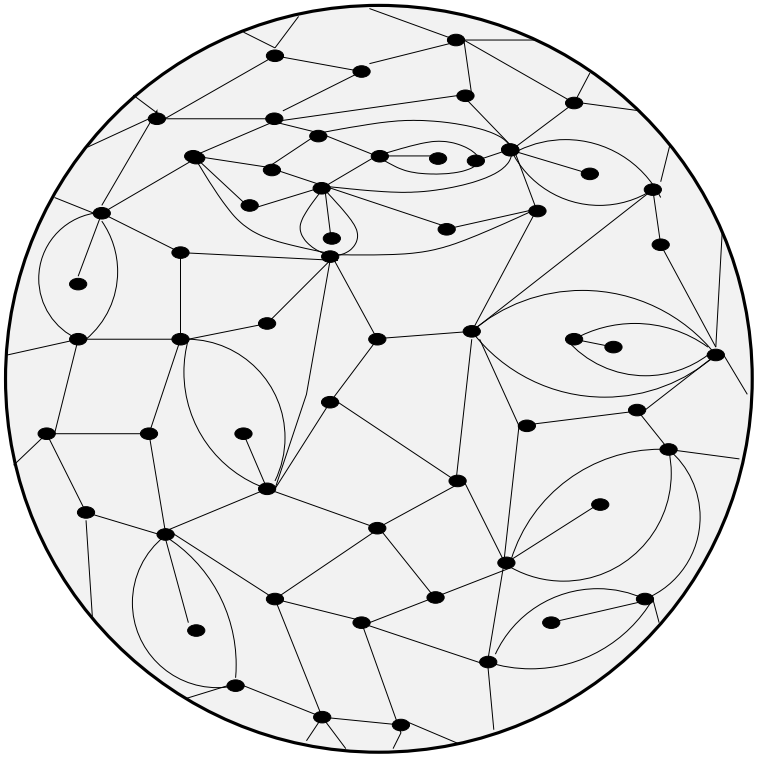
Quelques aspects des cartes aléatoires

Jérémie Bouttier, Emmanuel Guitter

Institut de physique théorique, CEA Saclay
Département de mathématiques et applications, ENS Paris

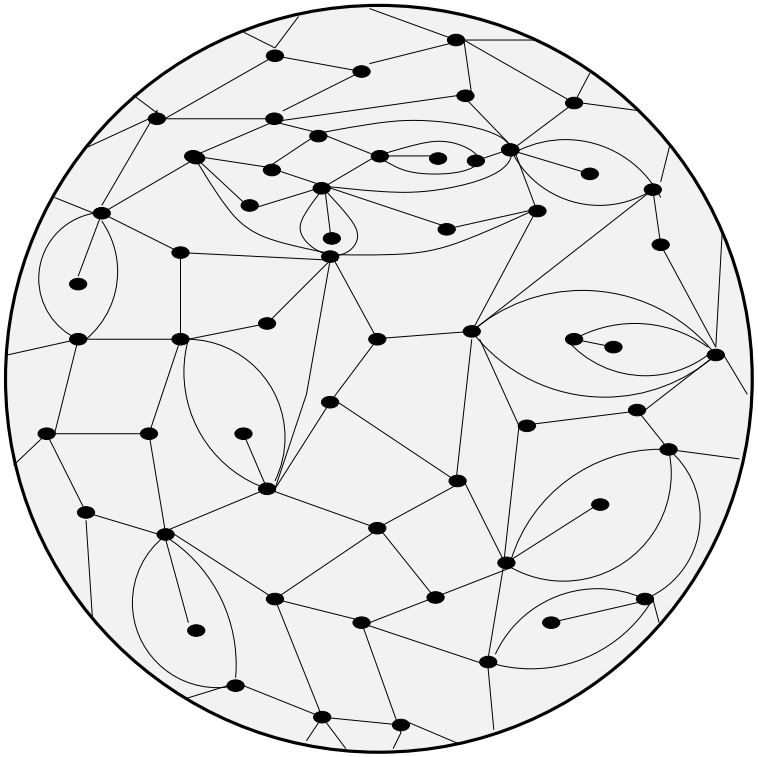
Journées de physique statistique, 31 janvier 2014

Des cartes ?

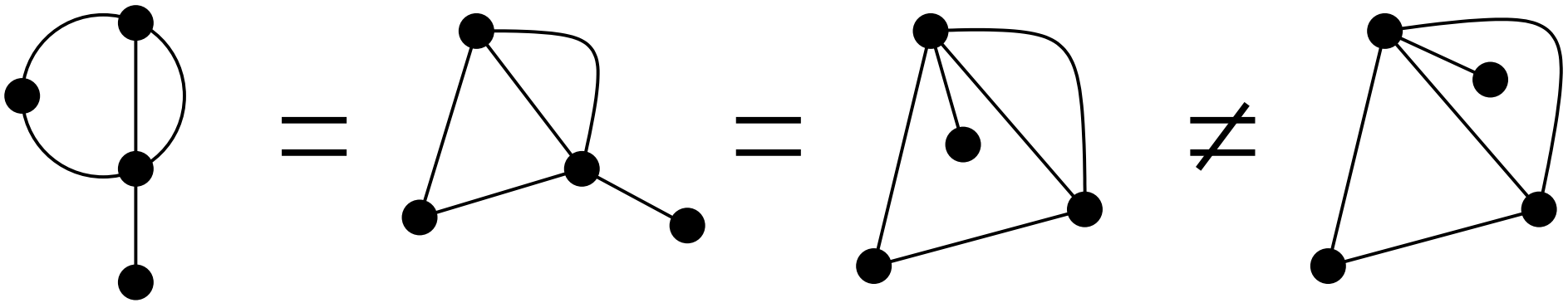


Une carte planaire est un réseau 2D irrégulier. Mathématiquement c'est un graphe dessiné dans la sphère sans croisement d'arêtes, considéré à déformation près. Une carte est formée de sommets, d'arêtes et de faces.

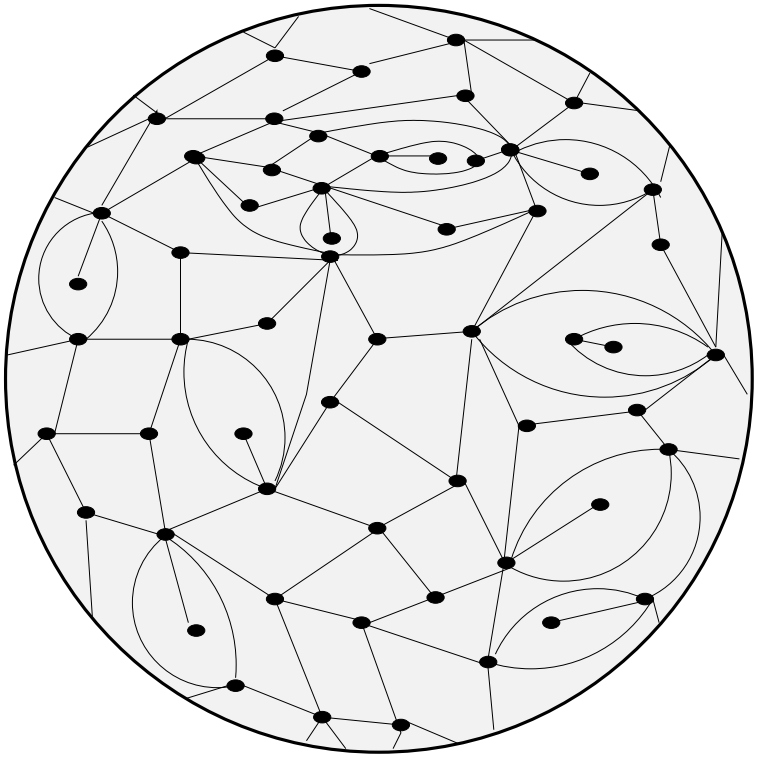
Des cartes ?



Une carte planaire est un réseau 2D irrégulier. Mathématiquement c'est un graphe dessiné dans la sphère sans croisement d'arêtes, considéré à déformation près. Une carte est formée de sommets, d'arêtes et de faces.

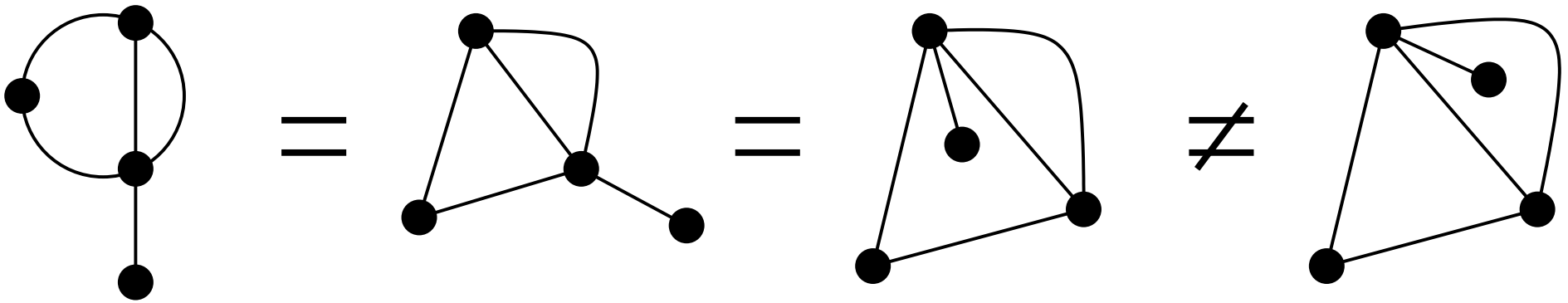


Des cartes ?



Une carte planaire est un réseau 2D irrégulier. Mathématiquement c'est un graphe dessiné dans la sphère sans croisement d'arêtes, considéré à déformation près. Une carte est formée de sommets, d'arêtes et de faces.

On s'intéressera particulièrement à certaines familles de cartes, comme les triangulations et quadrangulations, plus simples à étudier mais donnant accès à des propriétés universelles.



Quelques motivations

- Combinatoire (énumération, théorème des quatre couleurs)

Quelques motivations

- Combinatoire (énumération, théorème des quatre couleurs)
- Matrices aléatoires (développement topologique des intégrales matricielles)

Quelques motivations

- Combinatoire (énumération, théorème des quatre couleurs)
- Matrices aléatoires (développement topologique des intégrales matricielles)
- Gravité quantique bidimensionnelle (*"develop an art of handling sums over random surfaces"*)

. . .

Quelques motivations

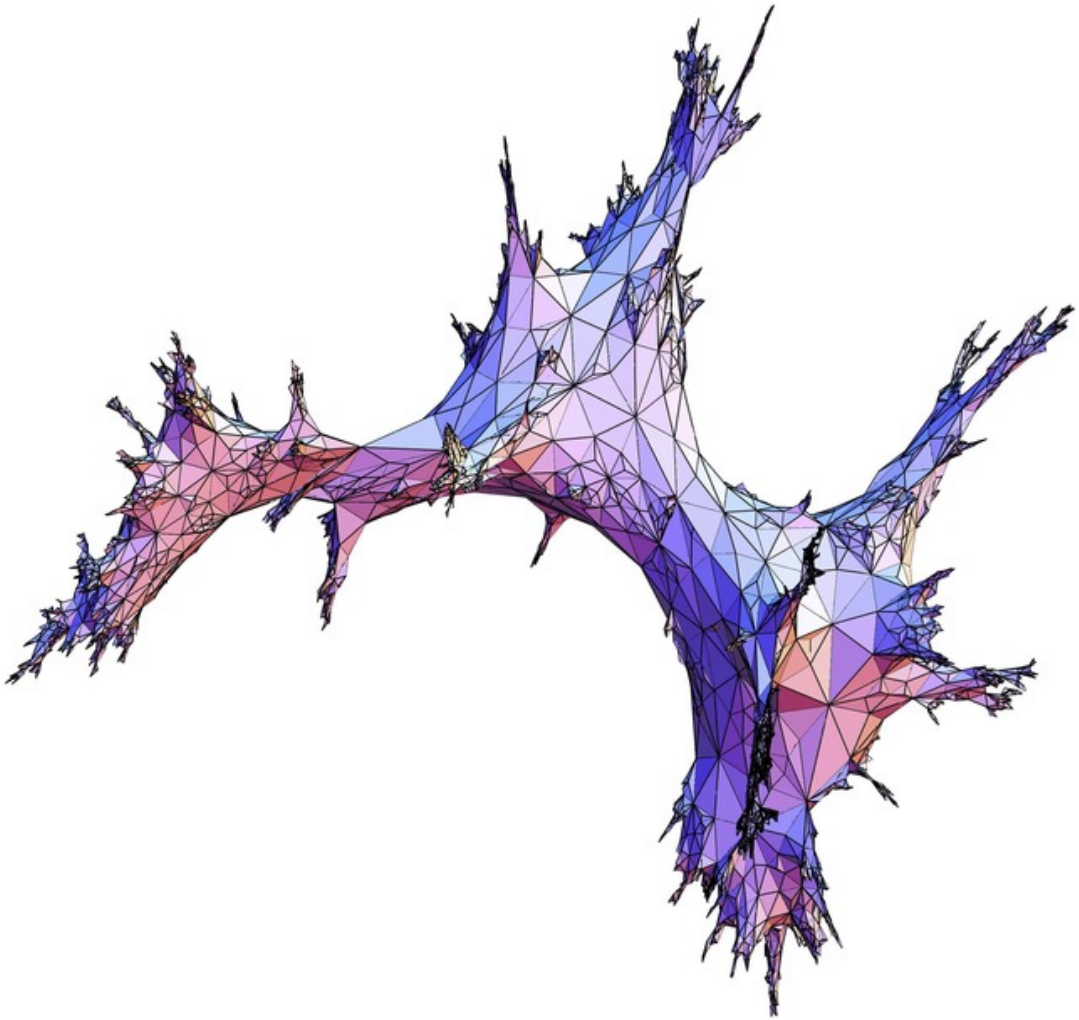
- Combinatoire (énumération, théorème des quatre couleurs)
- Matrices aléatoires (développement topologique des intégrales matricielles)
- Gravité quantique bidimensionnelle (*"develop an art of handling sums over random surfaces"*)
- Maths (géométrie algébrique, théorie des représentations...)

...

