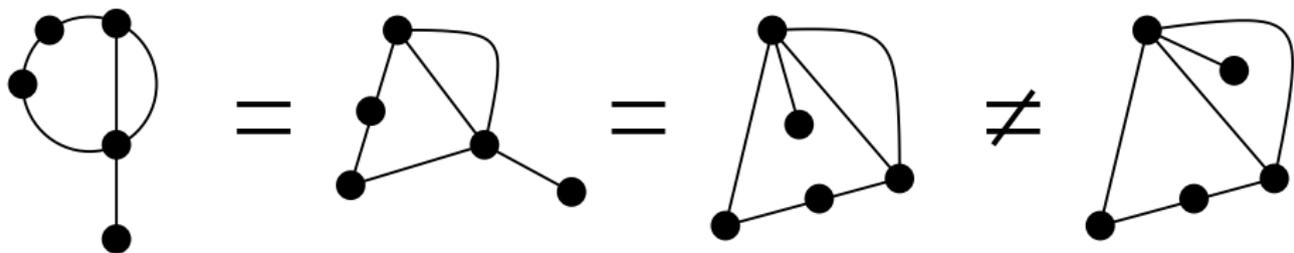
# Définitions

Une **carte planaire** est un graphe plongé dans la sphère, et considéré à déformation continue près. Une carte est constituée de **sommets**, d'**arêtes**, de **faces** et de **coins**. Le **degré** d'une face ou d'un sommet est son nombre de coins incidents.



# Définitions

Une **carte planaire** est un graphe plongé dans la sphère, et considéré à déformation continue près. Une carte est constituée de **sommets**, d'**arêtes**, de **faces** et de **coins**. Le **degré** d'une face ou d'un sommet est son nombre de coins incidents.



Une carte planaire est **bipartite** si toutes ses faces ont degré pair, et **eulérienne** si tous ses sommets ont degré pair.

# Cartes de Boltzmann

## Cartes de Boltzmann

Fixons une suite  $g_1, g_2, g_3, \dots$ . On donne un poids  $g_k$  à chaque face de degré  $k$ , un poids auxiliaire  $t$  à chaque sommet, et on définit le **poids de Boltzmann** d'une carte comme le produit des poids de ses faces et sommets.

## Cartes de Boltzmann

Fixons une suite  $g_1, g_2, g_3, \dots$ . On donne un poids  $g_k$  à chaque face de degré  $k$ , un poids auxiliaire  $t$  à chaque sommet, et on définit le **poids de Boltzmann** d'une carte comme le produit des poids de ses faces et sommets. Pour des poids suffisamment petits, on obtient par normalisation une mesure de probabilité sur les cartes planaires, la mesure de Boltzmann.

## Cartes de Boltzmann

Fixons une suite  $g_1, g_2, g_3, \dots$ . On donne un poids  $g_k$  à chaque face de degré  $k$ , un poids auxiliaire  $t$  à chaque sommet, et on définit le **poids de Boltzmann** d'une carte comme le produit des poids de ses faces et sommets. Pour des poids suffisamment petits, on obtient par normalisation une mesure de probabilité sur les cartes planaires, la mesure de Boltzmann.

Si on prend  $g_k$  nul pour  $k \neq 3$  (resp.  $k \neq 4$ ), la mesure est supportée par l'ensemble des triangulations (resp. quadrangulations). En conditionnant sur la taille, on obtient une mesure uniforme.

Si on prend  $g_k$  nul pour  $k$  impair, la mesure est supportée par l'ensemble des cartes biparties.

## Cartes de Boltzmann

Fixons une suite  $g_1, g_2, g_3, \dots$ . On donne un poids  $g_k$  à chaque face de degré  $k$ , un poids auxiliaire  $t$  à chaque sommet, et on définit le **poids de Boltzmann** d'une carte comme le produit des poids de ses faces et sommets. Pour des poids suffisamment petits, on obtient par normalisation une mesure de probabilité sur les cartes planaires, la mesure de Boltzmann.

Si on prend  $g_k$  nul pour  $k \neq 3$  (resp.  $k \neq 4$ ), la mesure est supportée par l'ensemble des triangulations (resp. quadrangulations). En conditionnant sur la taille, on obtient une mesure uniforme.

Si on prend  $g_k$  nul pour  $k$  impair, la mesure est supportée par l'ensemble des cartes biparties.

Je vais ici expliquer comment «compter» les cartes de Boltzmann, c'est-à-dire calculer leur série génératrice (fonction de partition), par la méthode de la **décomposition en tranches**.

# Plan

## 1 Introduction

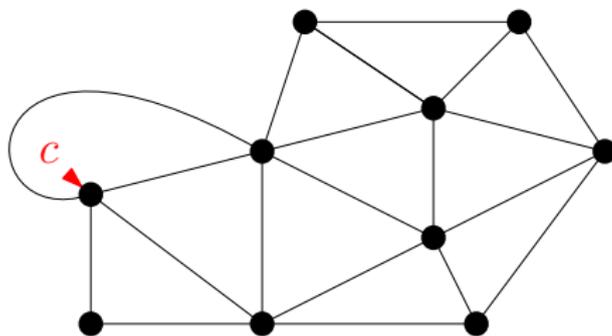
## 2 Quelques aspects des cartes planaires

- Motivations, définitions
- **Décomposition en tranches**
- Fractions continues
- Cartes irréductibles
- Modèle de boucles  $O(n)$
- Perspectives

## 3 Partitions aléatoires et processus de Schur

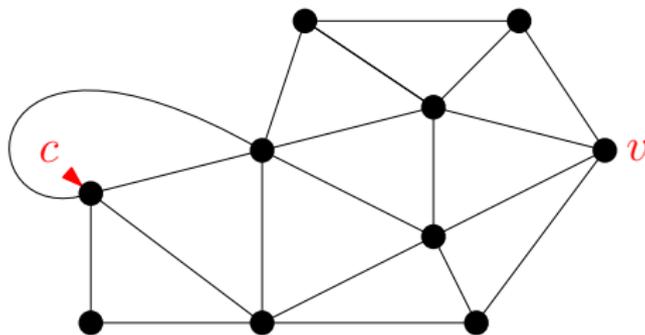
- Pavages pentus et gares de triage
- Fermions libres
- Perspectives

Comme toujours, on contournera le problème des symétries en considérant des cartes **enracinées**, c'est-à-dire avec un **coin** marqué.



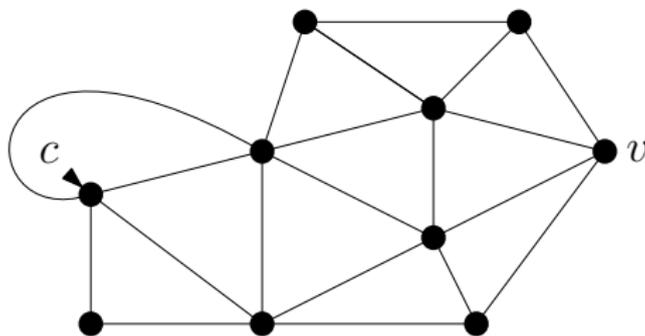
Comme toujours, on contournera le problème des symétries en considérant des cartes enracinées, c'est-à-dire avec un coin marqué.

Les cartes les plus faciles à compter sont les cartes **pointées enracinées**.



Comme toujours, on contournera le problème des symétries en considérant des cartes enracinées, c'est-à-dire avec un coin marqué.

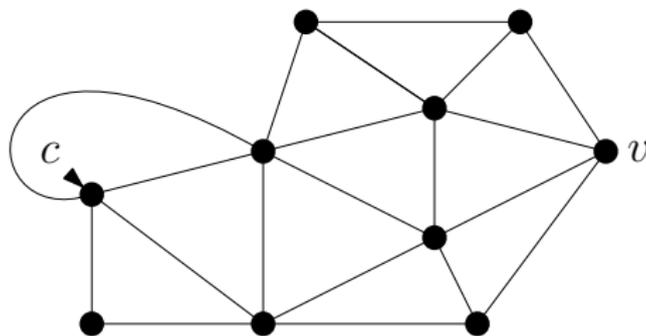
Les cartes les plus faciles à compter sont les cartes pointées enracinées.



L'idée générale de la décomposition en tranches est de découper le long des **géodésiques gauches**.

Comme toujours, on contournera le problème des symétries en considérant des cartes enracinées, c'est-à-dire avec un coin marqué.

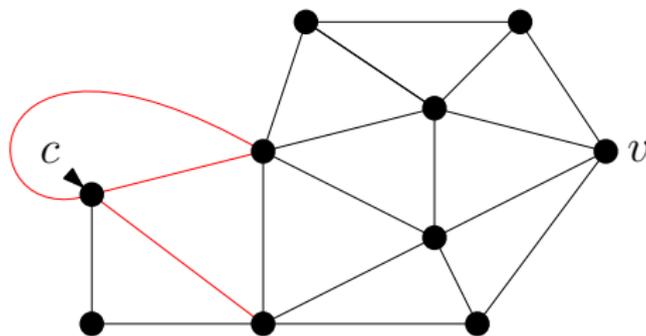
Les cartes les plus faciles à compter sont les cartes pointées enracinées.



L'idée générale de la décomposition en tranches est de découper le long des géodésiques gauches. Considérons la géodésique gauche de  $c$  à  $v$ .

Comme toujours, on contournera le problème des symétries en considérant des cartes enracinées, c'est-à-dire avec un coin marqué.

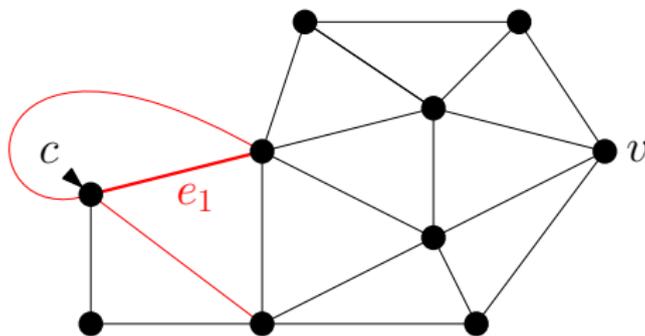
Les cartes les plus faciles à compter sont les cartes pointées enracinées.



L'idée générale de la décomposition en tranches est de découper le long des géodésiques gauches. Considérons la géodésique gauche de  $c$  à  $v$ .

Comme toujours, on contournera le problème des symétries en considérant des cartes enracinées, c'est-à-dire avec un coin marqué.

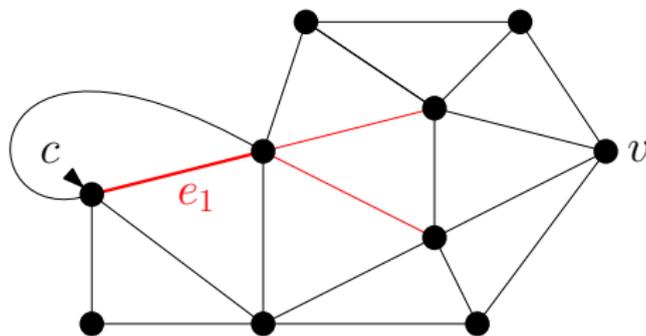
Les cartes les plus faciles à compter sont les cartes pointées enracinées.



L'idée générale de la décomposition en tranches est de découper le long des géodésiques gauches. Considérons la géodésique gauche de  $c$  à  $v$ .

Comme toujours, on contournera le problème des symétries en considérant des cartes enracinées, c'est-à-dire avec un coin marqué.

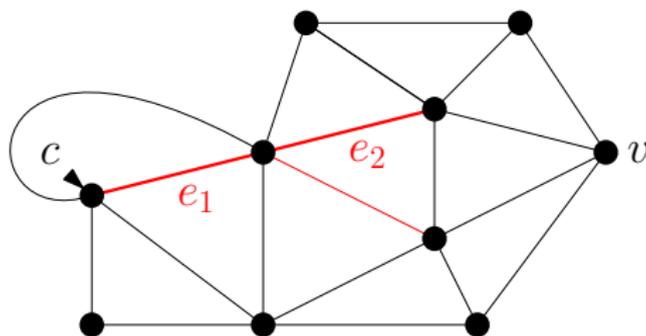
Les cartes les plus faciles à compter sont les cartes pointées enracinées.



L'idée générale de la décomposition en tranches est de découper le long des géodésiques gauches. Considérons la géodésique gauche de  $c$  à  $v$ .

Comme toujours, on contournera le problème des symétries en considérant des cartes enracinées, c'est-à-dire avec un coin marqué.