Quelques motivations

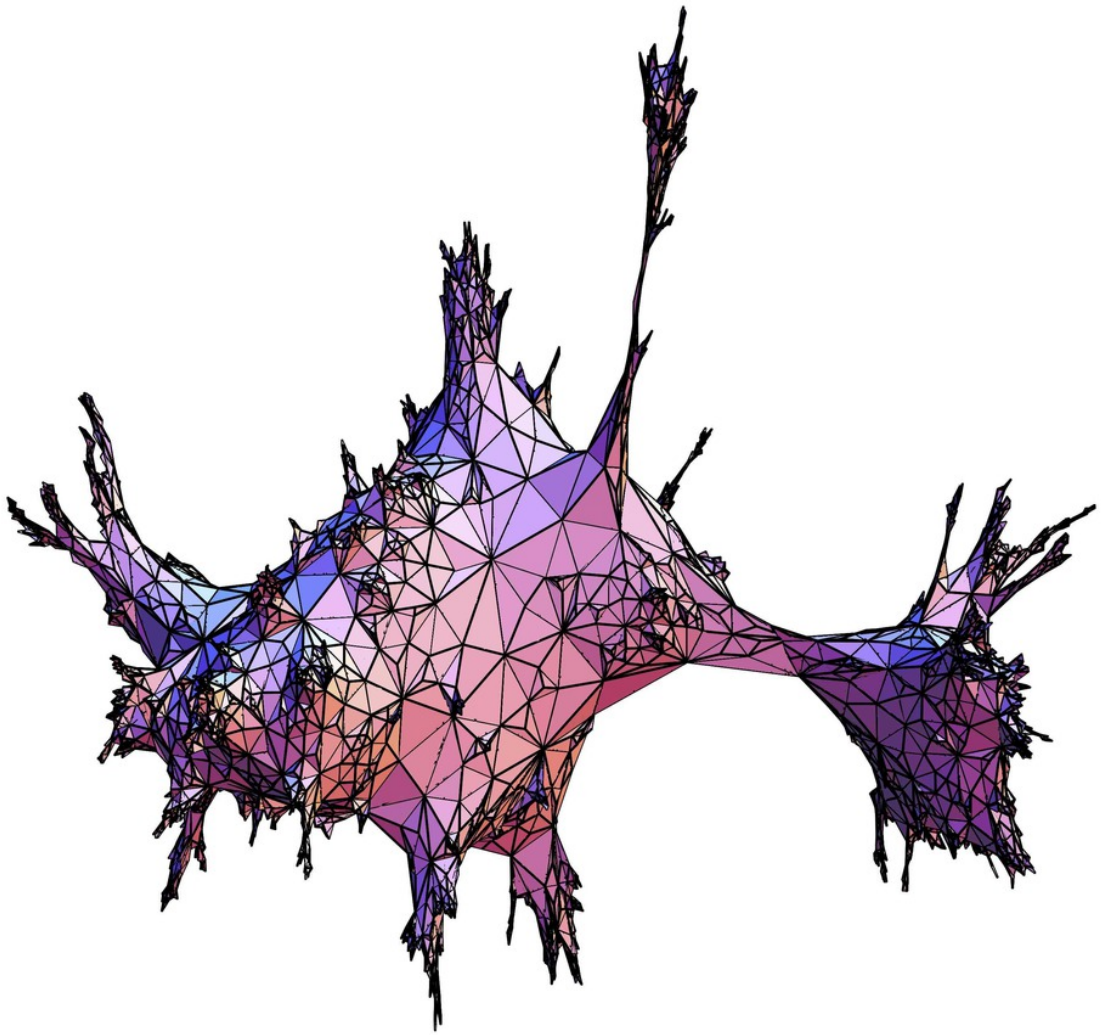
- Combinatoire (énumération, théorème des quatre couleurs)
- Matrices aléatoires (développement topologique des intégrales matricielles)
- Gravité quantique bidimensionnelle (*"develop an art of handling sums over random surfaces"*)
- Maths (géométrie algébrique, théorie des représentations...)
- Géométrie aléatoire

Géométrie aléatoire



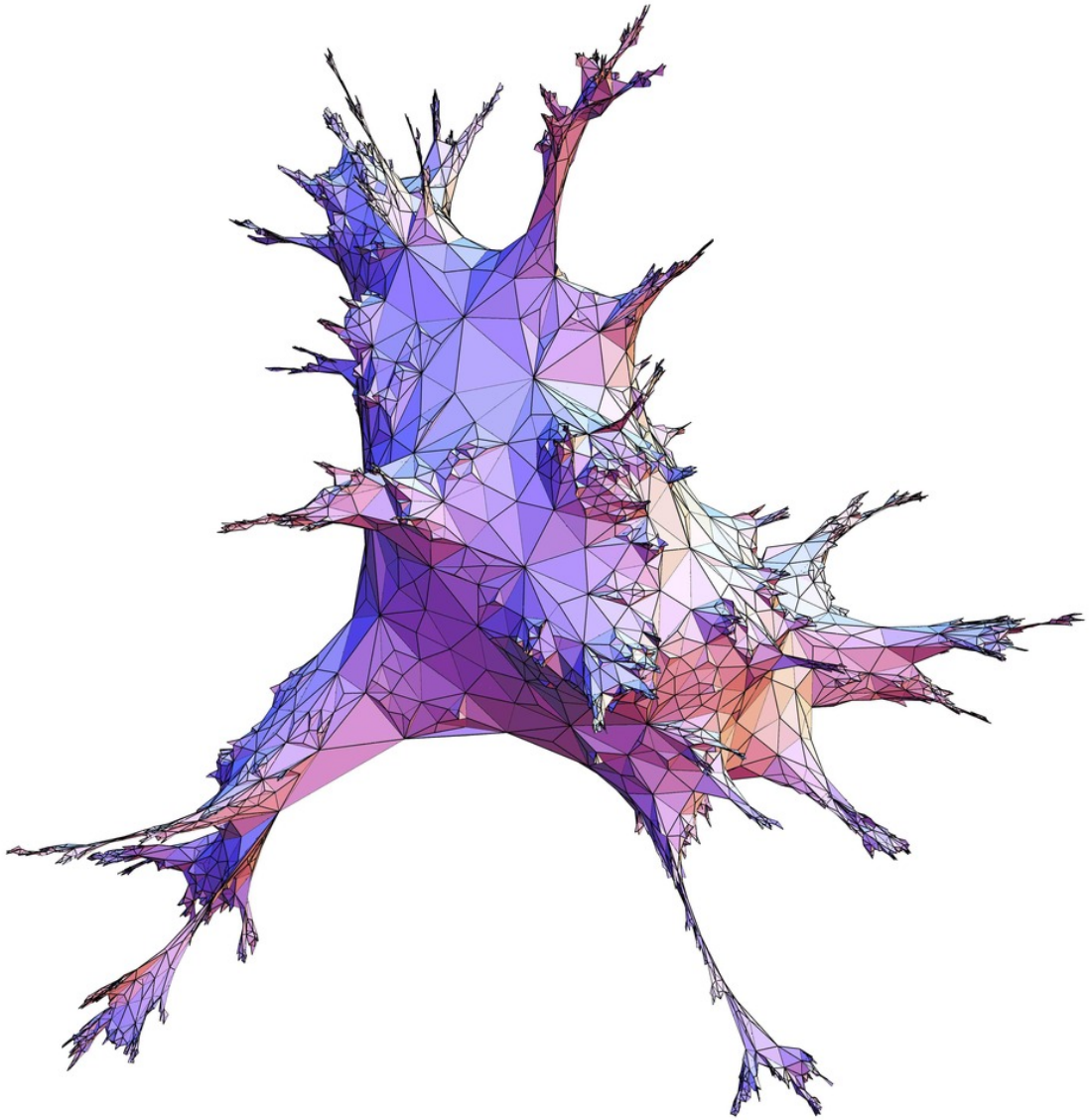
Images : Nicolas Curien

Géométrie aléatoire



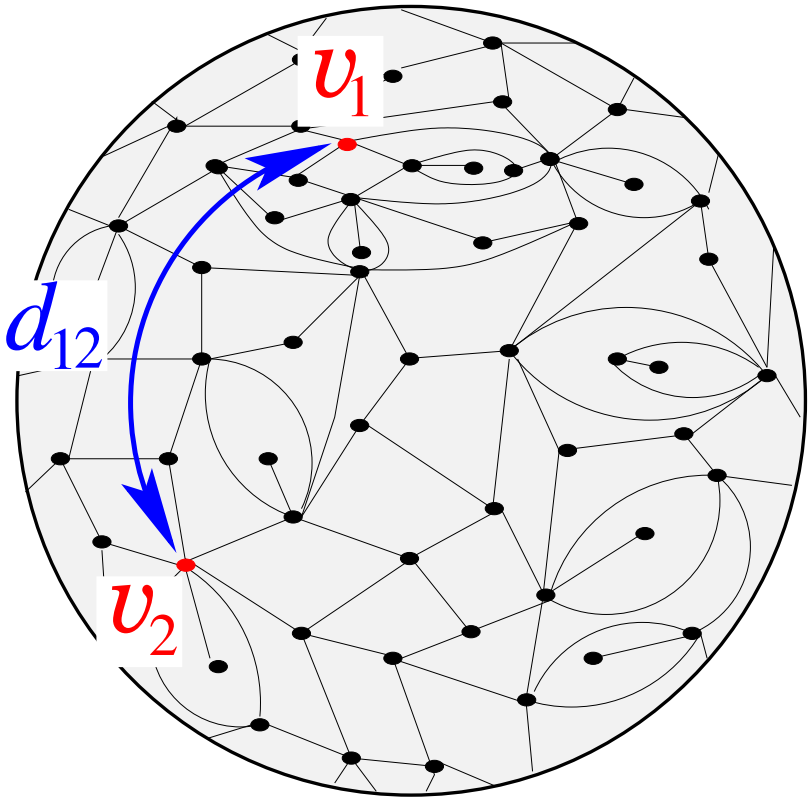
Images : Nicolas Curien

Géométrie aléatoire



Images : Nicolas Curien

Fonction à deux points



Une question simple

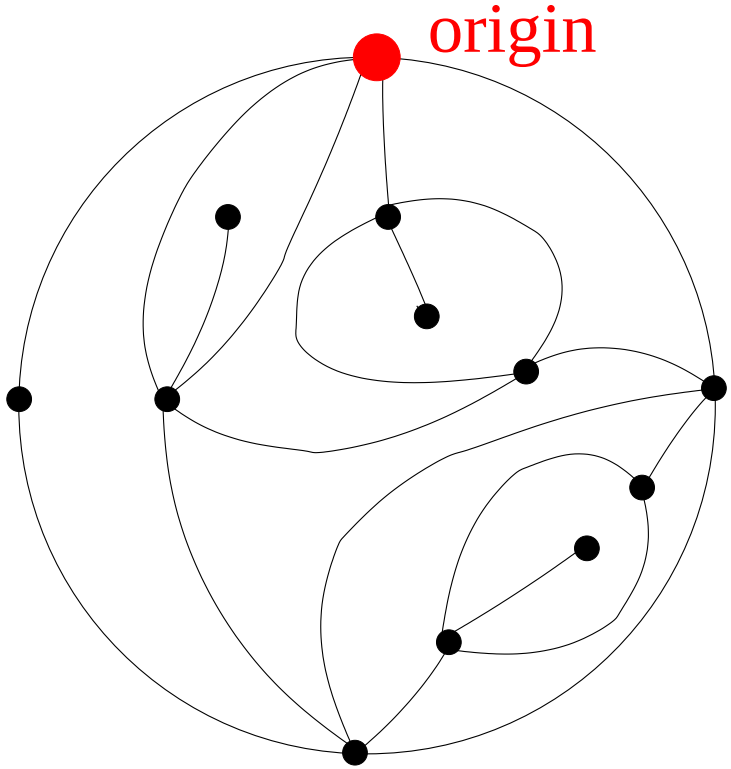
Prenons une quadrangulation aléatoire à n faces (donc $n+2$ sommets). Tirons deux sommets au hasard v_1 et v_2. Quelle est la loi de la distance de graphe d_{12} entre eux ?

Problème équivalent

Compter les quadrangulations à n faces et deux sommets marqués à distance donnée d_{12}.

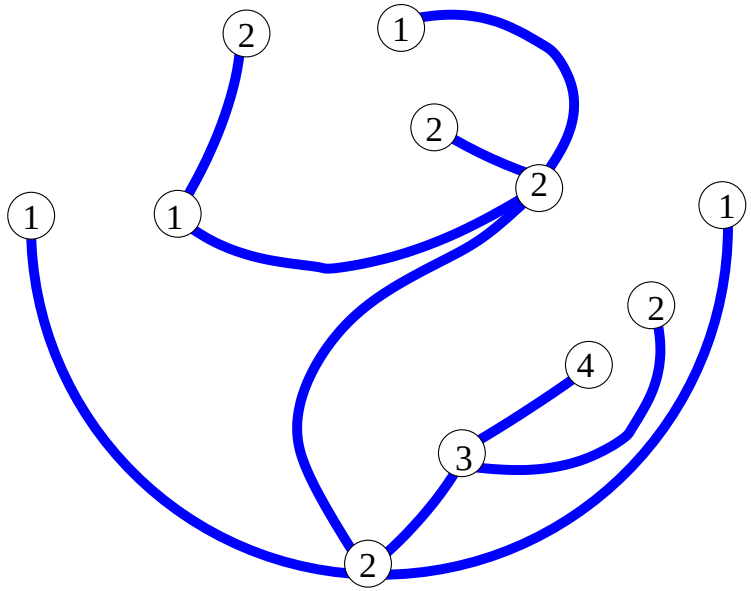
Fonction à deux points

Notre premier ingrédient est la bijection de Schaeffer entre quadrangulations à n faces et arbres bien étiquetés à n arêtes.



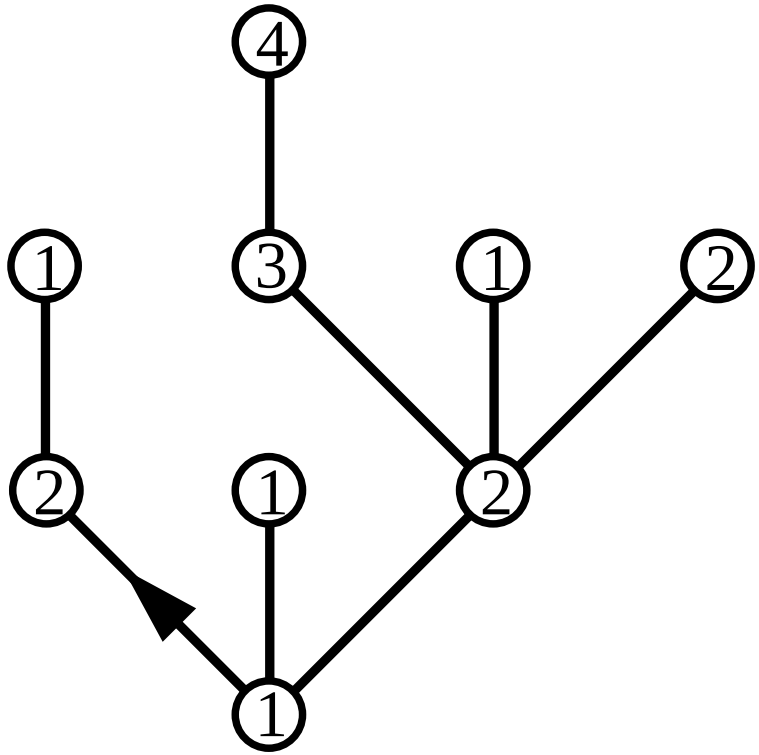
Fonction à deux points

Notre premier ingrédient est la bijection de Schaeffer entre quadrangulations à n faces et arbres bien étiquetés à n arêtes.