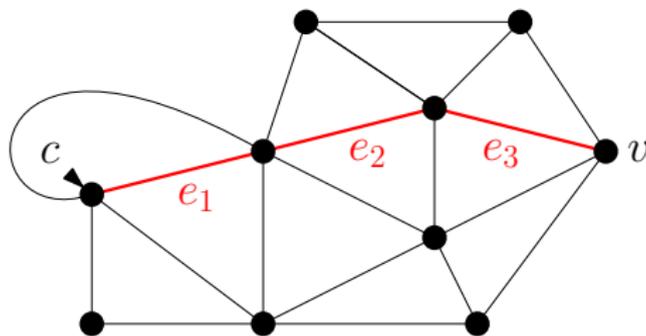
Les cartes les plus faciles à compter sont les cartes pointées enracinées.



L'idée générale de la décomposition en tranches est de découper le long des géodésiques gauches. Considérons la géodésique gauche de  $c$  à  $v$ .

Comme toujours, on contournera le problème des symétries en considérant des cartes enracinées, c'est-à-dire avec un coin marqué.

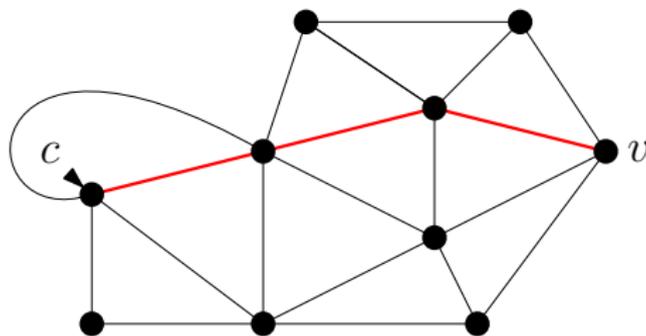
Les cartes les plus faciles à compter sont les cartes pointées enracinées.



L'idée générale de la décomposition en tranches est de découper le long des géodésiques gauches. Considérons la géodésique gauche de  $c$  à  $v$ .

Comme toujours, on contournera le problème des symétries en considérant des cartes enracinées, c'est-à-dire avec un coin marqué.

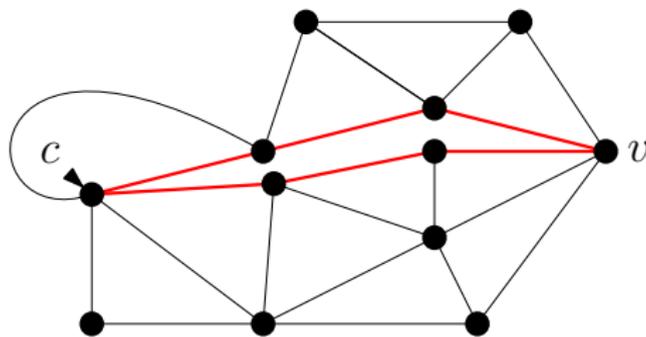
Les cartes les plus faciles à compter sont les cartes pointées enracinées.



L'idée générale de la décomposition en tranches est de découper le long des géodésiques gauches. Considérons la géodésique gauche de  $c$  à  $v$ . On «découpe» le long de cette géodésique, ce qui crée une nouvelle face qu'on prendra comme face externe.

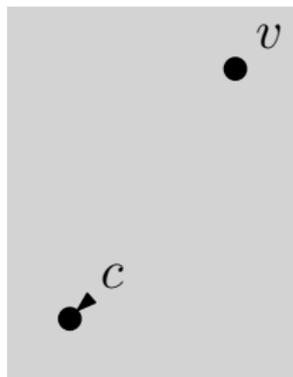
Comme toujours, on contournera le problème des symétries en considérant des cartes enracinées, c'est-à-dire avec un coin marqué.

Les cartes les plus faciles à compter sont les cartes pointées enracinées.

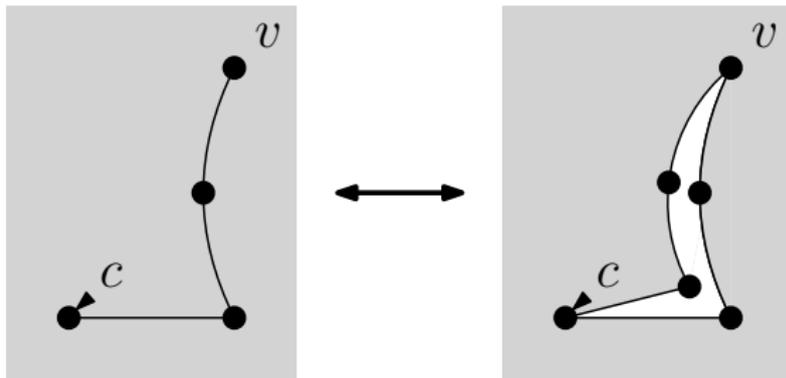


L'idée générale de la décomposition en tranches est de découper le long des géodésiques gauches. Considérons la géodésique gauche de  $c$  à  $v$ . On «découpe» le long de cette géodésique, ce qui crée une nouvelle face qu'on prendra comme face externe.

Le découpage précédent se représente schématiquement :

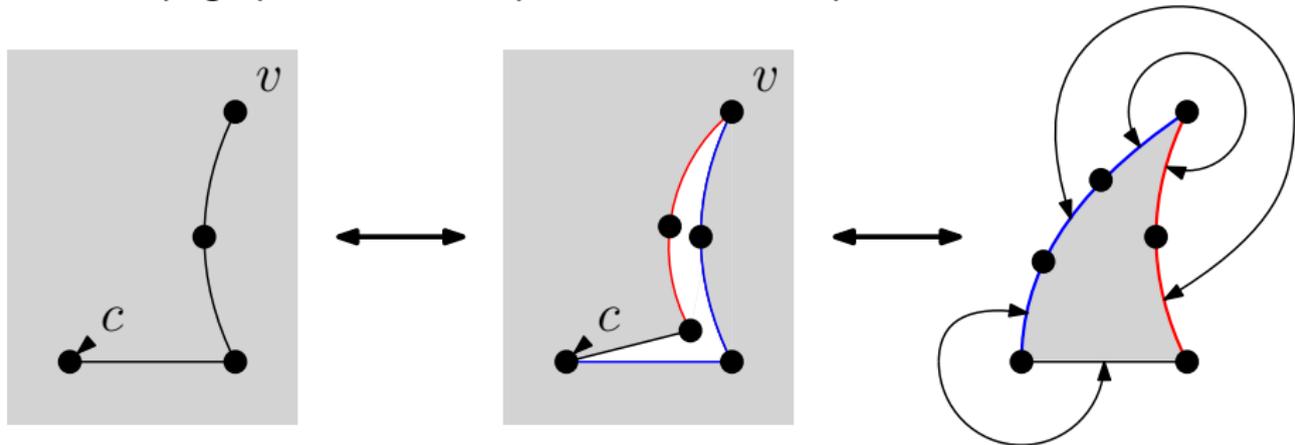


Le découpage précédent se représente schématiquement :





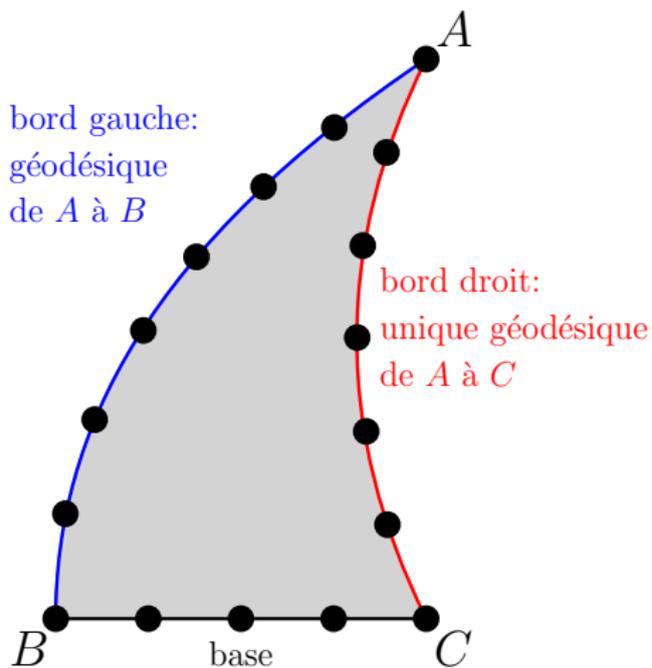
Le découpage précédent se représente schématiquement :



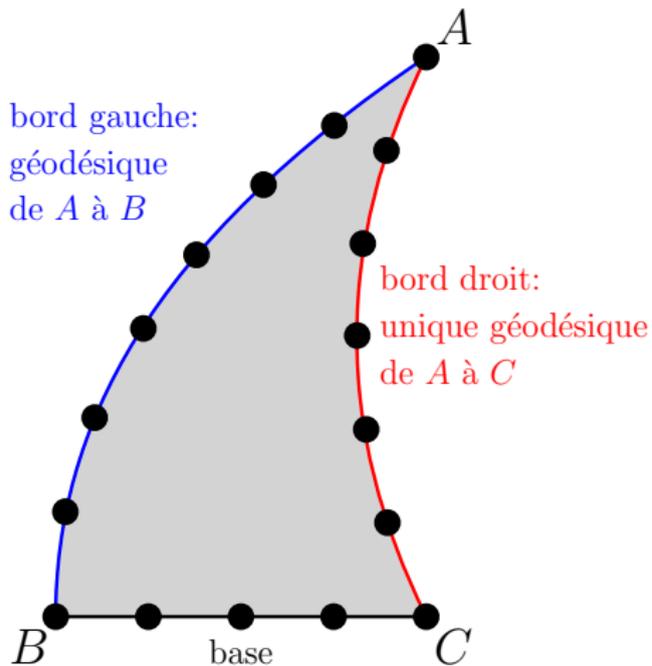
Après découpage, on obtient une carte à bord qu'on appelle **tranche**.

L'opération est bijective (à de petits détails près), puisqu'on peut revenir en arrière en identifiant les arêtes du bord entre elles. Compter les cartes pointées enracinées revient donc à compter les tranches.

# Tranches : définition générale



# Tranches : définition générale



On suppose que les bords gauche et droit n'ont pas d'arête commune.

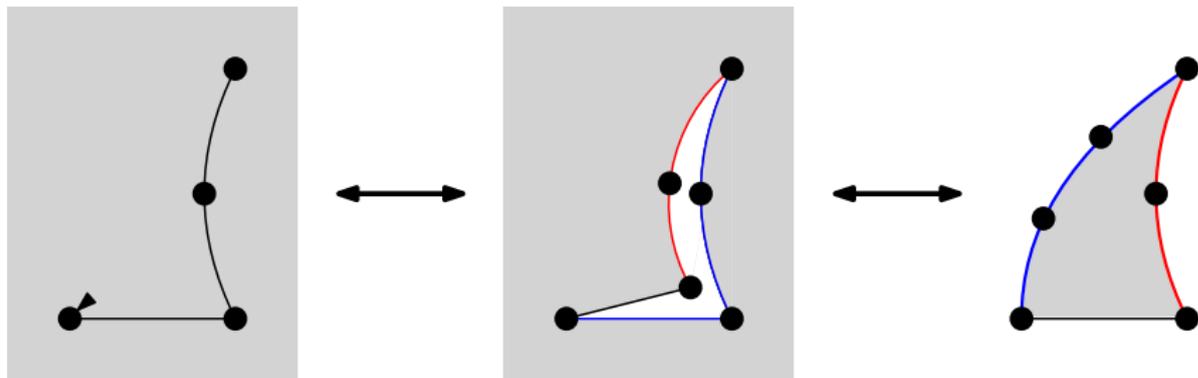
Terminologie :

- *largeur* : longueur  $BC$
- *profondeur* : longueur  $AB$
- *inclinaison* : différence  $AB-AC$

Une tranche de largeur 1 est dite *élémentaire*. Son inclinaison est alors  $\pm 1$ , dans le cas biparti qu'on considère dorénavant.

La seule tranche élémentaire d'inclinaison  $-1$  est la tranche *triviale* réduite à une arête.

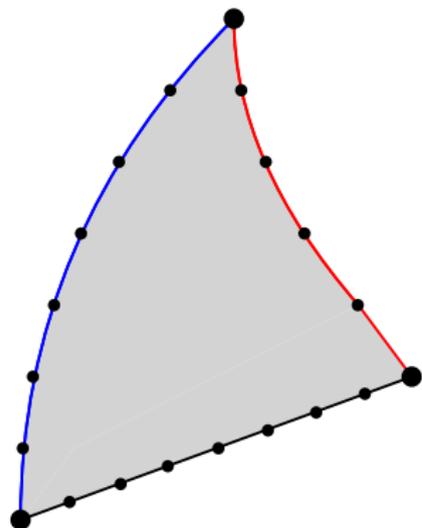
Les cartes pointées enracinées sont en bijection avec les tranches élémentaires d'inclinaison  $+1$  (cas biparti).



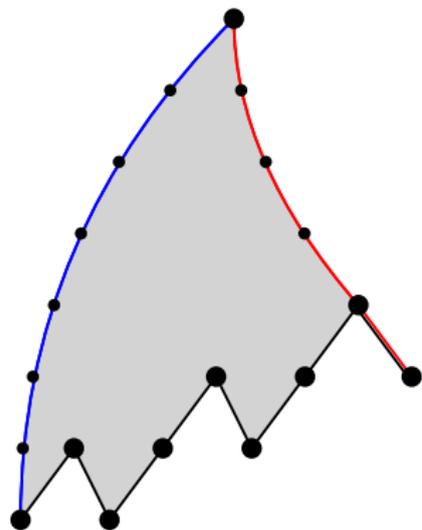
On note  $R = R(g_2, g_4, g_6, \dots; t)$  leur série génératrice. Par convention la face externe d'une tranche ne reçoit pas de poids, et les sommets du bord droit non plus.

$R$  sera notre série fondamentale, à partir de laquelle toutes les autres vont s'exprimer.

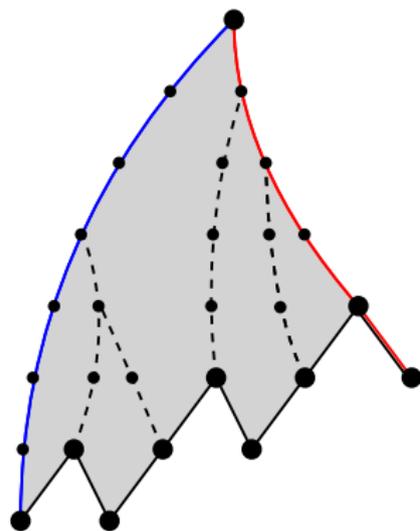
Voyons à présent comment décomposer une tranche quelconque (*composite*) en tranches élémentaires.



Voyons à présent comment décomposer une tranche quelconque (*composite*) en tranches élémentaires.

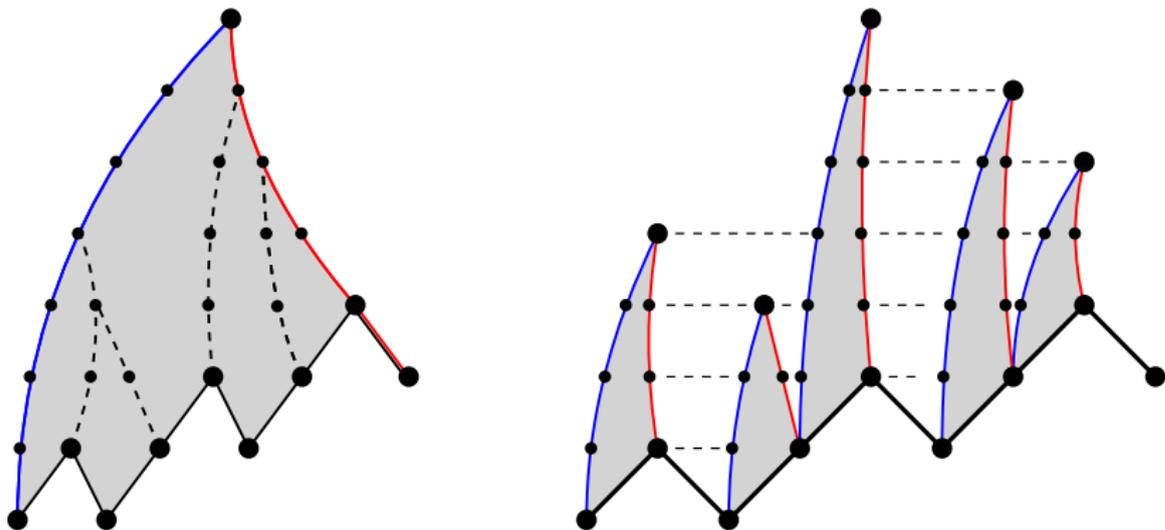


Voyons à présent comment décomposer une tranche quelconque (*composite*) en tranches élémentaires.



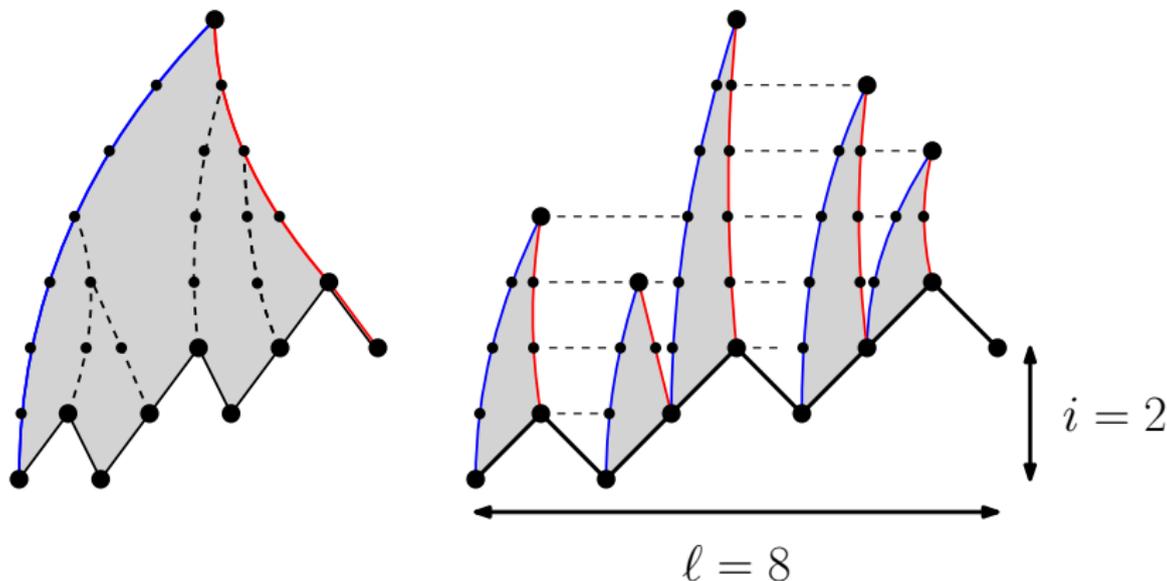
On découpe le long des géodésiques gauches à partir de chaque sommet de la base.

Voyons à présent comment décomposer une tranche quelconque (*composite*) en tranches élémentaires.

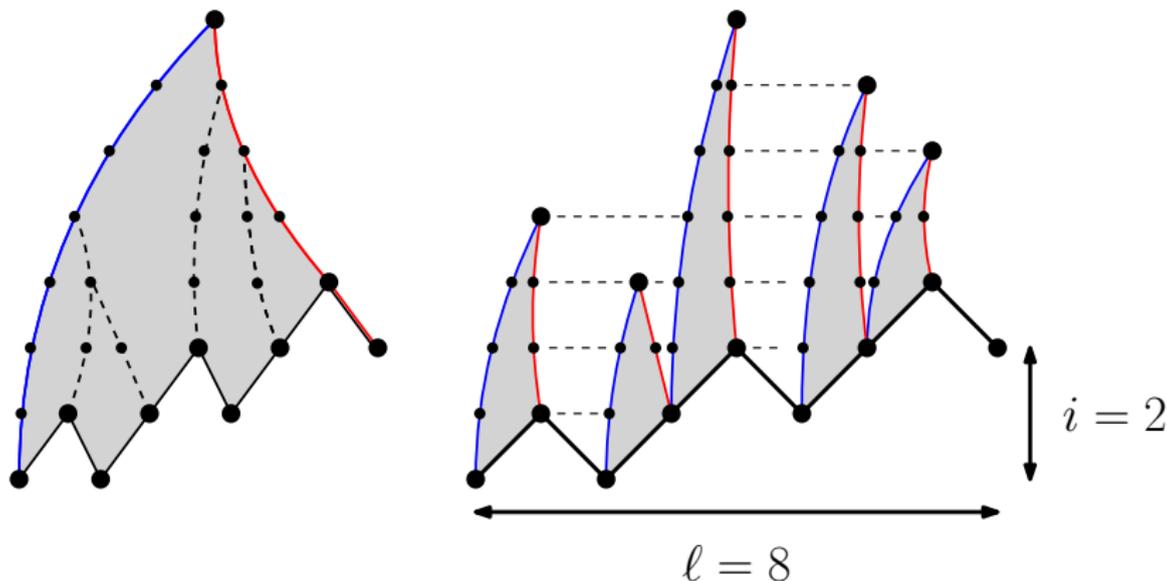


On découpe le long des géodésiques gauches à partir de chaque sommet de la base. Les sous-cartes délimitées par deux géodésiques successives sont des tranches élémentaires, éventuellement triviales.

Pour une largeur  $\ell$  et une inclinaison  $i$ , on obtient  $(\ell - i)/2$  tranches triviales,  $(\ell + i)/2$  tranches élémentaires d'inclinaison  $+1$ , et il y a  $\binom{\ell}{(\ell+i)/2}$  façon de les ordonner.

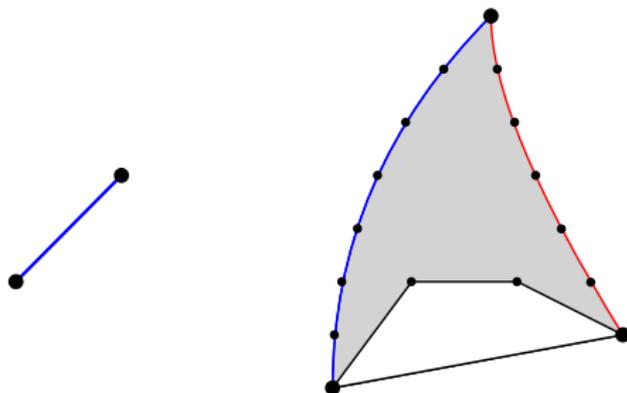


Pour une largeur  $\ell$  et une inclinaison  $i$ , on obtient  $(\ell - i)/2$  tranches triviales,  $(\ell + i)/2$  tranches élémentaires d'inclinaison  $+1$ , et il y a  $\binom{\ell}{(\ell+i)/2}$  façon de les ordonner.

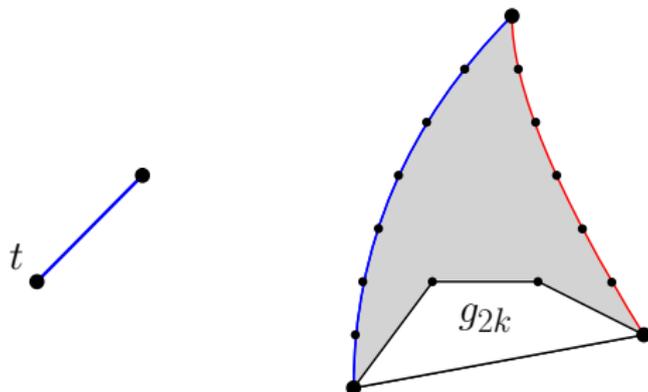


On en déduit que la série génératrice des tranches composites de largeur  $\ell$  et d'inclinaison  $i$  vaut  $\binom{\ell}{(\ell+i)/2} R^{(\ell+i)/2}$  (ou 0 si  $\ell + i$  est impair).

Pour déterminer  $R$ , on observe qu'une tranche élémentaire d'inclinaison  $+1$  est soit réduite à une arête, soit en bijection avec une tranche composite d'inclinaison  $+1$  (en enlevant l'arête basale).



Pour déterminer  $R$ , on observe qu'une tranche élémentaire d'inclinaison  $+1$  est soit réduite à une arête, soit en bijection avec une tranche composite d'inclinaison  $+1$  (en enlevant l'arête basale).

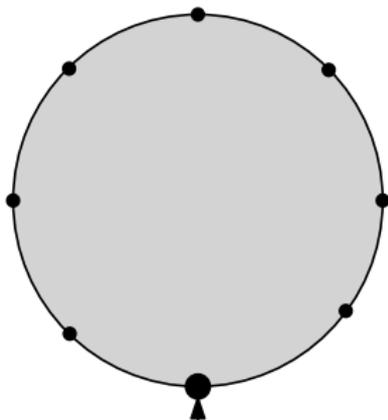


On en déduit la relation

$$R = t + \sum_{k \geq 1} g_{2k} \binom{2k-1}{k} R^k.$$

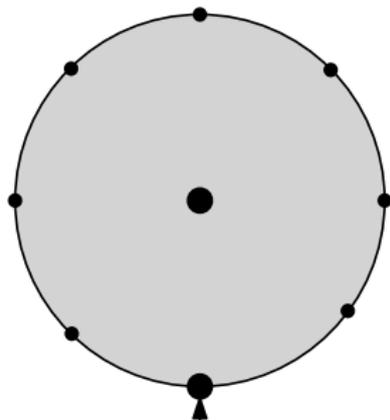
et les coefficients de  $R$  sont alors donnés par des formules bien connues.