Fonction à deux points

Notre premier ingrédient est la bijection de Schaeffer entre quadrangulations à n faces et arbres bien étiquetés à n arêtes.



- entiers strictement positifs sur les sommets (*distances !*)
- variant de 0, $+1$ ou -1 le long des arêtes

Fonction à deux points

À l'aide de cette bijection on obtient facilement une équation codant la solution de notre problème.

Fonction à deux points

À l'aide de cette bijection on obtient facilement une équation codant la solution de notre problème. On note $R_{\ell;n}$ le nombre d'arbres à n arêtes d'étiquette racine ℓ et on introduit la série génératrice

$$R_\ell(g) = \sum_{n \geq 0} g^n R_{\ell;n}.$$

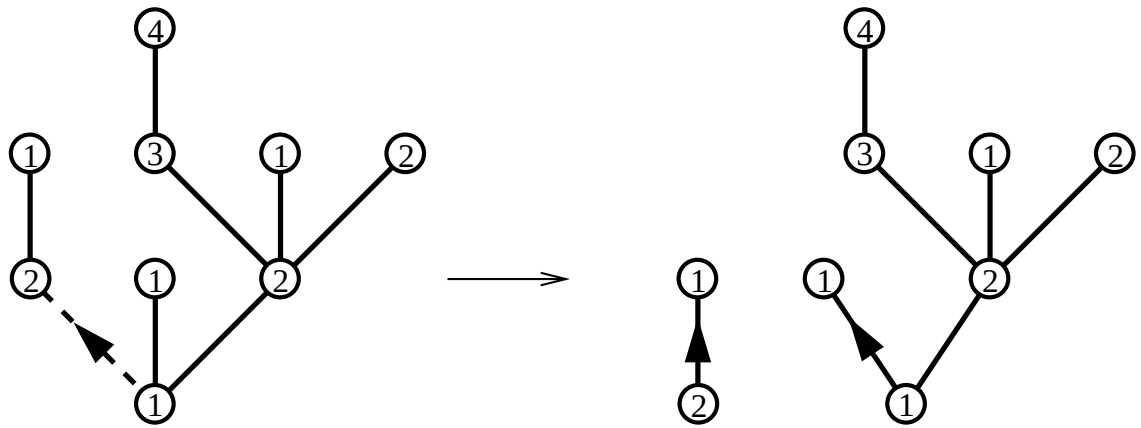
Fonction à deux points

À l'aide de cette bijection on obtient facilement une équation codant la solution de notre problème. On note $R_{\ell;n}$ le nombre d'arbres à n arêtes d'étiquette racine ℓ et on introduit la série génératrice

$$R_\ell(g) = \sum_{n\geq 0} g^n R_{\ell;n}.$$

Celle-ci satisfait l'équation

$$R_\ell = \begin{cases} 1 + gR_\ell(R_{\ell+1} + R_\ell + R_{\ell-1}), & \ell \geq 1 \\ 0 & \ell = 0. \end{cases}$$



Fonction à deux points

Notre second ingrédient est l'intégrabilité de l'équation obtenue.

Fonction à deux points

Notre second ingrédient est l'intégrabilité de l'équation obtenue. Celle-ci admet pour solution

$$R_\ell = R\frac{(1-x^\ell)(1-x^{\ell+3})}{(1-x^{\ell+1})(1-x^{\ell+2})}$$

où les quantités $R = R(g)$ et $x = x(g)$ sont solution de

$$R = 1 + 3gR^2, \qquad x + \frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{gR^2}.$$

(B.-Di Francesco-Guitter '03)

Fonction à deux points

Notre second ingrédient est l'intégrabilité de l'équation obtenue. Celle-ci admet pour solution

$$R_\ell = R\frac{(1-x^\ell)(1-x^{\ell+3})}{(1-x^{\ell+1})(1-x^{\ell+2})}$$

où les quantités $R = R(g)$ et $x = x(g)$ sont solution de

$$R = 1 + 3gR^2, \qquad x + \frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{gR^2}.$$

(B.-Di Francesco-Guitter '03)

Il y a bien intégrabilité au sens où l'équation admet une intégrale première

$$\psi(R_\ell, R_{\ell+1}) := (1 - gR_\ell - gR_{\ell+1})(1 + gR_\ell R_{\ell+1}).$$

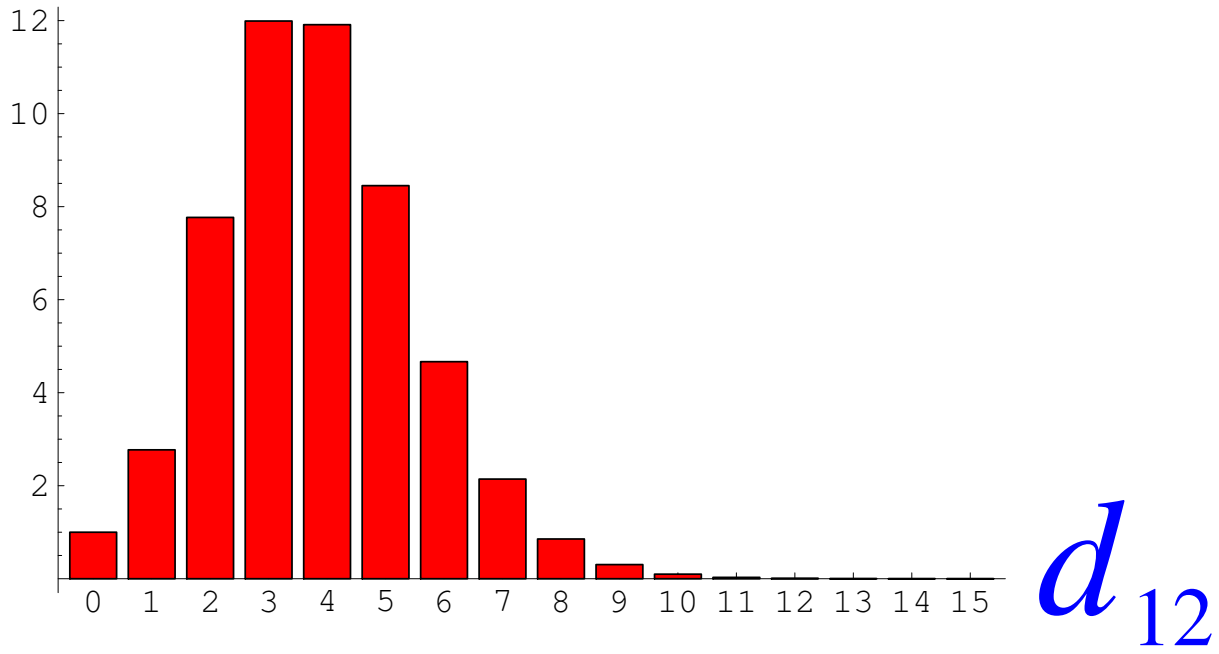
ne dépendant pas de ℓ.

Fonction à deux points

On a ainsi une réponse exacte à notre question !

Fonction à deux points

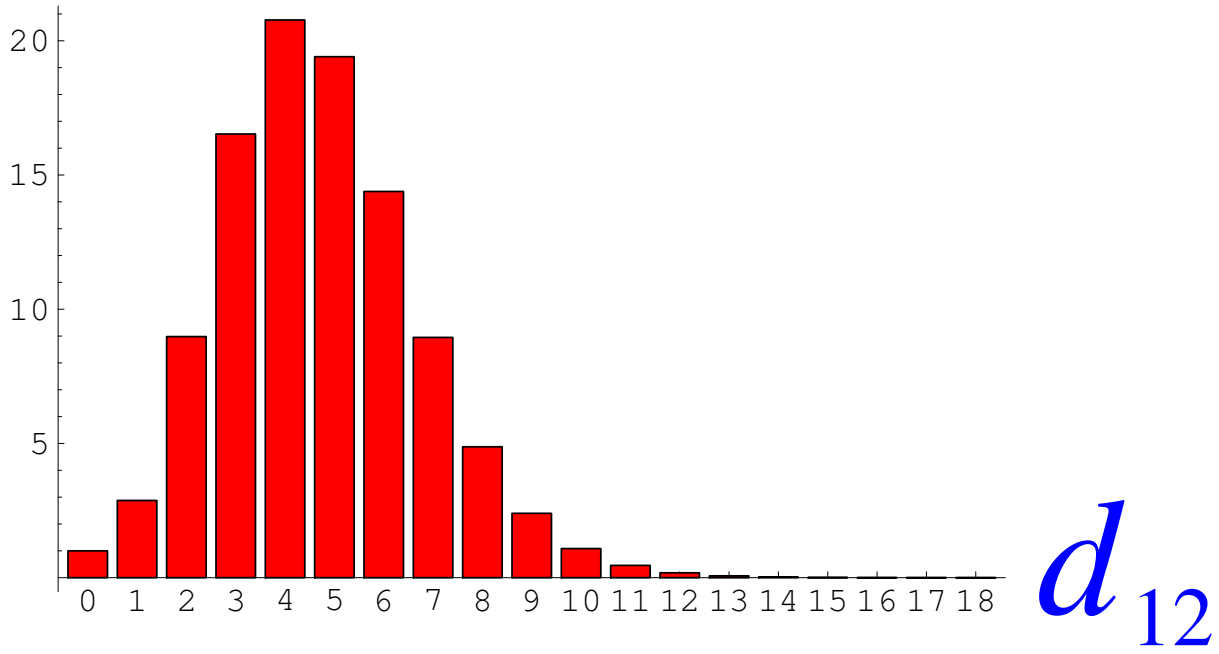
On a ainsi une réponse exacte à notre question ! Par exemple, on trouve le nombre moyen de sommets à distance d_{12} d'un point fixé dans une quadrangulation de taille n donnée.



$n = 50$

Fonction à deux points

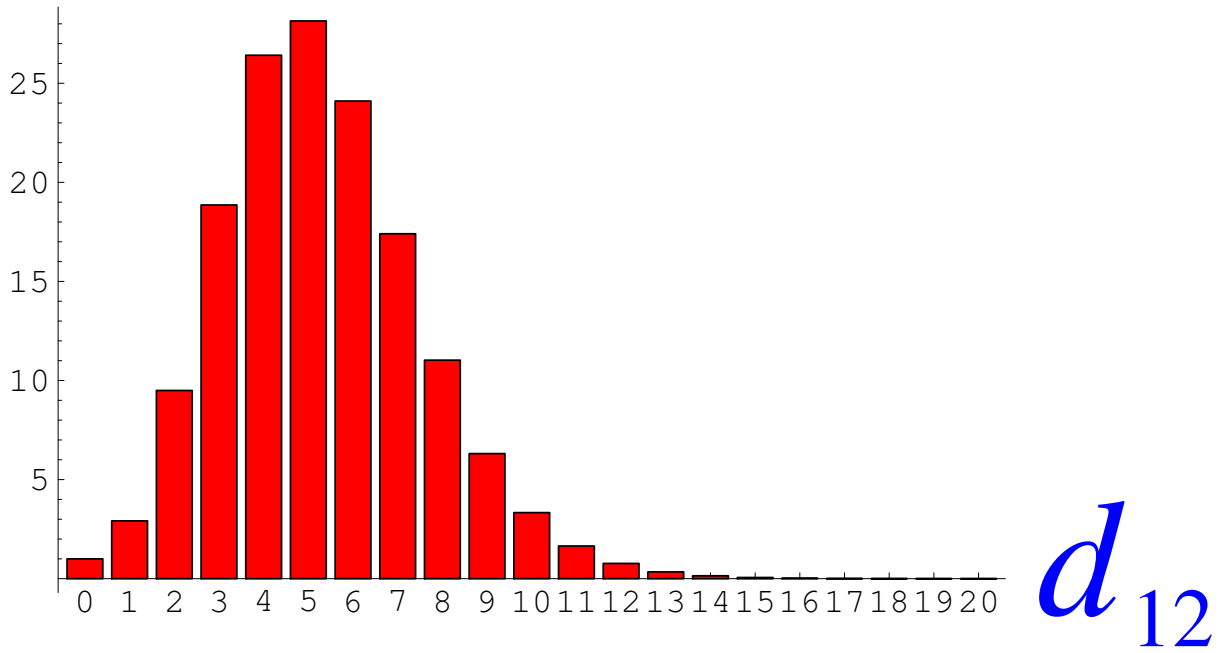
On a ainsi une réponse exacte à notre question ! Par exemple, on trouve le nombre moyen de sommets à distance d_{12} d'un point fixé dans une quadrangulation de taille n donnée.



$n = 100$

Fonction à deux points

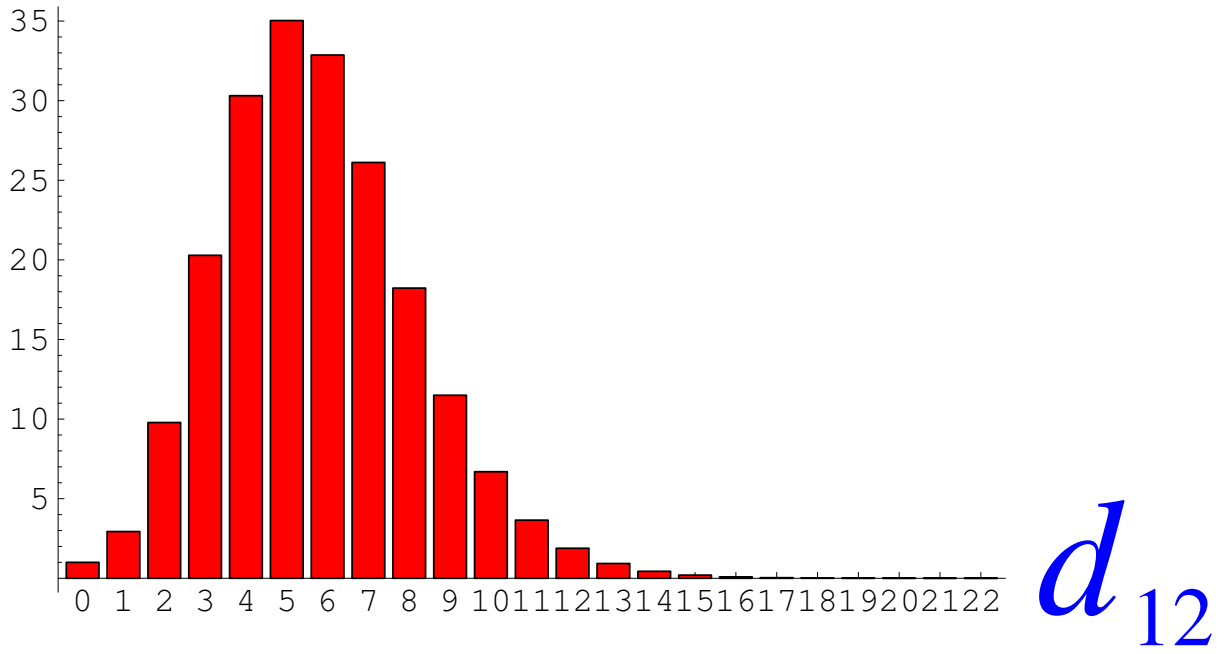
On a ainsi une réponse exacte à notre question ! Par exemple, on trouve le nombre moyen de sommets à distance d_{12} d'un point fixé dans une quadrangulation de taille n donnée.