On veut à présent compter les cartes avec un **bord** de longueur  $2p$  prescrite (ici  $2p = 8$ ). Soit  $F_{2p}$  la série génératrice correspondante.



On veut à présent compter les cartes avec un bord de longueur  $2p$  prescrite (ici  $2p = 8$ ). Soit  $F_{2p}$  la série génératrice correspondante.

Comme avant, on ajoute un point marqué :



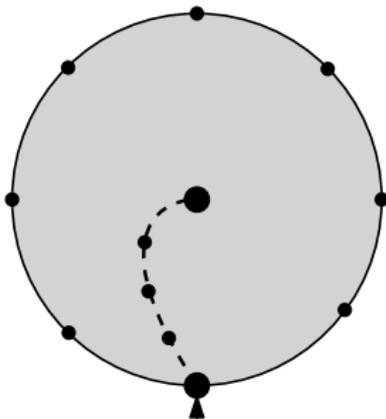
$$F_{2p}^{\bullet} = \frac{d}{dt} F_{2p}.$$

On veut à présent compter les cartes avec un bord de longueur  $2p$  prescrite (ici  $2p = 8$ ). Soit  $F_{2p}$  la série génératrice correspondante.

Comme avant, on ajoute un point marqué :

$$F_{2p}^\bullet = \frac{d}{dt} F_{2p}.$$

En découpant le long de la géodésique gauche du coin-racine au point marqué, on obtient une tranche composite de largeur  $2p$  et d'inclinaison nulle.



On veut à présent compter les cartes avec un bord de longueur  $2p$  prescrite (ici  $2p = 8$ ). Soit  $F_{2p}$  la série génératrice correspondante.

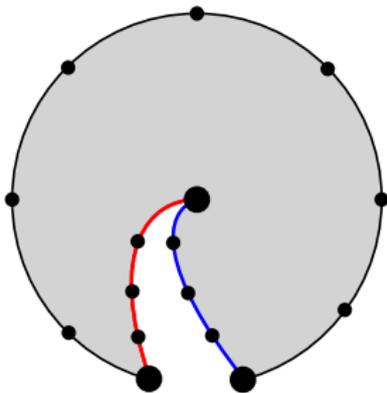
Comme avant, on ajoute un point marqué :

$$F_{2p}^\bullet = \frac{d}{dt} F_{2p}.$$

En découpant le long de la géodésique gauche du coin-racine au point marqué, on obtient une tranche composite de largeur  $2p$  et d'inclinaison nulle.

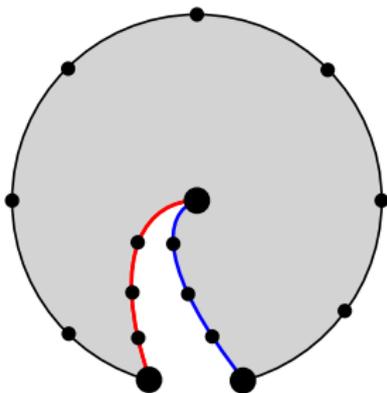
On en déduit

$$F_{2p}^\bullet = \binom{2p}{p} R^p.$$



On veut à présent compter les cartes avec un bord de longueur  $2p$  prescrite (ici  $2p = 8$ ). Soit  $F_{2p}$  la série génératrice correspondante.

Comme avant, on ajoute un point marqué :



$$F_{2p}^\bullet = \frac{d}{dt} F_{2p}.$$

En découpant le long de la géodésique gauche du coin-racine au point marqué, on obtient une tranche composite de largeur  $2p$  et d'inclinaison nulle.

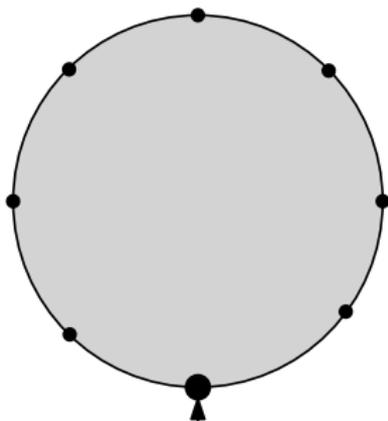
On en déduit

$$F_{2p}^\bullet = \binom{2p}{p} R^p.$$

Une variante, présentée dans le mémoire, permet de compter les cartes **annulaires** (avec deux faces marquées). Il faut considérer des tranches composites d'inclinaison quelconque non nulle.

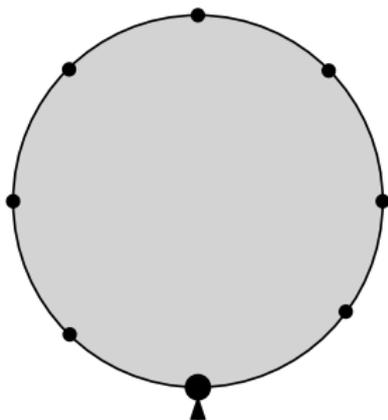
De l'expression  $F_{2p}^\bullet = \binom{2p}{p} R^p$  on obtient  $F_{2p}$  par intégration.

$$F_{2p} = \int F_{2p}^\bullet dt$$

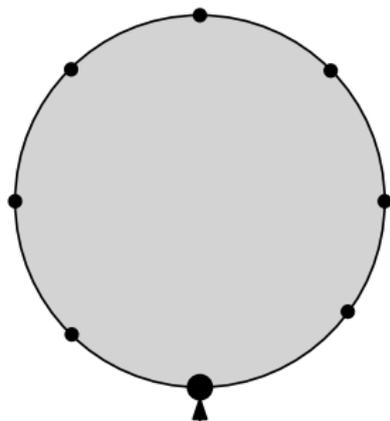


De l'expression  $F_{2p}^\bullet = \binom{2p}{p} R^p$  on obtient  $F_{2p}$  par intégration.

$$F_{2p} = \int F_{2p}^\bullet dt \quad \text{or } t = R - \sum_{k \geq 1} g_{2k} \binom{2k-1}{k} R^k$$

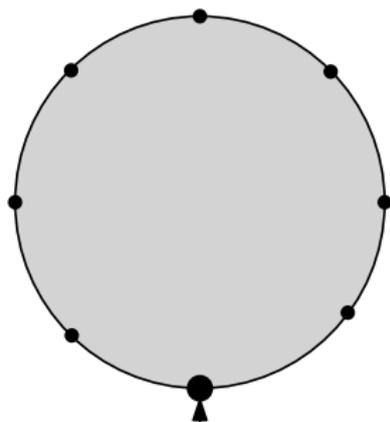


De l'expression  $F_{2p}^\bullet = \binom{2p}{p} R^p$  on obtient  $F_{2p}$  par intégration.



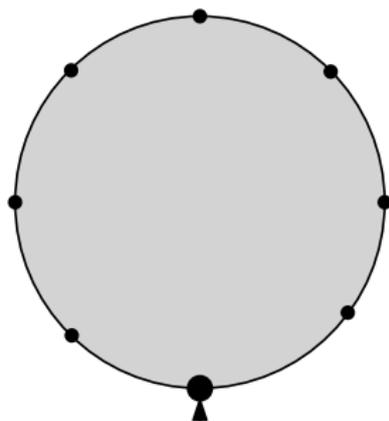
$$\begin{aligned}
 F_{2p} &= \int F_{2p}^\bullet dt & \text{or } t &= R - \sum_{k \geq 1} g_{2k} \binom{2k-1}{k} R^k \\
 &= \int \binom{2p}{p} R^p \left( 1 - \sum_{k \geq 1} g_{2k} \binom{2k-1}{k} k R^{k-1} \right) dR
 \end{aligned}$$

De l'expression  $F_{2p}^\bullet = \binom{2p}{p} R^p$  on obtient  $F_{2p}$  par intégration.



$$\begin{aligned}
 F_{2p} &= \int F_{2p}^\bullet dt \\
 &= \int \binom{2p}{p} R^p \left( 1 - \sum_{k \geq 1} g_{2k} \binom{2k-1}{k} k R^{k-1} \right) dR \\
 &= \text{Cat}(p) R^{p+1} - \sum_{k \geq 1} g_{2k} \frac{k}{k+p} \binom{2k-1}{k} \binom{2p}{p} R^{p+k}.
 \end{aligned}$$

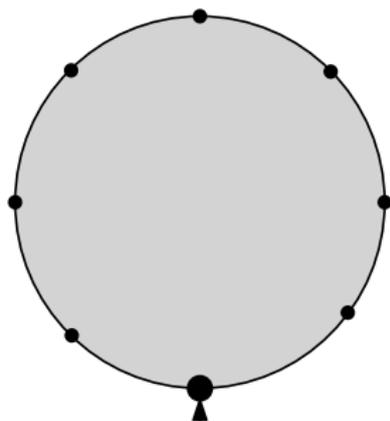
De l'expression  $F_{2p}^\bullet = \binom{2p}{p} R^p$  on obtient  $F_{2p}$  par intégration.



$$\begin{aligned}
 F_{2p} &= \int F_{2p}^\bullet dt \\
 &= \int \binom{2p}{p} R^p \left( 1 - \sum_{k \geq 1} g_{2k} \binom{2k-1}{k} k R^{k-1} \right) dR \\
 &= \text{Cat}(p) R^{p+1} - \sum_{k \geq 1} g_{2k} \frac{k}{k+p} \binom{2k-1}{k} \binom{2p}{p} R^{p+k}.
 \end{aligned}$$

On peut également obtenir cette formule par une preuve bijective (sans intégration) utilisant les tranches, voir [10, Section 3].

De l'expression  $F_{2p}^\bullet = \binom{2p}{p} R^p$  on obtient  $F_{2p}$  par intégration.



$$\begin{aligned}
 F_{2p} &= \int F_{2p}^\bullet dt \\
 &= \int \binom{2p}{p} R^p \left( 1 - \sum_{k \geq 1} g_{2k} \binom{2k-1}{k} k R^{k-1} \right) dR \\
 &= \text{Cat}(p) R^{p+1} - \sum_{k \geq 1} g_{2k} \frac{k}{k+p} \binom{2k-1}{k} \binom{2p}{p} R^{p+k}.
 \end{aligned}$$

On peut également obtenir cette formule par une preuve bijective (sans intégration) utilisant les tranches, voir [10, Section 3].

Si on forme la série génératrice  $F(z) = \sum_{p=0}^{\infty} F_{2p} z^p$ , on retrouve la «solution à une coupure du modèle à une matrice».

# La série des cartes à bord

Cette série génératrice  $F(z) = \sum_{p=0}^{\infty} F_{2p} z^p$  des cartes à bord joue un rôle fondamental dans la théorie énumérative des cartes.

# La série des cartes à bord

Cette série génératrice  $F(z) = \sum_{p=0}^{\infty} F_{2p}z^p$  des cartes à bord joue un rôle fondamental dans la théorie énumérative des cartes.

Elle apparaît sous différentes manières dans plusieurs de mes travaux sur les cartes :

- développement en fraction continue de  $F(z)$   
→ **fonction à deux points des cartes de Boltzmann** (chapitre 1),
- imposer certaines contraintes sur les premiers coefficients  $F_{2p}$   
→ **cartes irréductibles** (chapitre 2),
- équations de point fixes autour de  $(g_2, g_4, g_6 \dots) \mapsto (F_2, F_4, F_6 \dots)$   
→ **modèle de boucles  $O(n)$  sur les cartes aléatoires** (chapitre 3).

## Théorème (B.-Gitter [10], section 1.4 du mémoire)

On a  $F(z) = \frac{1}{1 - \frac{z R_1}{1 - \frac{z R_2}{1 - \dots}}}$  où  $(R_d)_{d \geq 1}$  est la **fonction à deux points**.

## Théorème (B.-Gitter [16], section 2.3 du mémoire)

Fixons un entier  $b \geq 0$ . Si on impose  $F_{2p} = \text{Cat}(2p) + u\delta_{p,b}$  ( $1 \leq p \leq b$ ) alors  $F_{2p}$  est la série des **cartes  $2b$ -irréductibles** à bord de longueur  $2p$ .