$n = 150$

Fonction à deux points

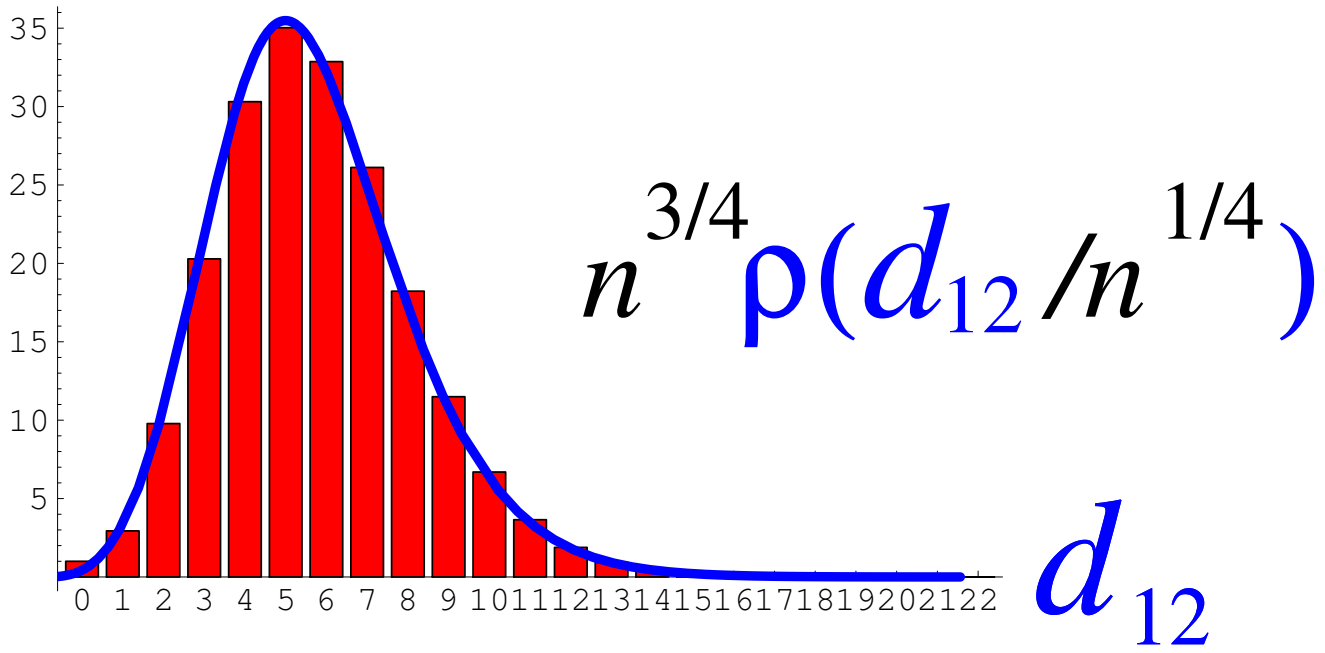
On a ainsi une réponse exacte à notre question ! Par exemple, on trouve le nombre moyen de sommets à distance d_{12} d'un point fixé dans une quadrangulation de taille n donnée.



$n = 200$

Fonction à deux points

On a ainsi une réponse exacte à notre question ! Par exemple, on trouve le nombre moyen de sommets à distance d_{12} d'un point fixé dans une quadrangulation de taille n donnée.



$$d_{12} \sim n^{1/4}$$

Fonction à deux points

La fonction d'échelle est donnée par $\rho(L) = \Phi'(L)$ avec

$$\Phi(L) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \xi^2 e^{-\xi^2} \left(1 + \frac{3}{\sinh^2(L\sqrt{-3i\xi/2})} \right)$$

(Ambjørn-Watabiki '96, B.-Di Francesco-Guitter '03)

Fonction à deux points

La fonction d'échelle est donnée par $\rho(L) = \Phi'(L)$ avec

$$\Phi(L) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \xi^2 e^{-\xi^2} \left(1 + \frac{3}{\sinh^2(L\sqrt{-3i\xi/2})} \right)$$

(Ambjørn-Watabiki '96, B.-Di Francesco-Guitter '03)

C'est une quantité universelle caractéristique de la carte brownienne, limite d'échelle des cartes planaires (Marckert-Mokkadem '05, Le Gall '06-'11, Miermont '07-'11...)

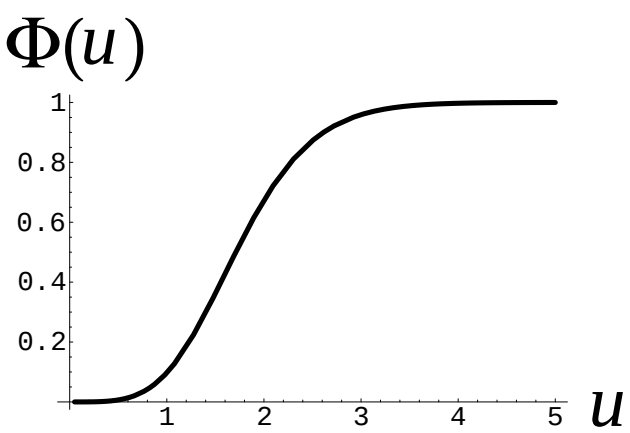
Fonction à deux points

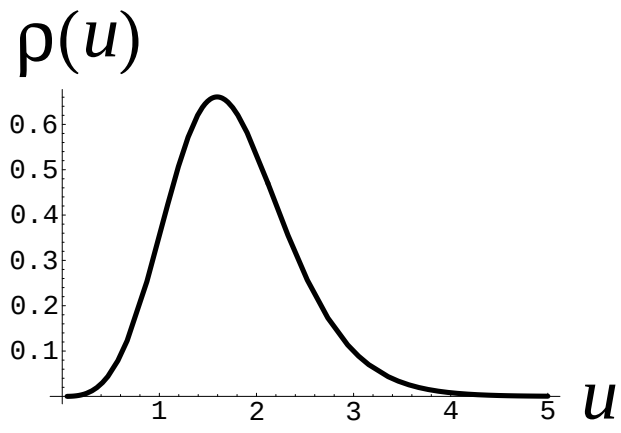
La fonction d'échelle est donnée par $\rho(L) = \Phi'(L)$ avec

$$\Phi(L) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \xi^2 e^{-\xi^2} \left(1 + \frac{3}{\sinh^2(L\sqrt{-3i\xi/2})} \right)$$

(Ambjørn-Watabiki '96, B.-Di Francesco-Guitter '03)

C'est une quantité universelle caractéristique de la carte brownienne, limite d'échelle des cartes planaires (Marckert-Mokkadem '05, Le Gall '06-'11, Miermont '07-'11...)



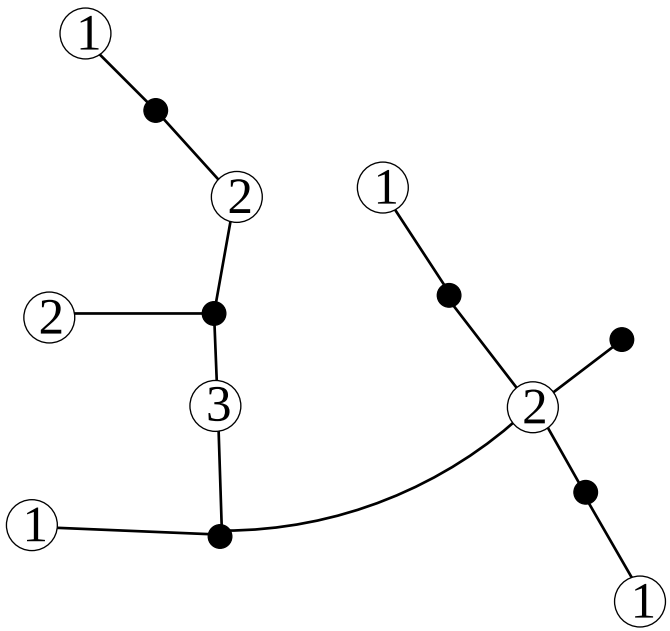


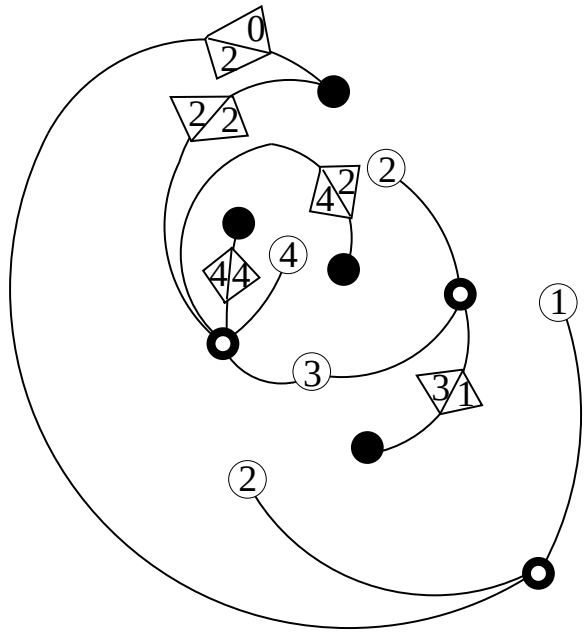
$$\Phi(L) \sim \frac{3D^4}{28},\ L \to 0 \qquad \log(1 - \Phi(L)) \sim \mathrm{cst}.L^{4/3}, L \to \infty.$$

Fonction à deux points

On peut dépasser le cadre des quadrangulations grâce à une généralisation de la bijection de Schaffer faisant intervenir des “mobiles”.

(B.-Di Francesco-Guitter '04)



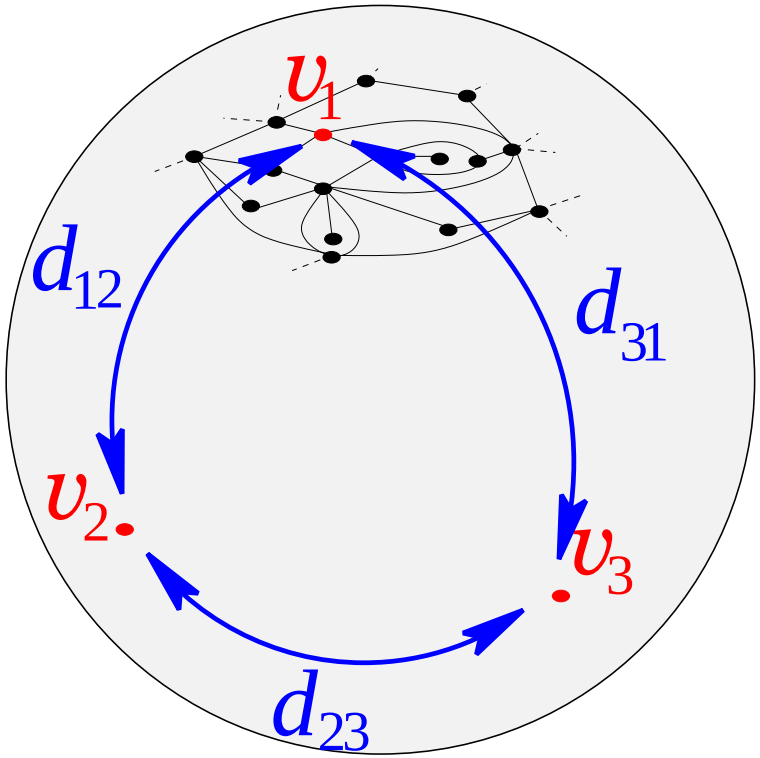


On peut ainsi valider l'hypothèse d'universalité, la propriété d'intégrabilité restant vraie dans le cadre général.

Autres résultats

On peut ensuite considérer la fonction à trois points.

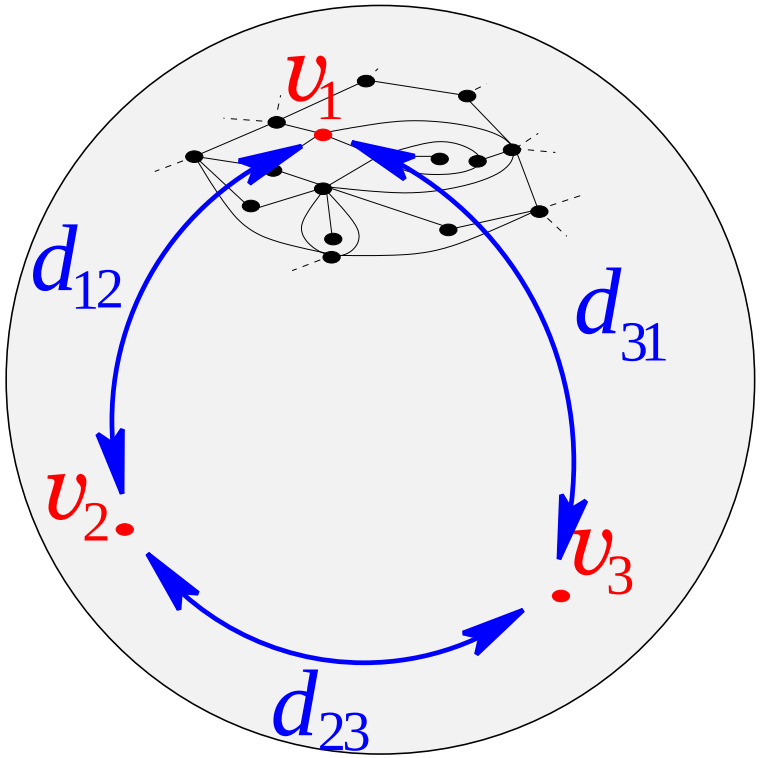
(B.-Guitter '08)



Autres résultats

On peut ensuite considérer la fonction à trois points.

(B.-Guitter '08)



Il faut de nouveaux outils :

- nouvelle bijection (Miermont)
- paramétrisation astucieuse des distances

$$d_{12} = s + t$$
$$d_{23} = t + u$$
$$d_{31} = u + s$$

- autres expressions exactes (intégrabilité)

Autres résultats

On peut ensuite considérer la fonction à trois points.

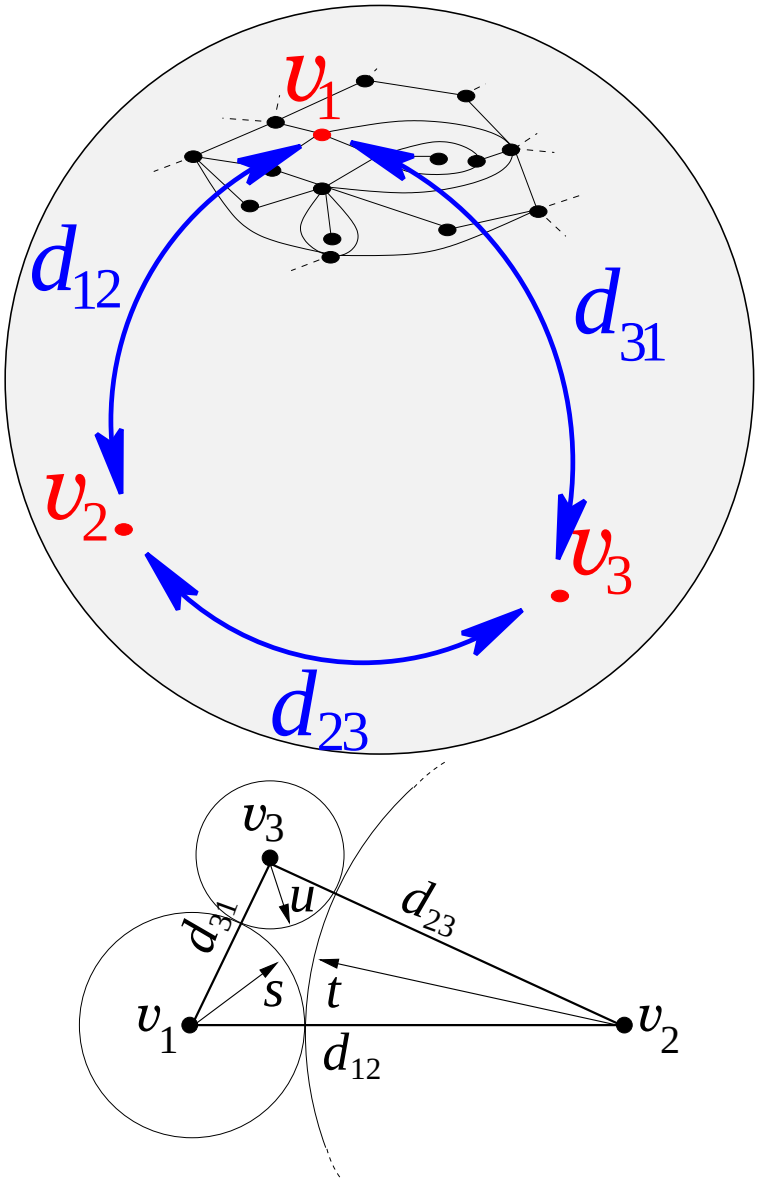
(B.-Guitter '08)

Il faut de nouveaux outils :

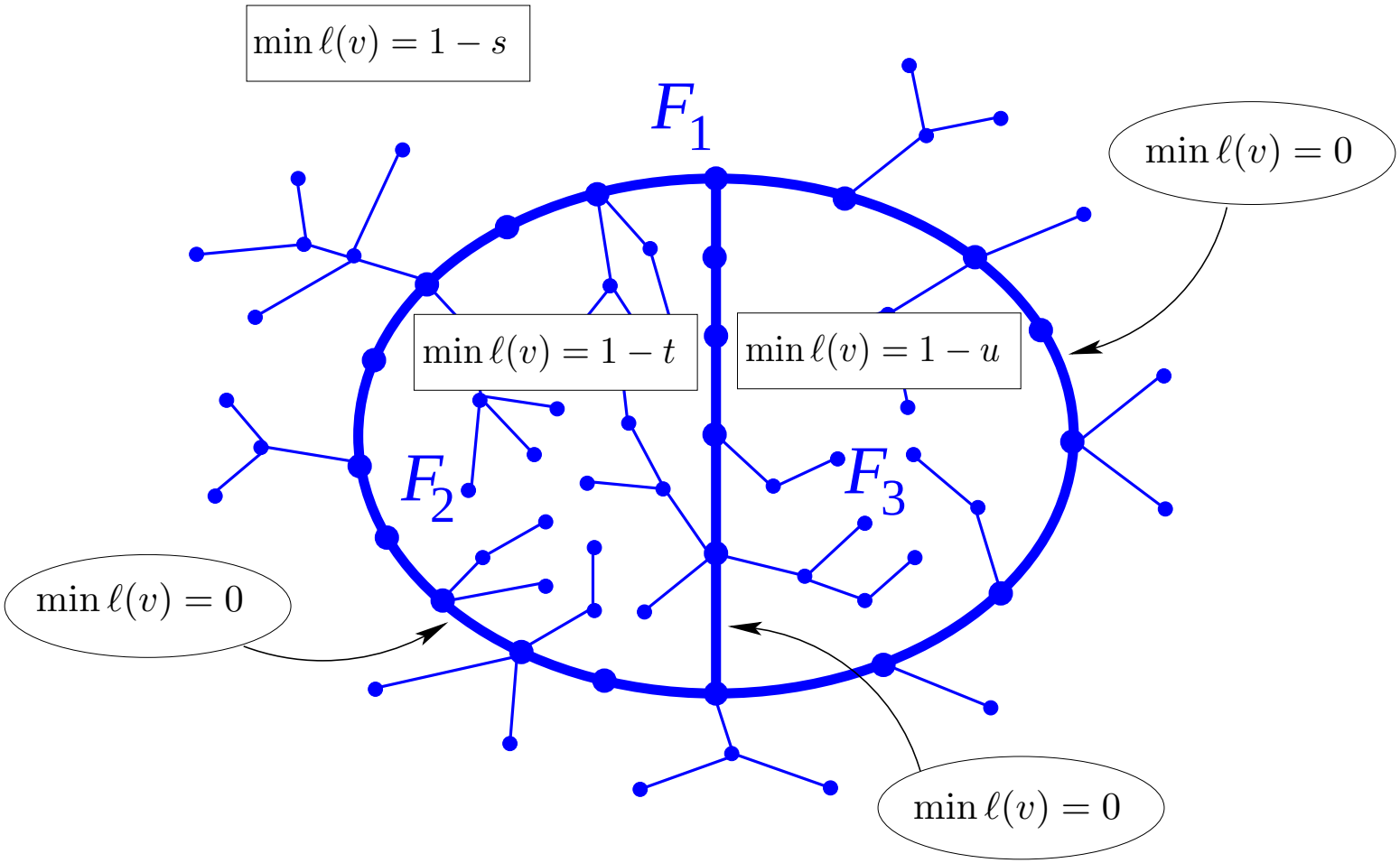
- nouvelle bijection (Miermont)
- paramétrisation astucieuse des distances

$$d_{12} = s + t$$
$$d_{23} = t + u$$
$$d_{31} = u + s$$

- autres expressions exactes (intégrabilité)



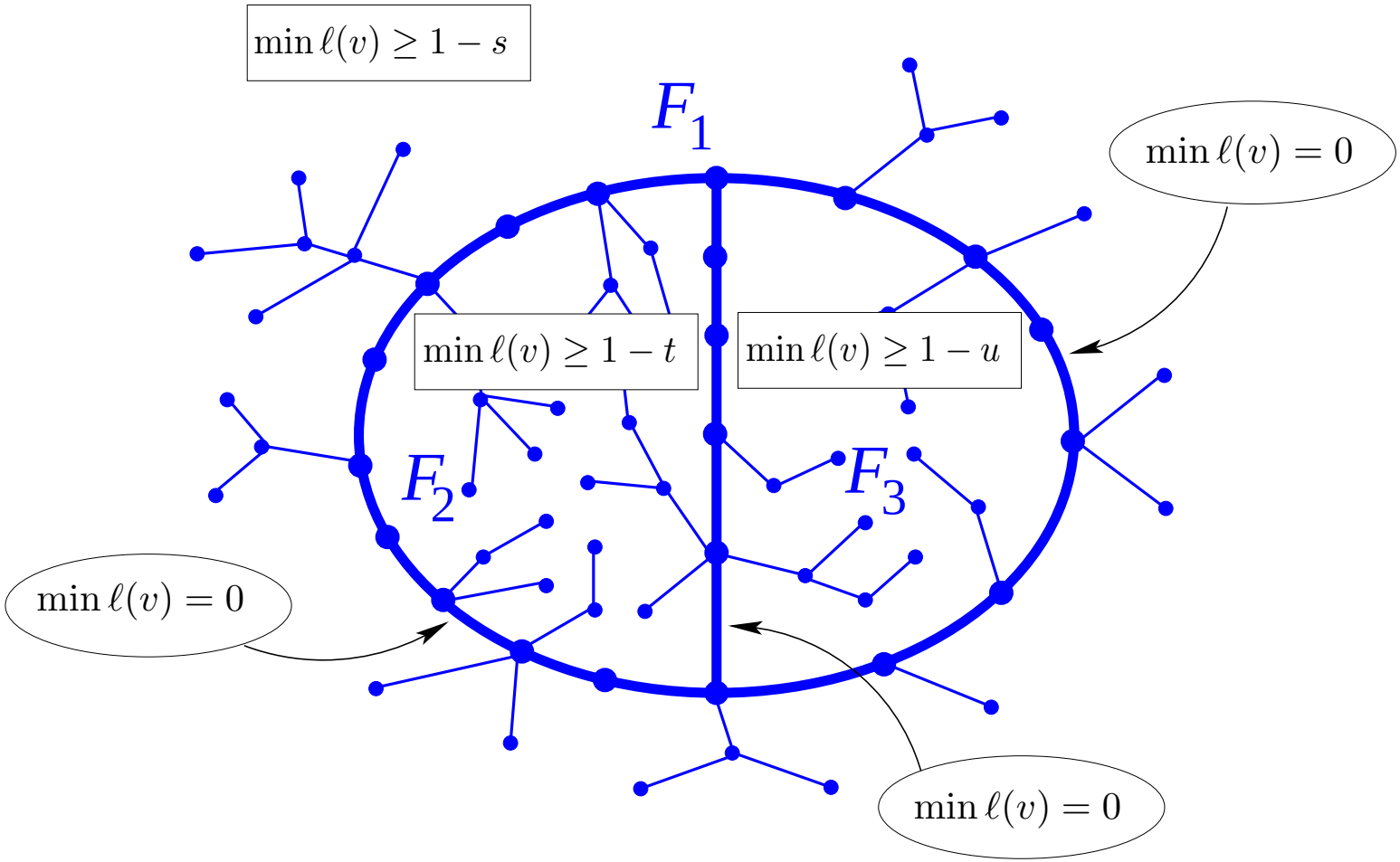
Fonction à trois points



Il s'agit d'énumérer des cartes bien étiquetées contraintes.

Série génératrice : $G_{s,t,u}(g)$ où g poids par arête

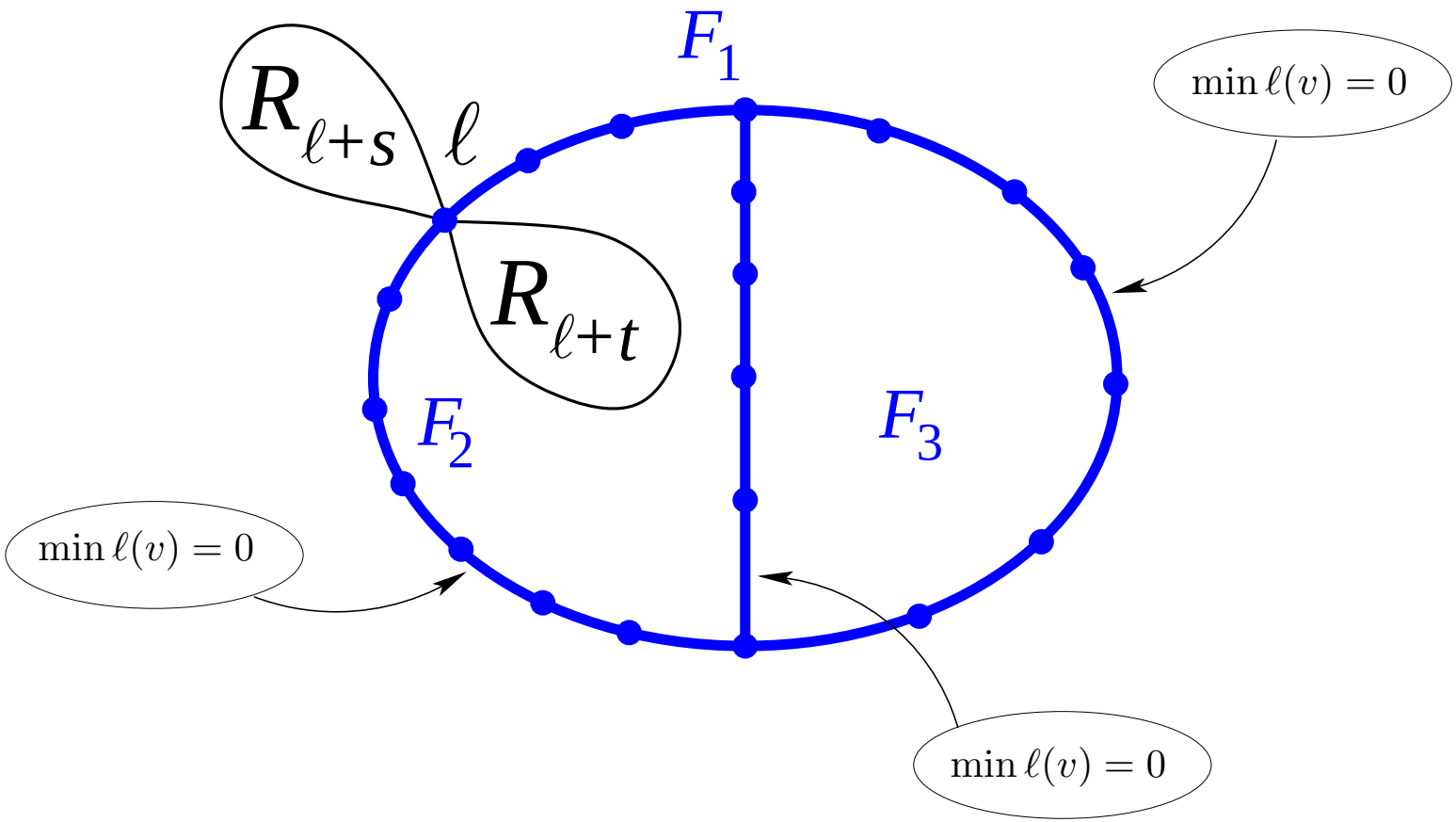
Fonction à trois points



Il s'agit d'énumérer des cartes bien étiquetées contraintes.