## Théorème (Borot-B.-Gitter [12], section 3.2 du mémoire)

Pour  $n, g, h \geq 0$ , si on impose  $g_{2k} = g\delta_{2k,4} + nh^{2k}F_{2k}(g_2, g_4, \dots)$  ( $k \geq 1$ ) alors  $F_{2p}$  est la fonction de partition du **modèle de boucles  $O(n)$  rigide** sur les quadrangulations à bord de longueur  $2p$ .

# Plan

## 1 Introduction

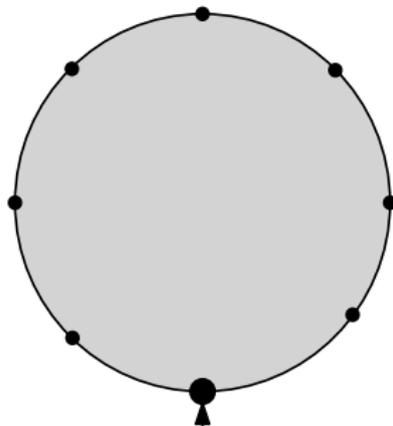
## 2 Quelques aspects des cartes planaires

- Motivations, définitions
- Décomposition en tranches
- **Fractions continues**
- Cartes irréductibles
- Modèle de boucles  $O(n)$
- Perspectives

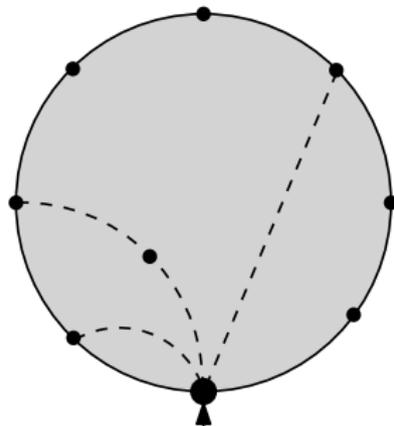
## 3 Partitions aléatoires et processus de Schur

- Pavages pentus et gares de triage
- Fermions libres
- Perspectives

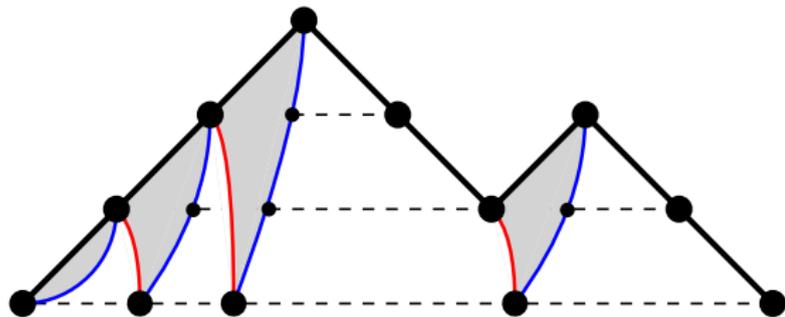
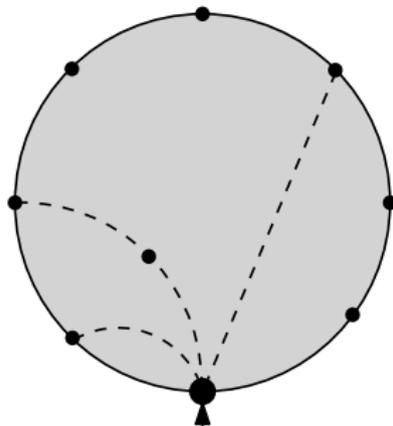
Considérons une carte à bord



Considérons une carte à bord et appliquons lui une décomposition en tranches «naïve».



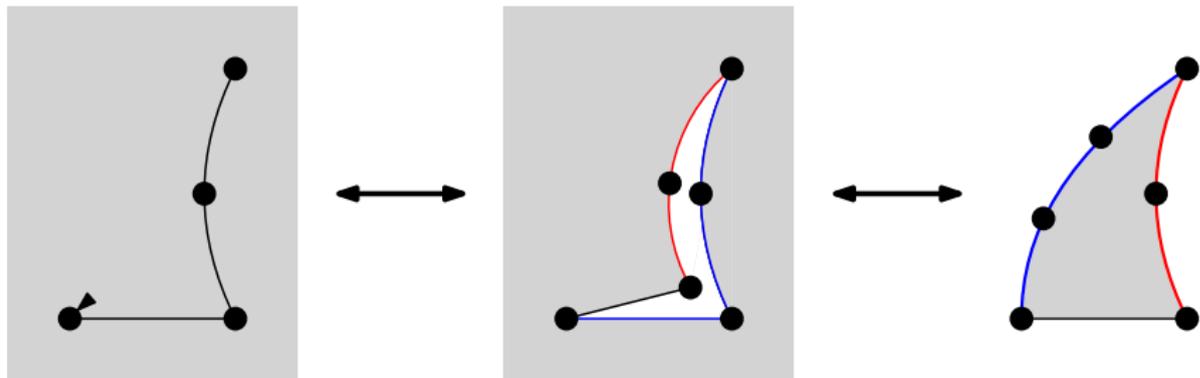
Considérons une carte à bord et appliquons lui une décomposition en tranches «naïve». (Attention dessin tourné de  $180^\circ$  par rapport aux précédents!)



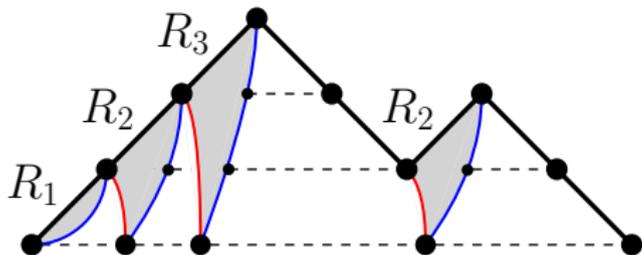
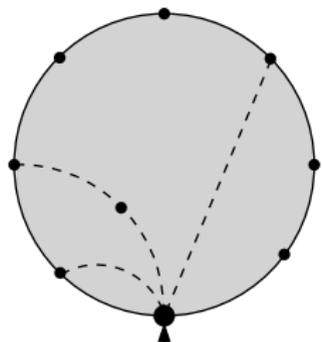
Les tranches élémentaires obtenues ont des profondeurs contraintes. Plus précisément, les distances des sommets du bord à la racine forment un chemin de Dyck, et à chaque montée de celui-ci est associée une tranche élémentaire de profondeur au plus égale à la hauteur du point d'arrivée.

On note  $R_d$  la série génératrice des tranches élémentaires d'inclinaison  $+1$  et de profondeur au plus  $d$ . Formellement, on a  $R = \lim_{d \rightarrow \infty} R_d$ .

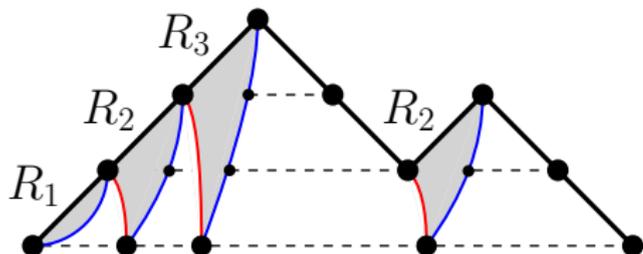
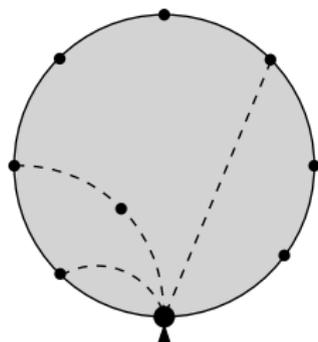
On note  $R_d$  la série génératrice des tranches élémentaires d'inclinaison  $+1$  et de profondeur au plus  $d$ . Formellement, on a  $R = \lim_{d \rightarrow \infty} R_d$ .



Par une construction vue précédemment,  $R_d$  est aussi la série génératrice des cartes pointées enracinées où coin et sommet marqués sont à distance au plus  $d$ . Cette quantité est appelée **fonction à deux points**.



Compter les cartes à bord revient à compter les chemins de Dyck avec un poids  $R_d$  par montée arrivant à la hauteur  $d$ .



Compter les cartes à bord revient à compter les chemins de Dyck avec un poids  $R_d$  par montée arrivant à la hauteur  $d$ .

Par un argument combinatoire classique, on en déduit que la série  $F(z)$  des cartes à bord a le développement en fraction continue (ici on prend  $t = 1$ )

$$F(z) = \frac{1}{1 - \frac{z R_1}{1 - \frac{z R_2}{1 - \ddots}}}$$

On peut déterminer le développement en fraction continue de  $F(z)$  à partir de celui en série formelle

$$F(z) = \sum_{p \geq 0} F_{2p} z^p.$$

Pour cela, il faut considérer les **déterminants de Hankel**

$$h_n^{(0)} = \det_{0 \leq i, j \leq n} F_{2(i+j)} \quad h_n^{(1)} = \det_{0 \leq i, j \leq n} F_{2(i+j+1)}$$

et on a alors

$$R_{2n+1} = \frac{h_n^{(1)} / h_{n-1}^{(1)}}{h_n^{(0)} / h_{n-1}^{(0)}} \quad R_{2n+2} = \frac{h_{n+1}^{(0)} / h_n^{(0)}}{h_n^{(1)} / h_{n-1}^{(1)}} \quad (n \geq 0)$$

où par convention  $h_{-1}^{(0)} = h_{-1}^{(1)} = 1$ .

En utilisant l'expression connue pour la série génératrice  $F_{2p}$  des cartes à bord de longueur  $2p$ , on peut, après quelques manipulations de déterminants et autres réécritures, aboutir à la forme générale de la fonction à deux points

$$R_d = R \frac{u_d u_{d+3}}{u_{d+1} u_{d+2}}$$

où, sous hypothèse de degrés bornés,  $u_d$  peut être identifié à une fonction de Schur symplectique ou orthogonale (selon la parité).

Ceci prouve une formule que nous avons conjecturée avec P. Di Francesco et E. Guitter en 2003, notre motivation étant alors l'étude des distances dans les cartes aléatoires (voir chapitre 1 du mémoire).

# Plan

## 1 Introduction

## 2 Quelques aspects des cartes planaires

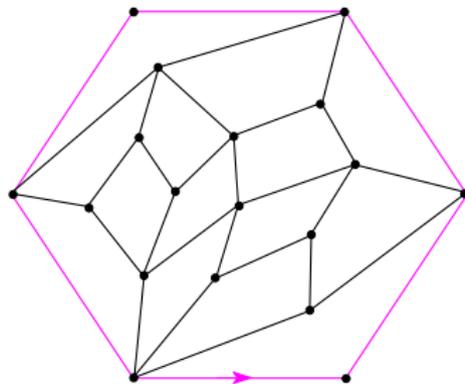
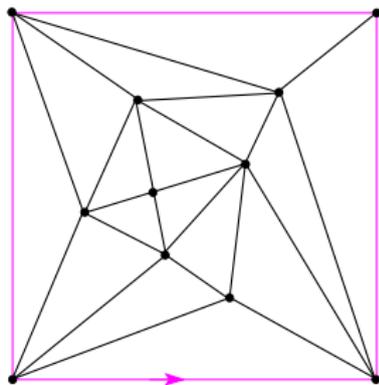
- Motivations, définitions
- Décomposition en tranches
- Fractions continues
- **Cartes irréductibles**
- Modèle de boucles  $O(n)$
- Perspectives

## 3 Partitions aléatoires et processus de Schur

- Pavages pentus et gares de triage
- Fermions libres
- Perspectives

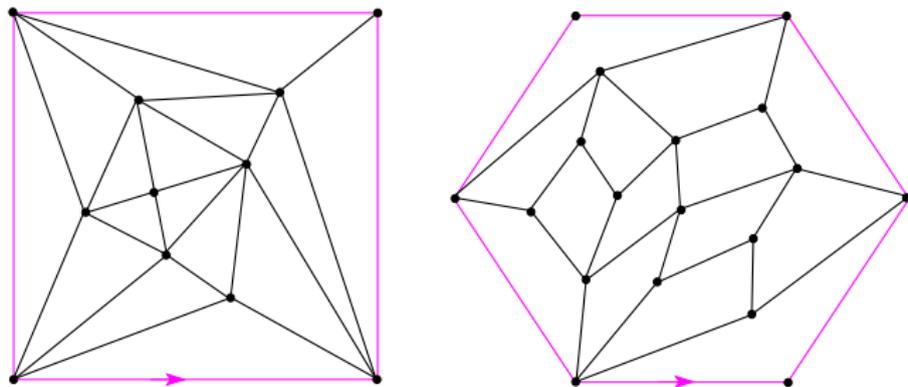
## Cartes irréductibles

Soit un entier  $d \geq 0$ . On dit qu'une carte à bord est  **$d$ -irréductible** si elle ne contient aucun cycle de longueur strictement inférieure à  $d$ , et si tout cycle de longueur  $d$  est le contour d'une face interne.