Série génératrice : $F_{s,t,u}(g) = \sum_{s' \leq s} \sum_{t' \leq t} \sum_{u' \leq u} G_{s',t',u'}(g)$

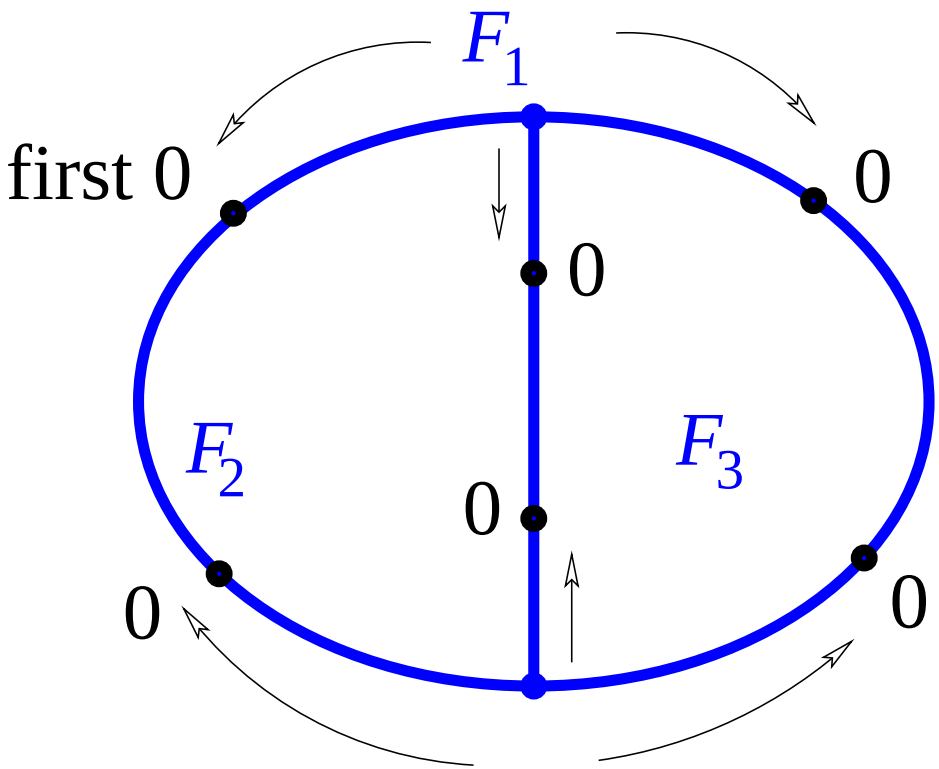
Fonction à trois points



Une telle carte est faite d'arbre attachés à un squelette.

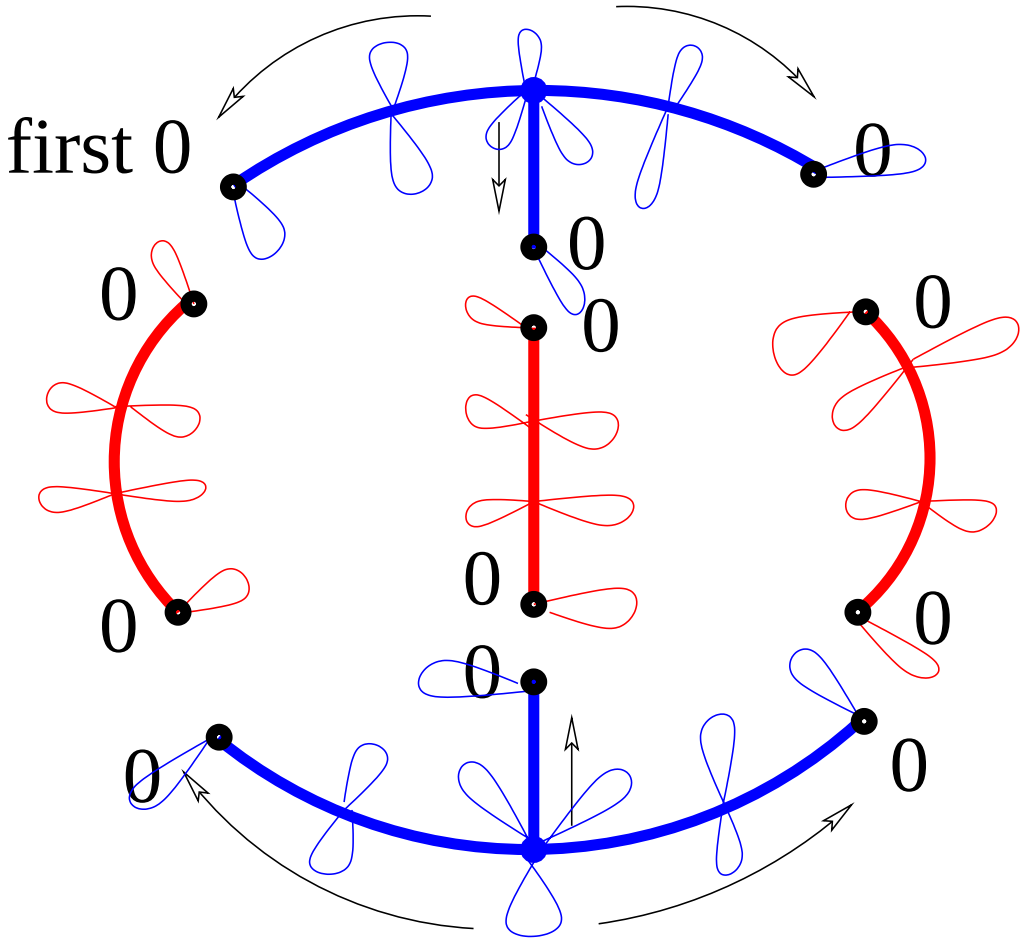
(On réutilise l'expression précédente de R_ℓ)

Fonction à trois points



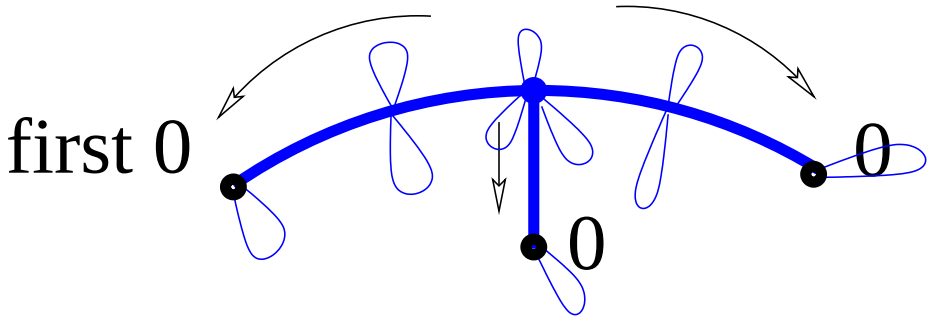
On peut en faire une décomposition naturelle...

Fonction à trois points

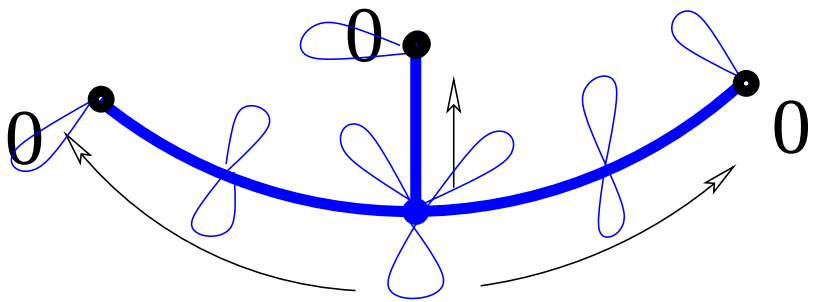


... et obtenir des composantes acycliques.

Fonction à trois points



$X_{s,t}$ $X_{t,u}$ $X_{u,s}$



"Chaînes"

Fonction à trois points

$$Y_{s,t,u}$$

$$X_{s,t} \qquad X_{t,u} \qquad X_{u,s}$$

$$Y_{s,t,u}$$

"Étoiles"

Fonction à trois points

$$Y_{s,t,u}$$

$$X_{s,t} \qquad X_{t,u} \qquad X_{u,s}$$

$$Y_{s,t,u}$$

"Étoiles"

$$F_{s,t,u} = X_{s,t} X_{t,u} X_{u,s} (Y_{s,t,u})^2$$

La fonction à trois points

Résultat final exact (B.-Guitter '08)

$$F_{s,t,u} = \frac{[3]\left([s+1][t+1][u+1][s+t+u+3]\right)^2}{[1]^3[s+t+1][s+t+3][t+u+1][t+u+3][u+s+1][u+s+3]}$$

avec

$$[\ell] := \frac{(1-x^\ell)}{(1-x)}.$$

et $x + 1/x + 1 = 1/(gR^2)$ comme avant.

La fonction à trois points

Résultat final exact (B.-Guitter '08)

$$F_{s,t,u} = \frac{[3]\left([s+1][t+1][u+1][s+t+u+3]\right)^2}{[1]^3[s+t+1][s+t+3][t+u+1][t+u+3][u+s+1][u+s+3]}$$

avec

$$[\ell] := \frac{(1-x^\ell)}{(1-x)}.$$

et $x + 1/x + 1 = 1/(gR^2)$ comme avant.
NB : on se sait pas encore étendre à quatre points ou plus.

La fonction à trois points

Résultat final exact (B.-Guitter '08)

$$F_{s,t,u} = \frac{[3]\,([s+1][t+1][u+1][s+t+u+3])^2}{[1]^3[s+t+1][s+t+3][t+u+1][t+u+3][u+s+1][u+s+3]}$$

avec

$$[\ell] := \frac{(1-x^\ell)}{(1-x)}.$$

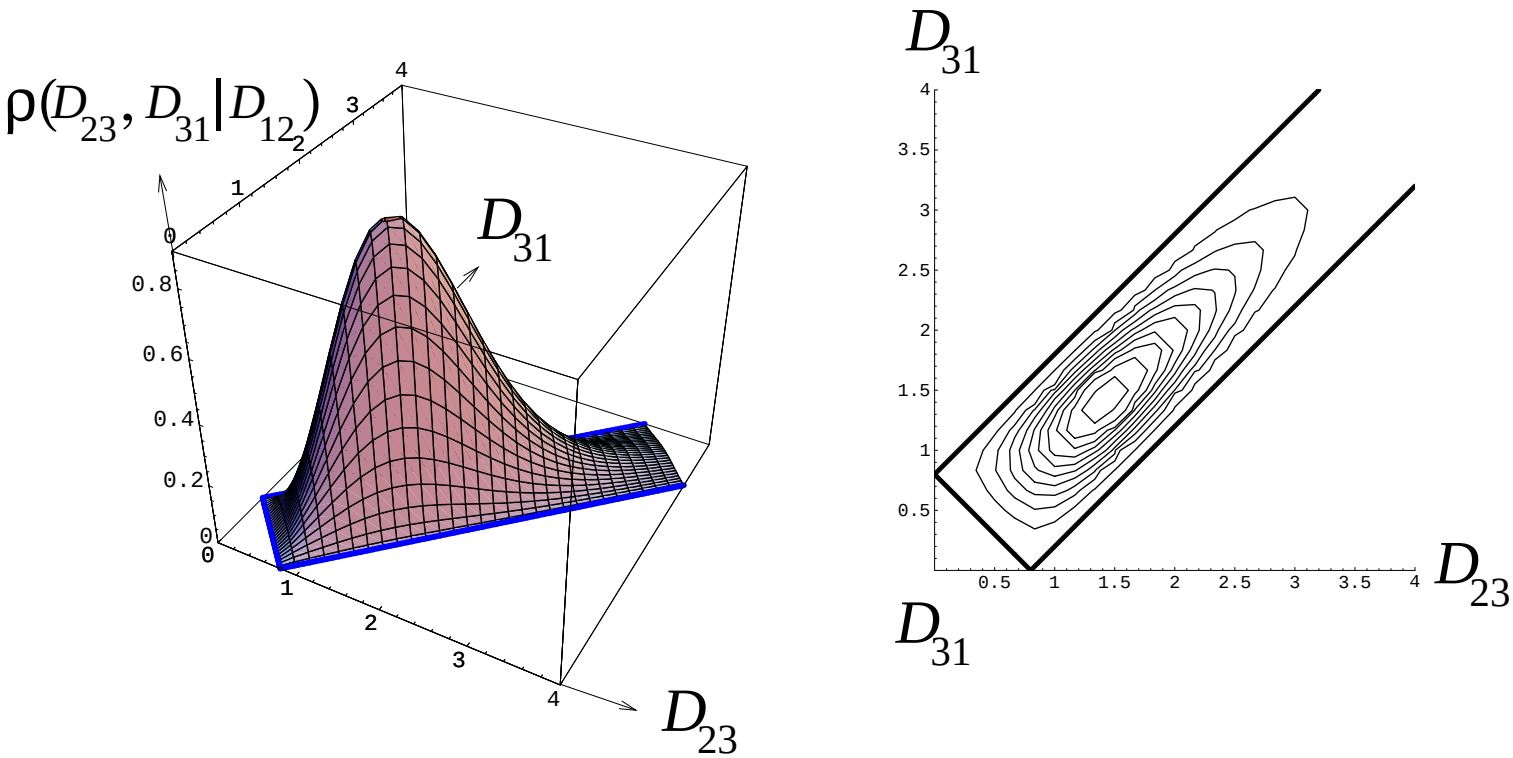
et $x + 1/x + 1 = 1/(gR^2)$ comme avant.
NB : on se sait pas encore étendre à quatre points ou plus.

Limite d'échelle : les distances sont d'ordre $n^{1/4}$ pour n grand et on obtient la distribution jointe universelle des distances renormalisées

$$D_{12} = \frac{d_{12}}{n^{1/4}}, \qquad D_{23} = \frac{d_{23}}{n^{1/4}}, \qquad D_{31} = \frac{d_{31}}{n^{1/4}}.$$

La fonction à trois points

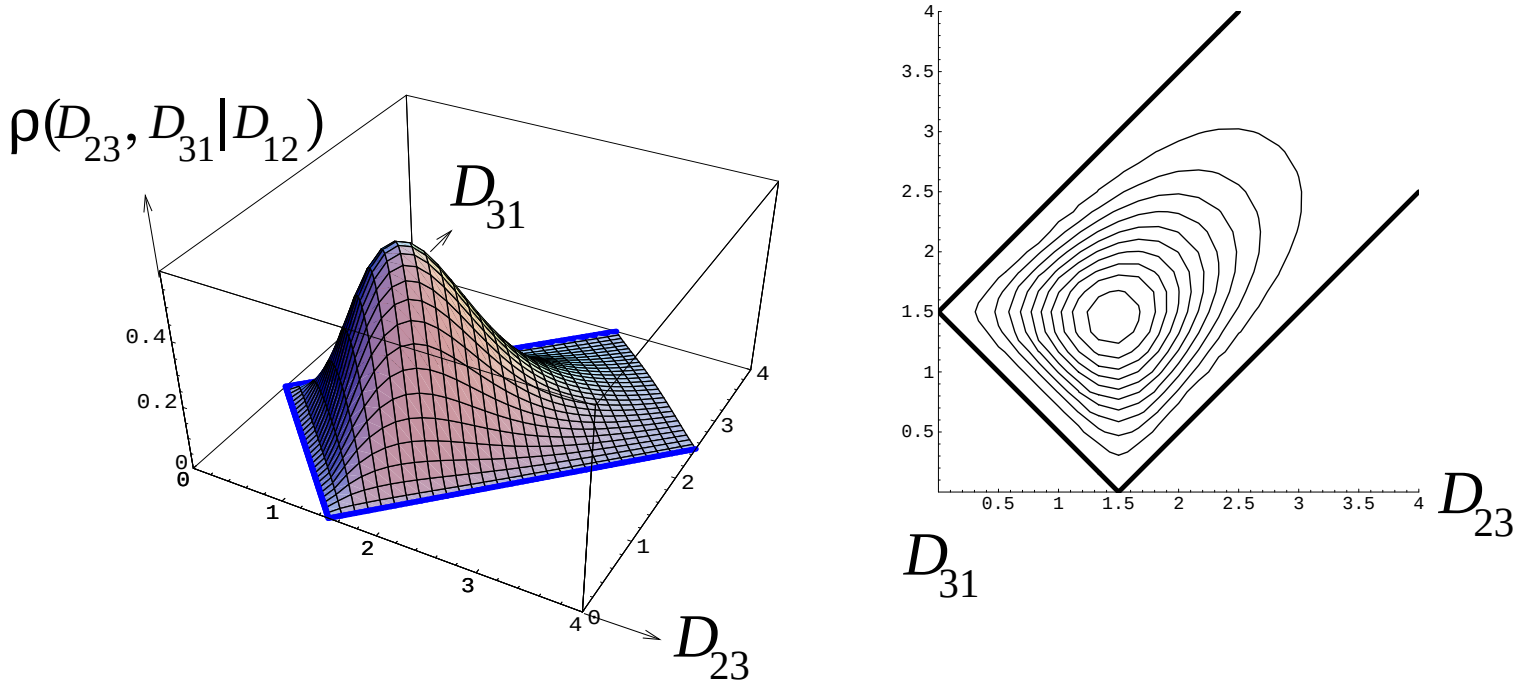
$$D_{12} = 0.8$$



Densité de deux distances conditionnellement à la troisième.

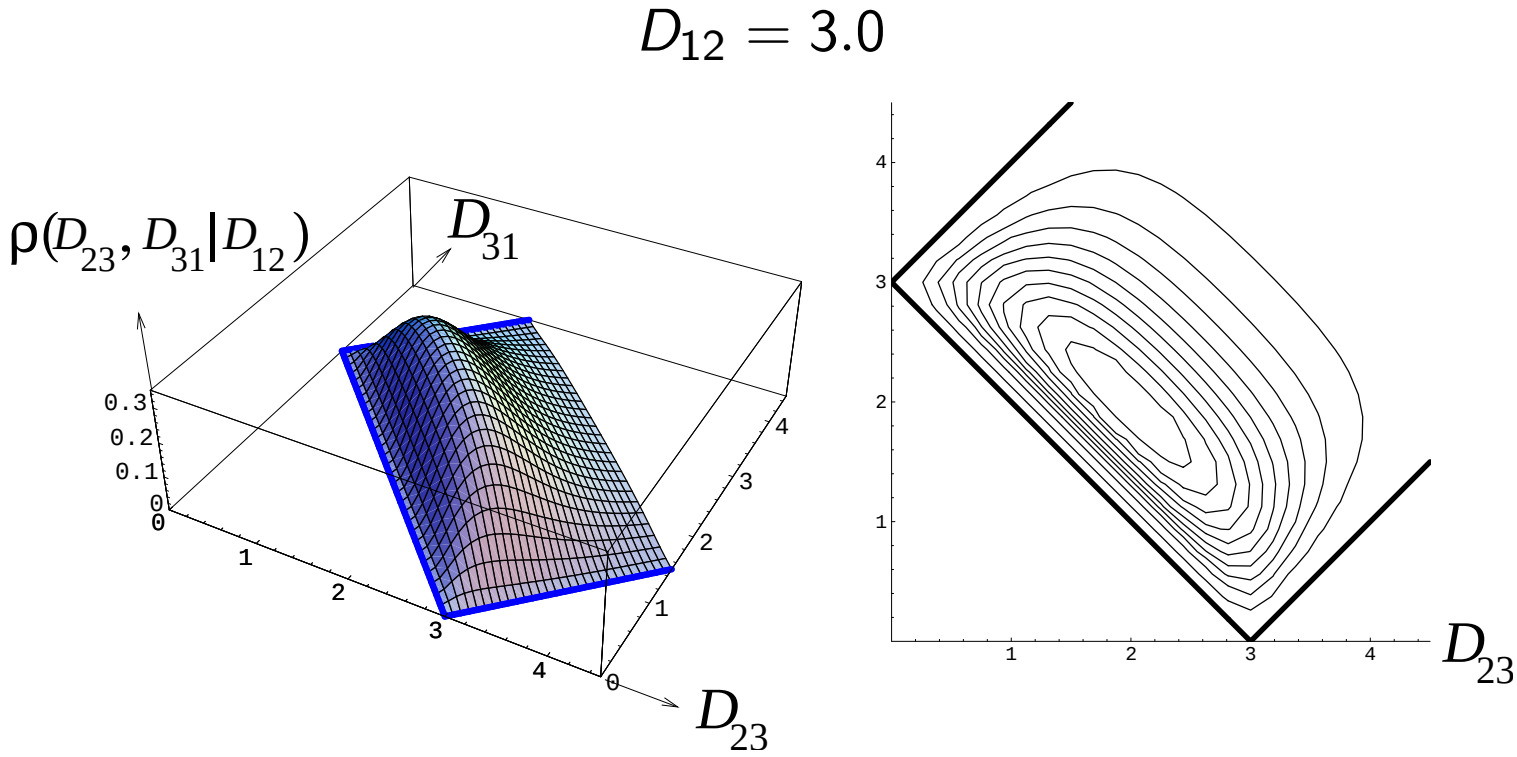
La fonction à trois points

$$D_{12} = 1.5$$



Densité de deux distances conditionnellement à la troisième.

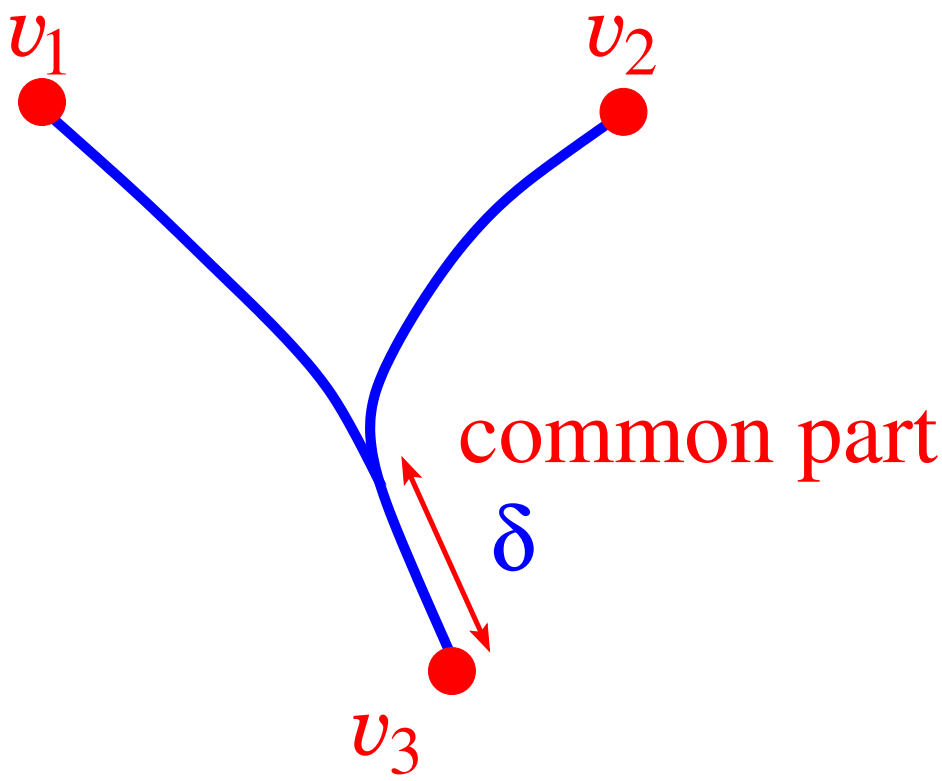
La fonction à trois points



Densité de deux distances conditionnellement à la troisième.

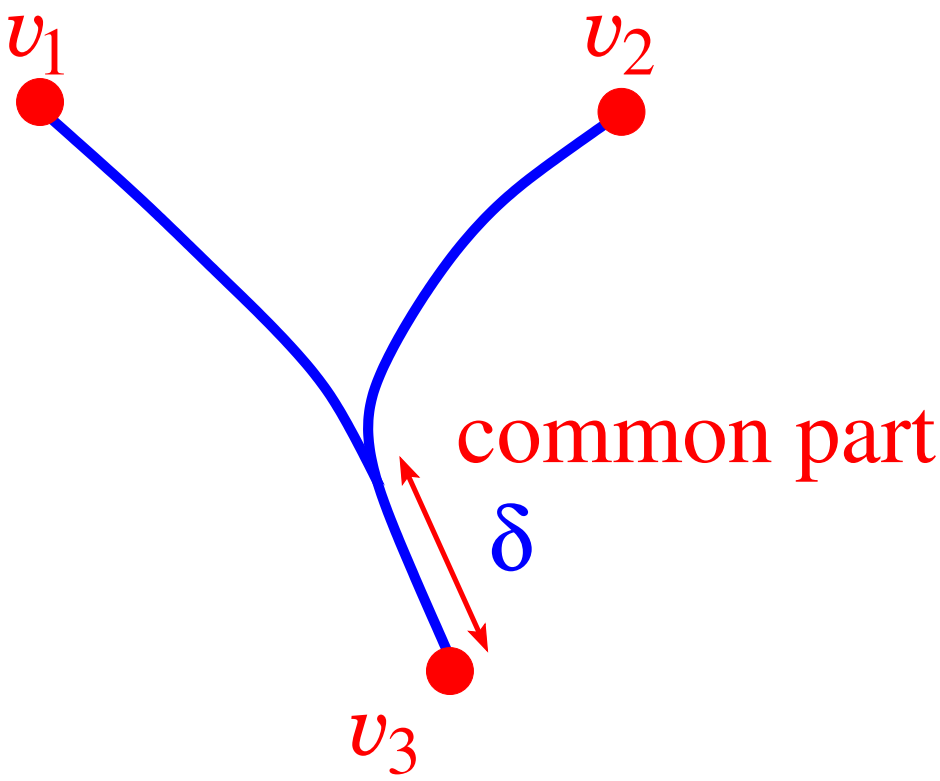
Autres résultats (B.-Guitter '08)

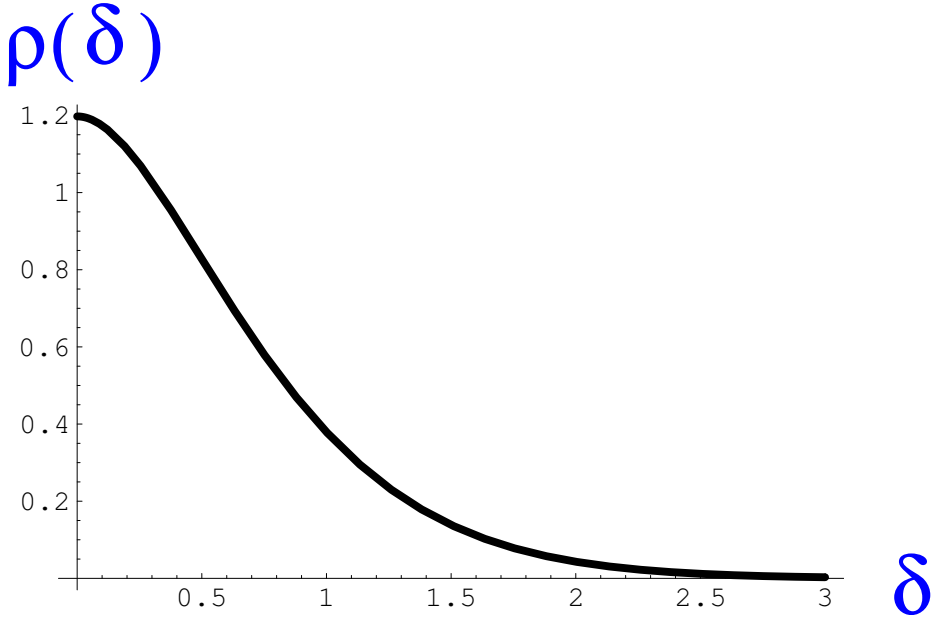
Le Gall ('08) a mis en évidence le surprenant phénomène de confluence des géodésiques dans la limite d'échelle.



Autres résultats (B.-Guitter '08)

Le Gall ('08) a mis en évidence le surprenant phénomène de confluence des géodésiques dans la limite d'échelle.

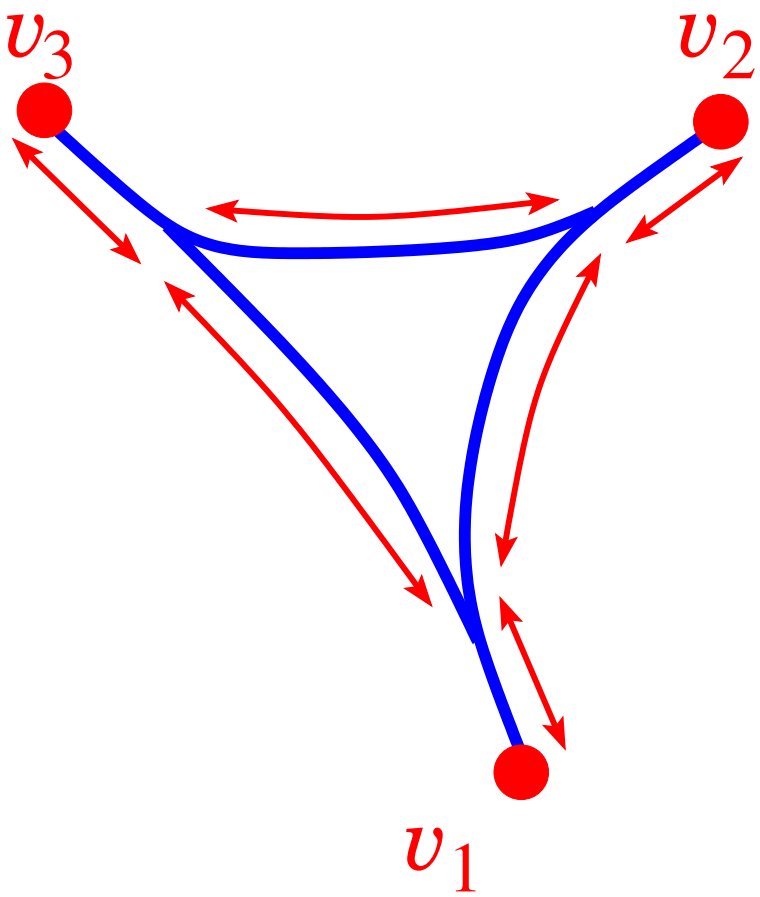




On sait calculer la distribution de δ pour trois points aléatoires.