## Cartes irréductibles

Soit un entier  $d \geq 0$ . On dit qu'une carte à bord est  **$d$ -irréductible** si elle ne contient aucun cycle de longueur strictement inférieure à  $d$ , et si tout cycle de longueur  $d$  est le contour d'une face interne.



- quadrangulations (4-)irréductibles  $\leftrightarrow$  graphes planaires 3-connexes
- motivations algorithmiques (voir Fusy *et al.*)
- orientations et «canevas bijectif» (Schaeffer, Bernardi, Fusy, Albenque, Poulalhon)

Comment énumérer les cartes  $d$ -irréductibles? ( $d = 2b$  dans le cas biparti)

Comment énumérer les cartes  $d$ -irréductibles? ( $d = 2b$  dans le cas biparti)

- **Approche par substitution/renormalisation** : on «résout» le système

$$F_{2p}(g_2, g_4, g_6, \dots) = \begin{cases} \text{Cat}(2p) & \text{pour } p = 1, \dots, b-1 \\ \text{Cat}(2b) + u & \text{pour } p = b \end{cases}$$

en  $g_2, \dots, g_{2b}$ , qui deviennent des séries en  $u$  (poids des  $2b$ -gones),  $g_{2b+2}, g_{2b+4}, \dots$  (poids non modifiés des faces de plus grand degré). Avec cela,  $F_{2p}$  est égal à la série des cartes  $2b$ -irréductibles à bord de longueur  $2p$ , pour tout  $p$ .

Comment énumérer les cartes  $d$ -irréductibles? ( $d = 2b$  dans le cas biparti)

- **Approche par substitution/renormalisation** : on «résout» le système

$$F_{2p}(g_2, g_4, g_6, \dots) = \begin{cases} \text{Cat}(2p) & \text{pour } p = 1, \dots, b-1 \\ \text{Cat}(2b) + u & \text{pour } p = b \end{cases}$$

en  $g_2, \dots, g_{2b}$ , qui deviennent des séries en  $u$  (poids des  $2b$ -gones),  $g_{2b+2}, g_{2b+4}, \dots$  (poids non modifiés des faces de plus grand degré). Avec cela,  $F_{2p}$  est égal à la série des cartes  $2b$ -irréductibles à bord de longueur  $2p$ , pour tout  $p$ .

- **Approche bijective** : adaptation de la décomposition en tranches, en introduisant la notion de *quasi-tranche* nécessaire pour donner une décomposition récursive des tranches élémentaires.  
(Question ouverte : lien avec les autres approches bijectives?)

Comment énumérer les cartes  $d$ -irréductibles? ( $d = 2b$  dans le cas biparti)

- **Approche par substitution/renormalisation** : on «résout» le système

$$F_{2p}(g_2, g_4, g_6, \dots) = \begin{cases} \text{Cat}(2p) & \text{pour } p = 1, \dots, b-1 \\ \text{Cat}(2b) + u & \text{pour } p = b \end{cases}$$

en  $g_2, \dots, g_{2b}$ , qui deviennent des séries en  $u$  (poids des  $2b$ -gones),  $g_{2b+2}, g_{2b+4}, \dots$  (poids non modifiés des faces de plus grand degré). Avec cela,  $F_{2p}$  est égal à la série des cartes  $2b$ -irréductibles à bord de longueur  $2p$ , pour tout  $p$ .

- **Approche bijective** : adaptation de la décomposition en tranches, en introduisant la notion de *quasi-tranche* nécessaire pour donner une décomposition récursive des tranches élémentaires.  
(Question ouverte : lien avec les autres approches bijectives?)

Voir la section 2.3 du mémoire et l'article [16] pour plus de détails.

# Plan

## 1 Introduction

## 2 Quelques aspects des cartes planaires

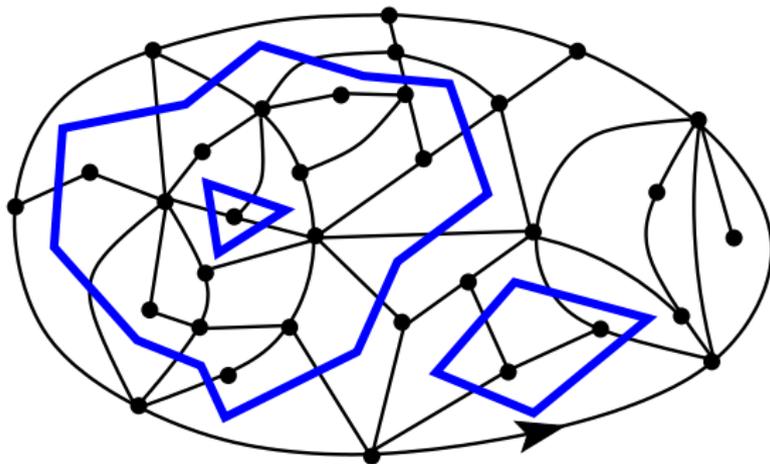
- Motivations, définitions
- Décomposition en tranches
- Fractions continues
- Cartes irréductibles
- **Modèle de boucles  $O(n)$**
- Perspectives

## 3 Partitions aléatoires et processus de Schur

- Pavages pentus et gares de triage
- Fermions libres
- Perspectives

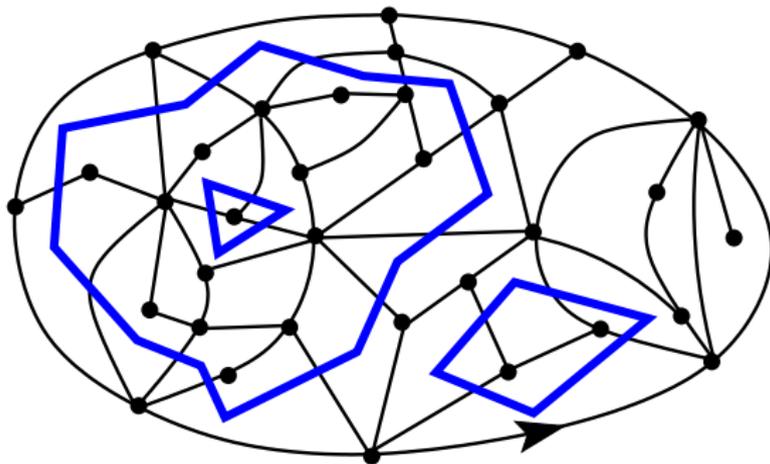
## Modèle de boucles $O(n)$ sur les cartes planaires

On considère à présent des cartes décorées par des boucles (cycles disjoints sur la carte duale). On attache un poids non local  $n$  à chaque boucle.



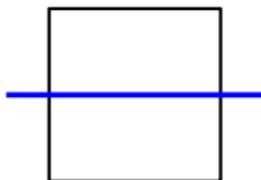
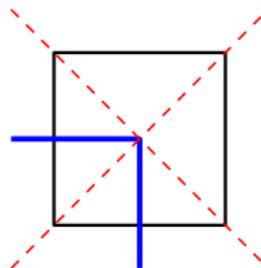
## Modèle de boucles $O(n)$ sur les cartes planaires

On considère à présent des cartes décorées par des boucles (cycles disjoints sur la carte duale). On attache un poids non local  $n$  à chaque boucle.

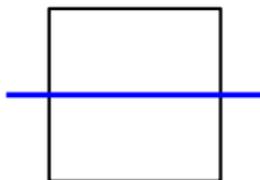
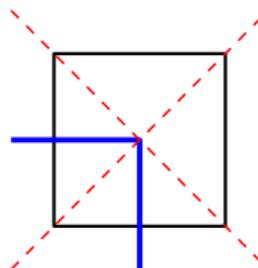


Un modèle bien connu en physique statistique (et lié au modèle de Potts), au riche comportement critique...

Il existe plusieurs versions de ce modèle, une des plus simples à analyser est le modèle **rigide** sur les quadrangulations, avec trois paramètres  $n, g, h$ .

 $g$  $h$ 

Il existe plusieurs versions de ce modèle, une des plus simples à analyser est le modèle **rigide** sur les quadrangulations, avec trois paramètres  $n, g, h$ .

 $g$  $h$ 

### Théorème (Borot, B., Guitter [12])

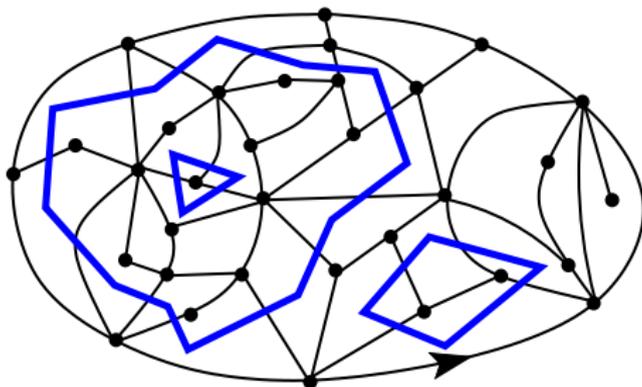
Soit  $F_{2p}(g_2, g_4, \dots)$  la série des cartes de Boltzmann à bord de longueur  $2p$ . Alors la condition de **point fixe**

$$g_{2k} = g\delta_{2k,4} + nh^{2k}F_{2k}(g_2, g_4, \dots) \quad (k \geq 1)$$

détermine les fonctions de partitions du modèle rigide sur les cartes à bord.

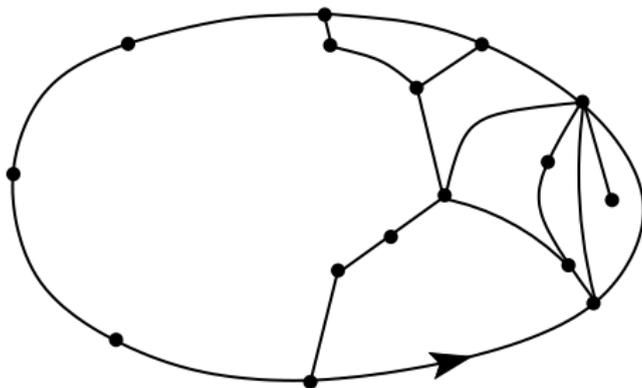
## Idée de preuve

Partant d'une quadrangulation à bord munie de boucles, on considère la **carte externe** (*gasket*) formée des arêtes extérieures à toutes les boucles.



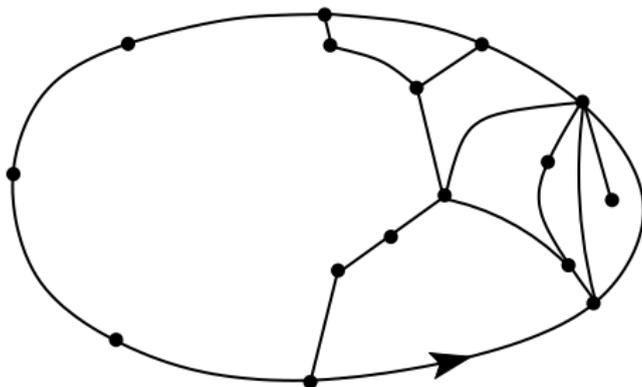
## Idée de preuve

Partant d'une quadrangulation à bord munie de boucles, on considère la **carte externe** (*gasket*) formée des arêtes extérieures à toutes les boucles.



## Idée de preuve

Partant d'une quadrangulation à bord munie de boucles, on considère la **carte externe (gasket)** formée des arêtes extérieures à toutes les boucles.



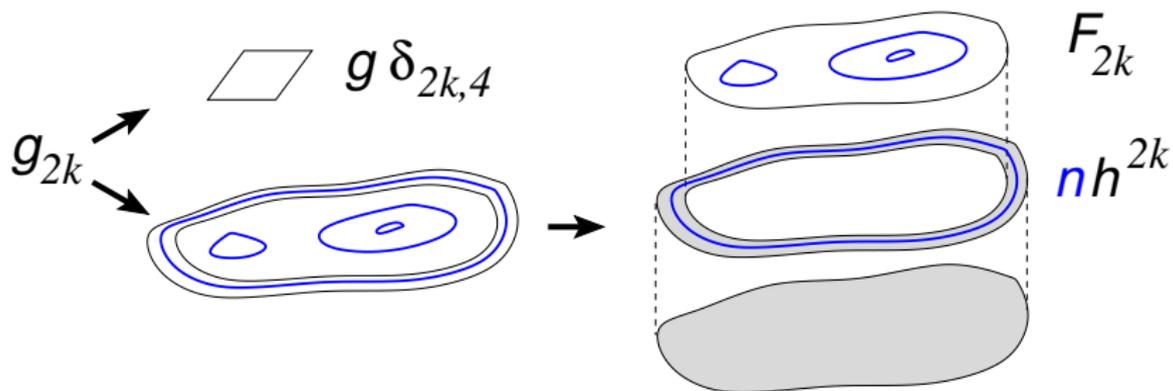
Il s'agit d'une carte de Boltzmann, où le poids par face de degré  $2k$

$$g_{2k} = g\delta_{2k,4} + nh^{2k}F_{2k}(g_2, g_4, \dots)$$

est la somme sur toutes les manières de revenir à une carte à boucles.

## Idée de preuve

Partant d'une quadrangulation à bord munie de boucles, on considère la **carte externe** (*gasket*) formée des arêtes extérieures à toutes les boucles.



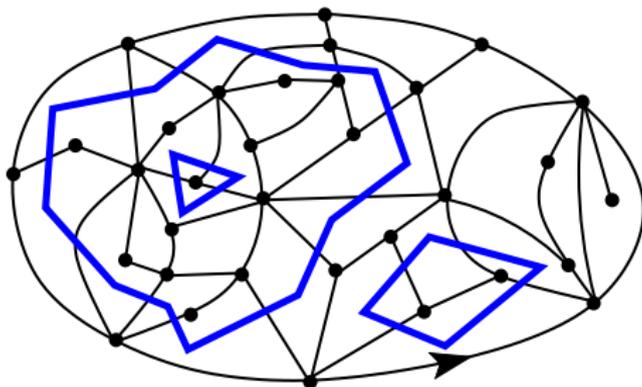
Il s'agit d'une carte de Boltzmann, où le poids par face de degré  $2k$

$$g_{2k} = g\delta_{2k,4} + nh^{2k}F_{2k}(g_2, g_4, \dots)$$

est la somme sur toutes les manières de revenir à une carte à boucles.

## Idée de preuve

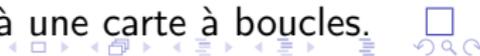
Partant d'une quadrangulation à bord munie de boucles, on considère la **carte externe (gasket)** formée des arêtes extérieures à toutes les boucles.



Il s'agit d'une carte de Boltzmann, où le poids par face de degré  $2k$

$$g_{2k} = g\delta_{2k,4} + nh^{2k}F_{2k}(g_2, g_4, \dots)$$

est la somme sur toutes les manières de revenir à une carte à boucles.



La condition de point fixe

$$g_{2k} = g\delta_{2k,4} + nh^{2k}F_{2k}(g_2, g_4, \dots) \quad (k \geq 1)$$

peut être traduite en une équation fonctionnelle pour la série  $F(z)$ ,

## La condition de point fixe

$$g_{2k} = g\delta_{2k,4} + nh^{2k}F_{2k}(g_2, g_4, \dots) \quad (k \geq 1)$$

peut être traduite en une équation fonctionnelle pour la série  $F(z)$ , qui peut elle-même être résolue en adaptant des techniques connues.

(Kostov, Gaudin, Eynard, J. Zinn-Justin, Kristjansen...)

## La condition de point fixe

$$g_{2k} = g\delta_{2k,4} + nh^{2k}F_{2k}(g_2, g_4, \dots) \quad (k \geq 1)$$

peut être traduite en une équation fonctionnelle pour la série  $F(z)$ , qui peut elle-même être résolue en adaptant des techniques connues.

(Kostov, Gaudin, Eynard, J. Zinn-Justin, Kristjansen...)

On peut ainsi déterminer exactement le diagramme de phase du modèle, et notamment montrer l'existence de **points critiques non génériques** pour  $n \in (0, 2)$ . Notre approche implique qu'à ces points, la carte externe a de «grandes faces» au sens de Le Gall et Miermont, et une limite d'échelle différente de la carte brownienne.

La condition de point fixe

$$g_{2k} = g\delta_{2k,4} + nh^{2k}F_{2k}(g_2, g_4, \dots) \quad (k \geq 1)$$

peut être traduite en une équation fonctionnelle pour la série  $F(z)$ , qui peut elle-même être résolue en adaptant des techniques connues.

(Kostov, Gaudin, Eynard, J. Zinn-Justin, Kristjansen...)

On peut ainsi déterminer exactement le diagramme de phase du modèle, et notamment montrer l'existence de **points critiques non génériques** pour  $n \in (0, 2)$ . Notre approche implique qu'à ces points, la carte externe a de «grandes faces» au sens de Le Gall et Miermont, et une limite d'échelle différente de la carte brownienne.

Notre approche peut être adaptée à des variantes du modèle [14,15] et, par un raffinement, nous pouvons étudier les statistiques d'emboîtements entre boucles [25]. Voir le chapitre 3 du mémoire pour plus de détails.

# Plan

## 1 Introduction

## 2 Quelques aspects des cartes planaires

- Motivations, définitions
- Décomposition en tranches
- Fractions continues
- Cartes irréductibles
- Modèle de boucles  $O(n)$
- Perspectives

## 3 Partitions aléatoires et processus de Schur

- Pavages pentus et gares de triage
- Fermions libres
- Perspectives

## Perspectives

Les propriétés des cartes décorées par des modèles de physique statistique, notamment aux points critiques non génériques qui conduisent à des limites d'échelle différentes de la carte brownienne, restent à mon sens encore assez peu comprises, même si des avancées ont été faites par l'«école de Boston» (voir les cartes décorées comme des marches 2D, approche par la gravité quantique de Liouville...).

# Perspectives

Les propriétés des cartes décorées par des modèles de physique statistique, notamment aux points critiques non génériques qui conduisent à des limites d'échelle différentes de la carte brownienne, restent à mon sens encore assez peu comprises, même si des avancées ont été faites par l'«école de Boston» (voir les cartes décorées comme des marches 2D, approche par la gravité quantique de Liouville...).

Quelques projets personnels :

- Décomposition en tranches des cartes eulériennes (Ising...)  
→ travail en cours avec M. Albenque
- Énumération des cartes eulériennes à bords alternants  
→ travail en cours avec A. Carrance
- Approche combinatoire au modèle à 6 vertex (+ G. Miermont)
- Décomposition en tranches et récurrence topologique
- ... (voir sections «perspectives» du mémoire)

# Plan

## 1 Introduction

## 2 Quelques aspects des cartes planaires

- Motivations, définitions
- Décomposition en tranches
- Fractions continues
- Cartes irréductibles
- Modèle de boucles  $O(n)$
- Perspectives

## 3 Partitions aléatoires et processus de Schur

- Pavages pentus et gares de triage
- Fermions libres
- Perspectives

# Plan

## 1 Introduction

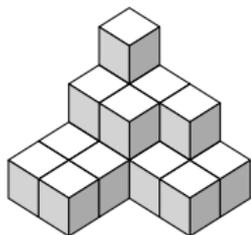
## 2 Quelques aspects des cartes planaires

- Motivations, définitions
- Décomposition en tranches
- Fractions continues
- Cartes irréductibles
- Modèle de boucles  $O(n)$
- Perspectives

## 3 Partitions aléatoires et processus de Schur

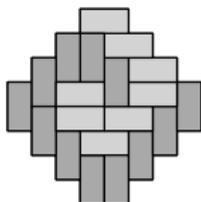
- Pavages pentus et gares de triage
- Fermions libres
- Perspectives

# Avant les pavages pentus : quelques $q$ -séries remarquables



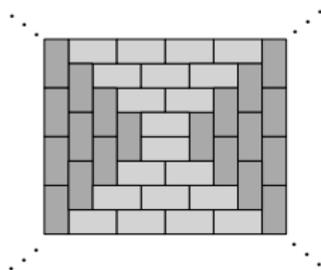
Partitions planes (MacMahon) :

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^k)^k}$$



Pavages du diamant aztèque (Elkies *et al.*) :

$$\prod_{k=1}^{\ell} (1 + q^{2k-1})^{\ell+1-k}$$

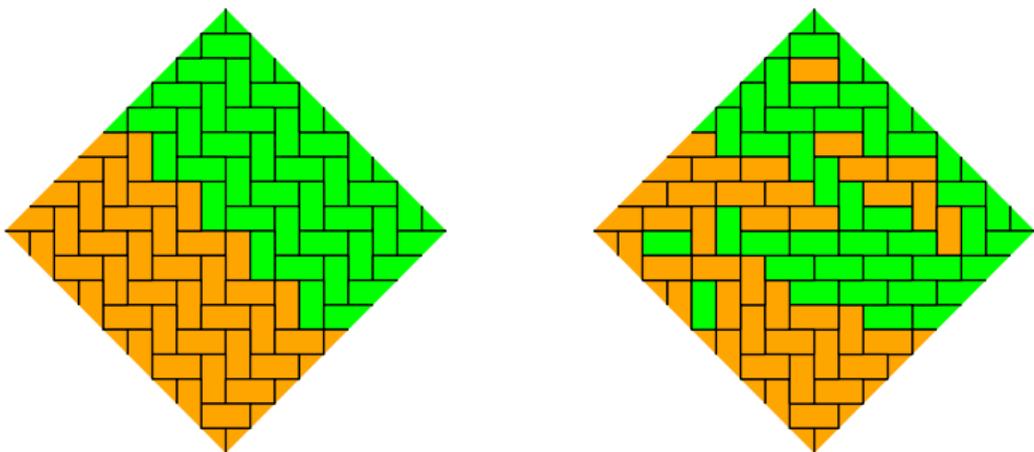


Partitions-pyramides (B. Young) :

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + q^{2k-1})^{2k-1}}{(1 - q^{2k})^{2k}}$$

Les **pavages pentus** permettent d'unifier ces différentes séries dans un cadre commun.

Les pavages pentus permettent d'unifier ces différentes séries dans un cadre commun.



Il s'agit de pavages du plan par des dominos, obtenus en effectuant un nombre fini de mouvements locaux (*flips*) à partir d'un pavage fondamental (représenté ici à gauche).

On associe à chaque domino un poids dépendant de son orientation et de la différence entre l'abscisse et l'ordonnée de son centre ( $x - y$ ).

Munis de tels poids, les pavages pentus appartient à la classe des **processus de Schur** (Okounkov, Reshetikhin).

Munis de tels poids, les pavages pentus appartient à la classe des **processus de Schur** (Okounkov, Reshetikhin). On peut les énumérer aisément par le formalisme des fermions libres [21] :

$$Z = \prod_{\substack{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \\ i < j}} \frac{\left(1 + u_{4i + \frac{1}{2}} u_{4j - \frac{1}{2}}\right) \left(1 + u_{4i + \frac{3}{2}} u_{4j - \frac{3}{2}}\right)}{\left(1 - u_{4i + \frac{1}{2}} u_{4j - \frac{3}{2}}\right) \left(1 - u_{4i + \frac{3}{2}} u_{4j - \frac{1}{2}}\right)}.$$

On retrouve les  $q$ -séries précédentes par de bons choix de paramètres.

Munis de tels poids, les pavages pentus appartient à la classe des **processus de Schur** (Okounkov, Reshetikhin). On peut les énumérer aisément par le formalisme des fermions libres [21] :

$$Z = \prod_{\substack{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \\ i < j}} \frac{\left(1 + u_{4i + \frac{1}{2}} u_{4j - \frac{1}{2}}\right) \left(1 + u_{4i + \frac{3}{2}} u_{4j - \frac{3}{2}}\right)}{\left(1 - u_{4i + \frac{1}{2}} u_{4j - \frac{3}{2}}\right) \left(1 - u_{4i + \frac{3}{2}} u_{4j - \frac{1}{2}}\right)}.$$

On retrouve les  $q$ -séries précédentes par de bons choix de paramètres.

On peut s'intéresser aussi aux **fonctions de corrélation**. Pour cela, il est commode de passer au langage dual des modèles de dimères, et d'introduire les graphes en **gare de triage** [24].

Munis de tels poids, les pavages pentus appartient à la classe des **processus de Schur** (Okounkov, Reshetikhin). On peut les énumérer aisément par le formalisme des fermions libres [21] :

$$Z = \prod_{\substack{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \\ i < j}} \frac{\left(1 + u_{4i + \frac{1}{2}} u_{4j - \frac{1}{2}}\right) \left(1 + u_{4i + \frac{3}{2}} u_{4j - \frac{3}{2}}\right)}{\left(1 - u_{4i + \frac{1}{2}} u_{4j - \frac{3}{2}}\right) \left(1 - u_{4i + \frac{3}{2}} u_{4j - \frac{1}{2}}\right)}.$$

On retrouve les  $q$ -séries précédentes par de bons choix de paramètres.

On peut s'intéresser aussi aux **fonctions de corrélation**. Pour cela, il est commode de passer au langage dual des modèles de dimères, et d'introduire les graphes en **gare de triage** [24].

On peut également considérer des pavages avec des conditions aux bords ouvertes ou périodiques : si les fonctions de partition correspondantes ont été données dans [21], les fonctions de corrélations ont été plus délicates à calculer...

# Plan

## 1 Introduction

## 2 Quelques aspects des cartes planaires

- Motivations, définitions
- Décomposition en tranches
- Fractions continues
- Cartes irréductibles
- Modèle de boucles  $O(n)$
- Perspectives

## 3 Partitions aléatoires et processus de Schur

- Pavages pentus et gares de triage
- **Fermions libres**
- Perspectives

Le formalisme des fermions libres permet d'exprimer les fonctions de corrélation sous la forme

$$\langle \Psi_1 \Psi_1^* \cdots \Psi_n \Psi_n^* \rangle$$

où les  $\Psi, \Psi^*$  sont des opérateurs de création/annihilation fermioniques, et  $\langle \cdot \rangle$  la valeur moyenne dans un certain état quantique.

Le formalisme des fermions libres permet d'exprimer les fonctions de corrélation sous la forme

$$\langle \Psi_1 \Psi_1^* \cdots \Psi_n \Psi_n^* \rangle$$

où les  $\Psi, \Psi^*$  sont des opérateurs de création/annihilation fermioniques, et  $\langle \cdot \rangle$  la valeur moyenne dans un certain état quantique.

Un état est dit **libre** (*quasi-free state*) si on a le lemme de Wick

$$\langle \Psi_1 \Psi_1^* \Psi_2 \Psi_2^* \rangle = \langle \Psi_1 \Psi_1^* \rangle \langle \Psi_2 \Psi_2^* \rangle - \langle \Psi_1 \Psi_2 \rangle \langle \Psi_1^* \Psi_2^* \rangle + \langle \Psi_1 \Psi_2^* \rangle \langle \Psi_1^* \Psi_2 \rangle.$$

Le processus de point correspondant est alors **pfaffien**.

Le formalisme des fermions libres permet d'exprimer les fonctions de corrélation sous la forme

$$\langle \Psi_1 \Psi_1^* \cdots \Psi_n \Psi_n^* \rangle$$

où les  $\Psi, \Psi^*$  sont des opérateurs de création/annihilation fermioniques, et  $\langle \cdot \rangle$  la valeur moyenne dans un certain état quantique.

Un état est dit **libre** (*quasi-free state*) si on a le lemme de Wick

$$\langle \Psi_1 \Psi_1^* \Psi_2 \Psi_2^* \rangle = \langle \Psi_1 \Psi_1^* \rangle \langle \Psi_2 \Psi_2^* \rangle - \langle \Psi_1 \Psi_2 \rangle \langle \Psi_1^* \Psi_2^* \rangle + \langle \Psi_1 \Psi_2^* \rangle \langle \Psi_1^* \Psi_2 \rangle.$$

Le processus de point correspondant est alors **pfaffien**.

Si, de plus, on a conservation de la charge ( $\langle \Psi_1 \Psi_2 \rangle = \langle \Psi_1^* \Psi_2^* \rangle = 0$ ),

Le formalisme des fermions libres permet d'exprimer les fonctions de corrélation sous la forme

$$\langle \Psi_1 \Psi_1^* \cdots \Psi_n \Psi_n^* \rangle$$

où les  $\Psi, \Psi^*$  sont des opérateurs de création/annihilation fermioniques, et  $\langle \cdot \rangle$  la valeur moyenne dans un certain état quantique.

Un état est dit **libre** (*quasi-free state*) si on a le lemme de Wick

$$\langle \Psi_1 \Psi_1^* \Psi_2 \Psi_2^* \rangle = \langle \Psi_1 \Psi_1^* \rangle \langle \Psi_2 \Psi_2^* \rangle + \langle \Psi_1 \Psi_2^* \rangle \langle \Psi_1^* \Psi_2 \rangle.$$

Le processus de point correspondant est alors **pfaffien**.

Si, de plus, on a conservation de la charge ( $\langle \Psi_1 \Psi_2 \rangle = \langle \Psi_1^* \Psi_2^* \rangle = 0$ ), alors le processus de point est **déterminantal**.

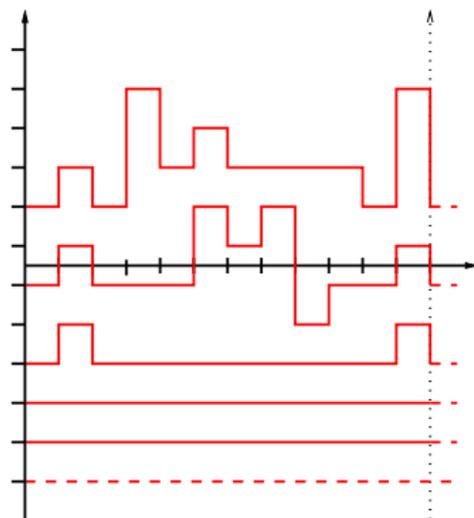
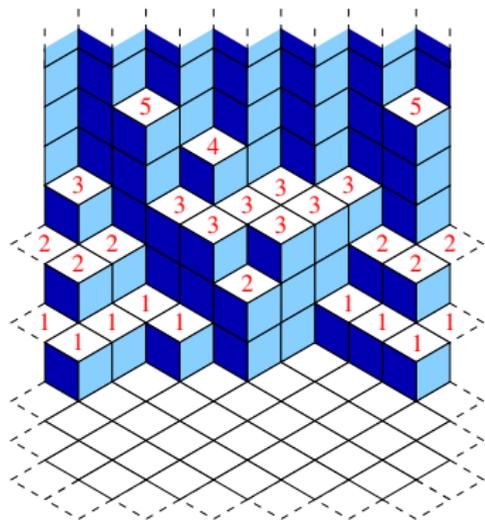
Dans le cas des processus de Schur, la difficulté est que, pour des conditions aux bords libres ou périodiques, l'état de charge nulle qu'on introduit a priori n'est pas libre.

Dans le cas des processus de Schur, la difficulté est que, pour des conditions aux bords libres ou périodiques, l'état de charge nulle qu'on introduit a priori n'est pas libre.

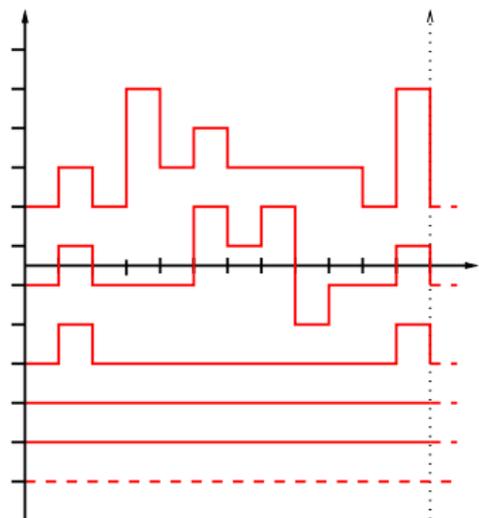
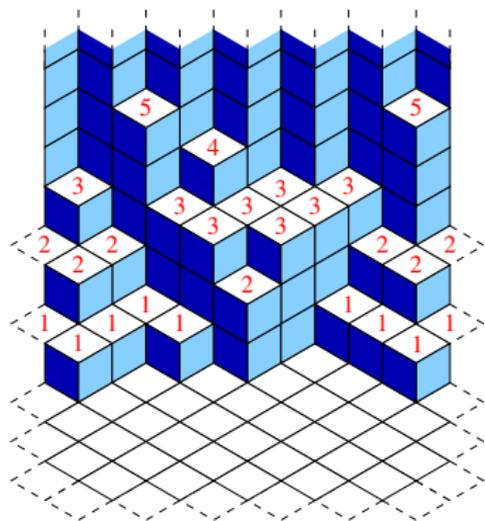
Il faut effectuer une transformation pour obtenir un état libre :

- dans le cas des conditions aux bords périodiques, il faut passer à l'**ensemble grand canonique** (la charge fluctue)  
→ on retrouve [27] les fonctions de corrélation du processus de Schur périodique précédemment calculées par Borodin
- dans le cas des conditions aux bords ouvertes, il faut effectuer une **transformation de Bogolioubov** (la charge n'est plus conservée)  
→ on obtient un nouveau processus pfaffien [26].

# Application : partitions cylindriques

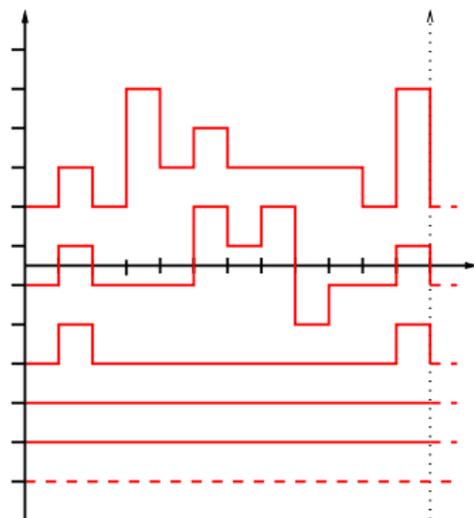
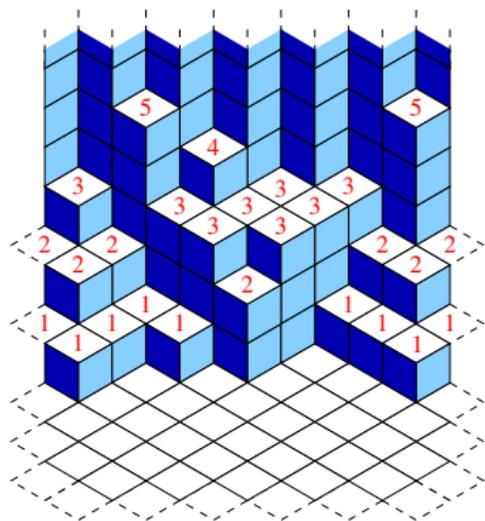


# Application : partitions cylindriques



Dans une certaine limite, on obtient le **processus de Plancherel cylindrique**. Au voisinage de la courbe arctique, ce processus converge [27] vers le processus d'Airy à température finie (Johansson, Le Doussal *et al.*).

# Application : partitions cylindriques



Dans une certaine limite, on obtient le **processus de Plancherel cylindrique**. Au voisinage de la courbe arctique, ce processus converge [27] vers le processus d'Airy à température finie (Johansson, Le Doussal *et al.*). Le cas des conditions aux bords ouvertes est l'objet d'un travail en cours.

# Plan

## 1 Introduction

## 2 Quelques aspects des cartes planaires

- Motivations, définitions
- Décomposition en tranches
- Fractions continues
- Cartes irréductibles
- Modèle de boucles  $O(n)$
- Perspectives

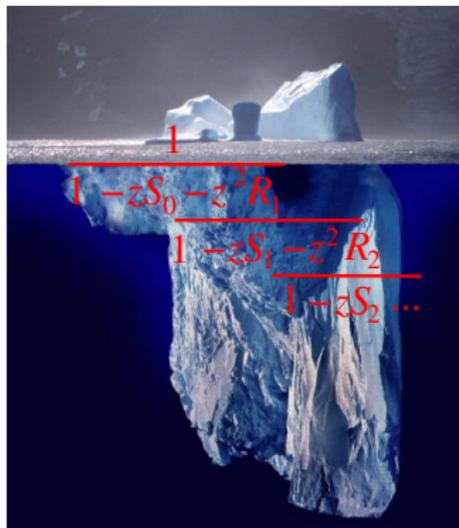
## 3 Partitions aléatoires et processus de Schur

- Pavages pentus et gares de triage
- Fermions libres
- Perspectives

# Perspectives

- Asymptotiques du processus de Schur ouvert, connexion avec l'équation de Kardar-Parisi-Zhang  
→ travail en cours avec D. Betea, P. Nejjar et M. Vuletić
- Processus de Schur multicritique et hiérarchie Painlevé II  
→ travail en cours avec H. Walsh et D. Betea
- Approche par les problèmes de Riemann-Hilbert  
→ voir Cafasso-Claeys, arXiv:1910.02493
- Modèles en interaction non déterminantaux (Macdonald)  
→ connexion avec le processus de  $q$ -Whittaker? (avec M. Wheeler)
- Lien avec les cartes et hiérarchies intégrables  
→ formes-limite dans les fonctions tau? (+ H. Walsh, G. Chapuy)  
→ cartes et revêtements ramifiés (Okounkov, M2 A. Caicedo)

Merci de votre attention !



(© E. Guitter)