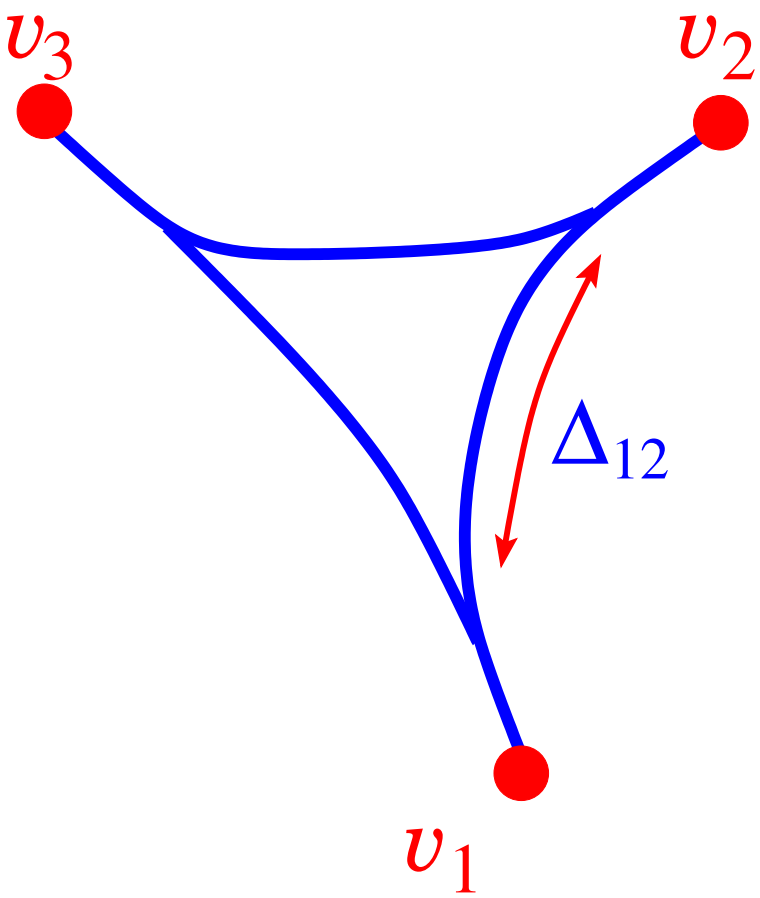
Autres résultats (B.-Guitter '08)

Dans une grande carte aléatoire les triangles ont 6 côtés !



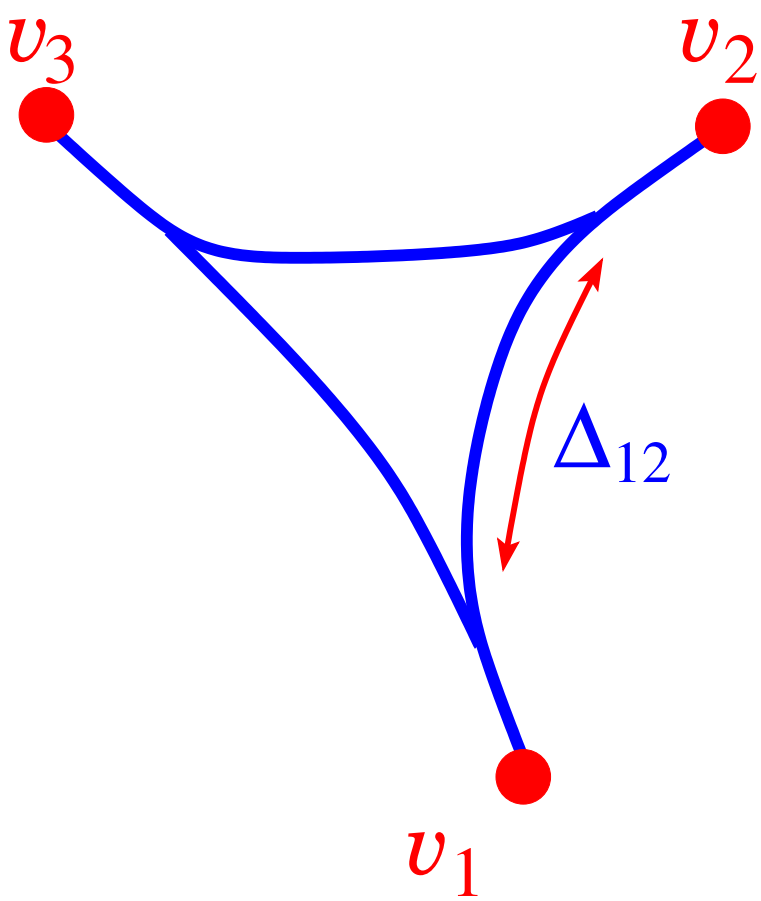
Autres résultats (B.-Guitter '08)

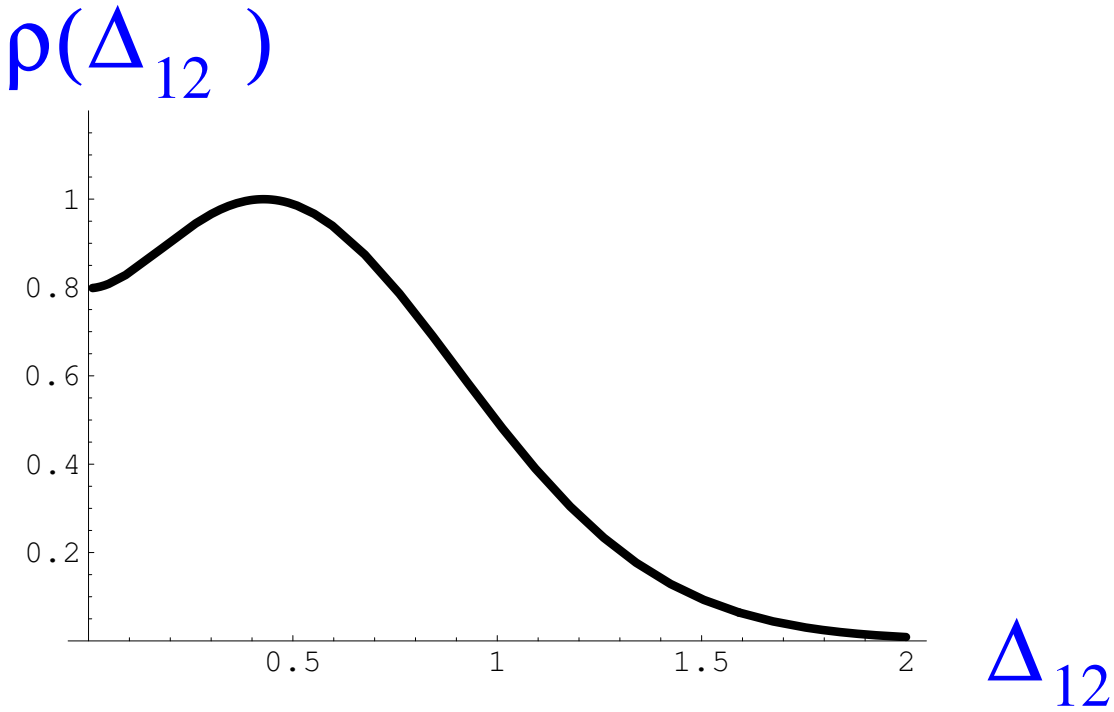
Dans une grande carte aléatoire les triangles ont 6 côtés !



Autres résultats (B.-Guitter '08)

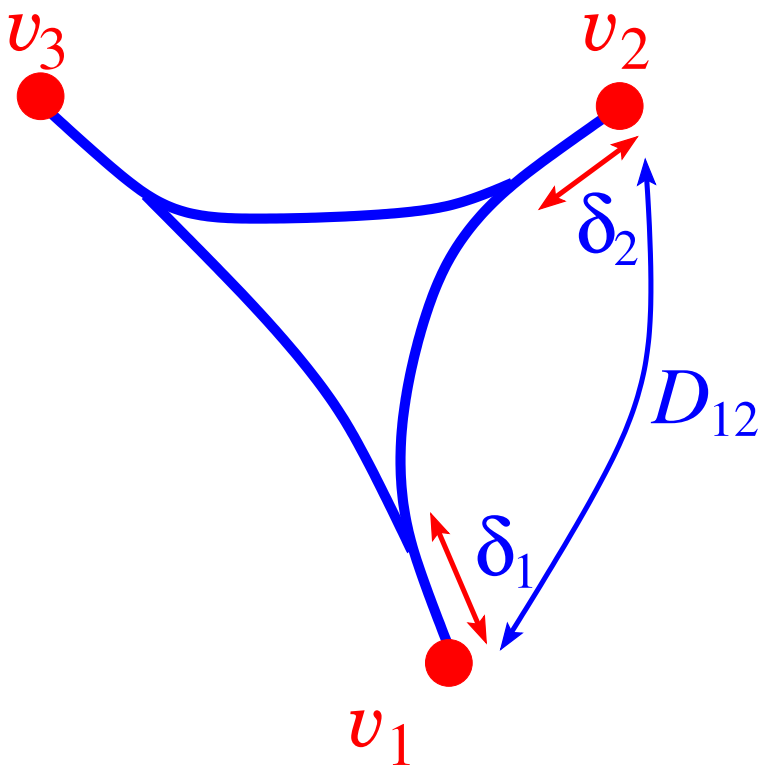
Dans une grande carte aléatoire les triangles ont 6 côtés !





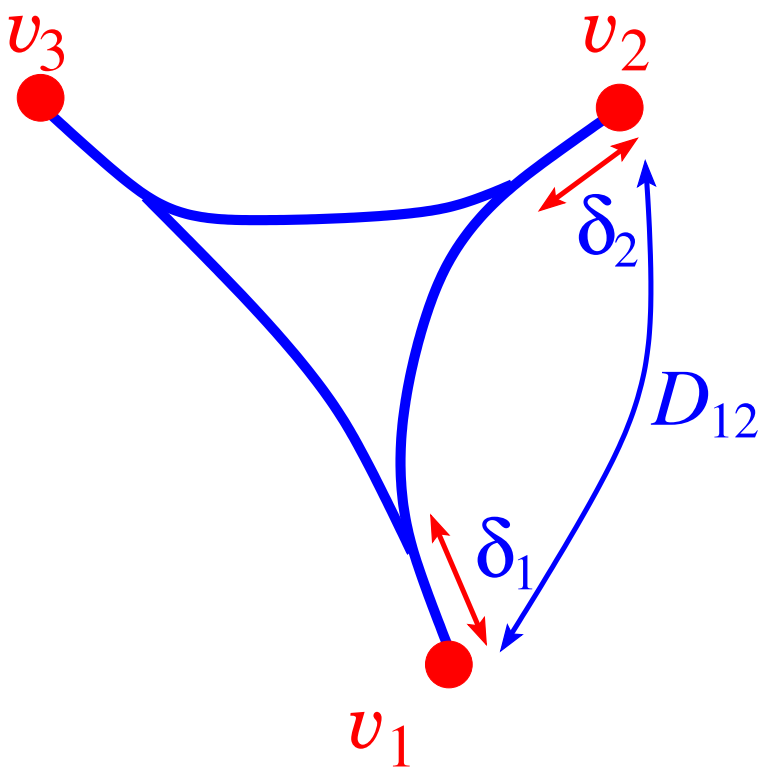
Autres résultats (B.-Guitter '08)

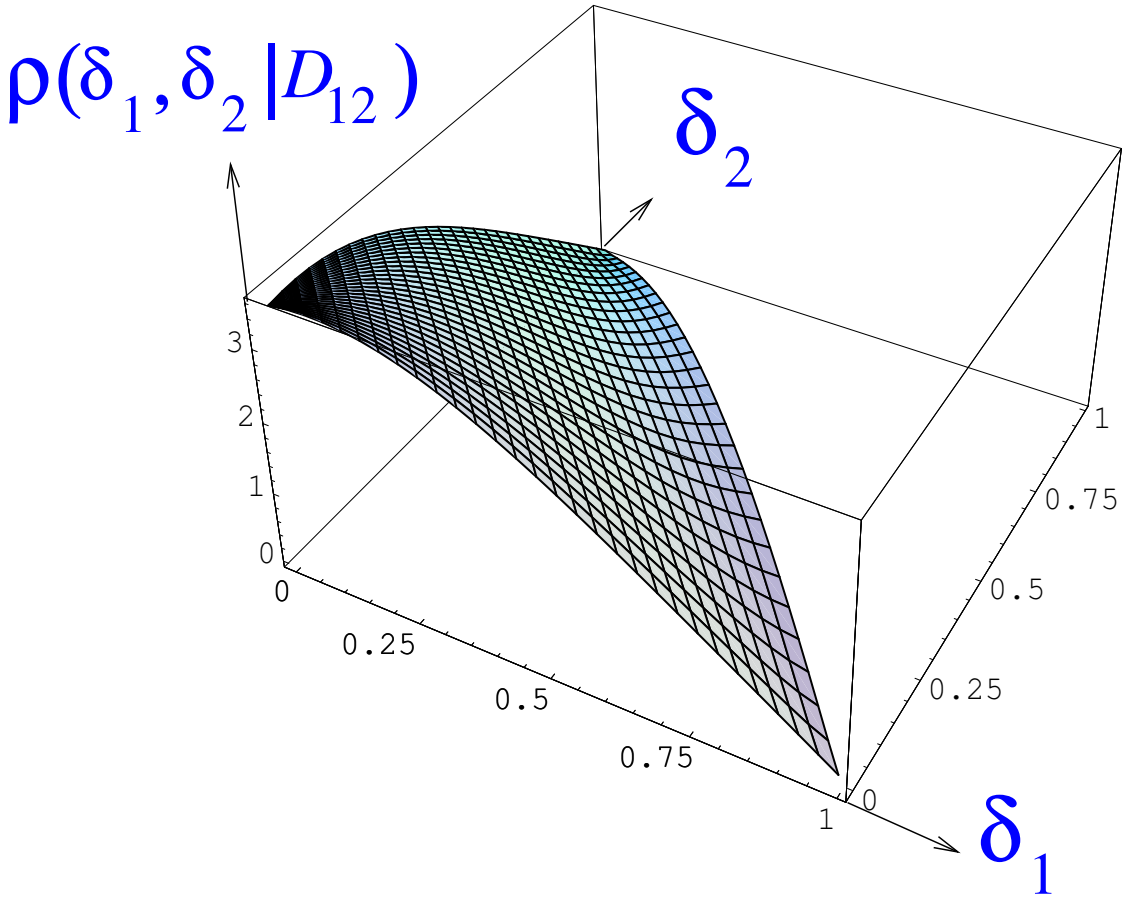
Dans une grande carte aléatoire les triangles ont 6 côtés !



Autres résultats (B.-Guitter '08)

Dans une grande carte aléatoire les triangles ont 6 côtés !

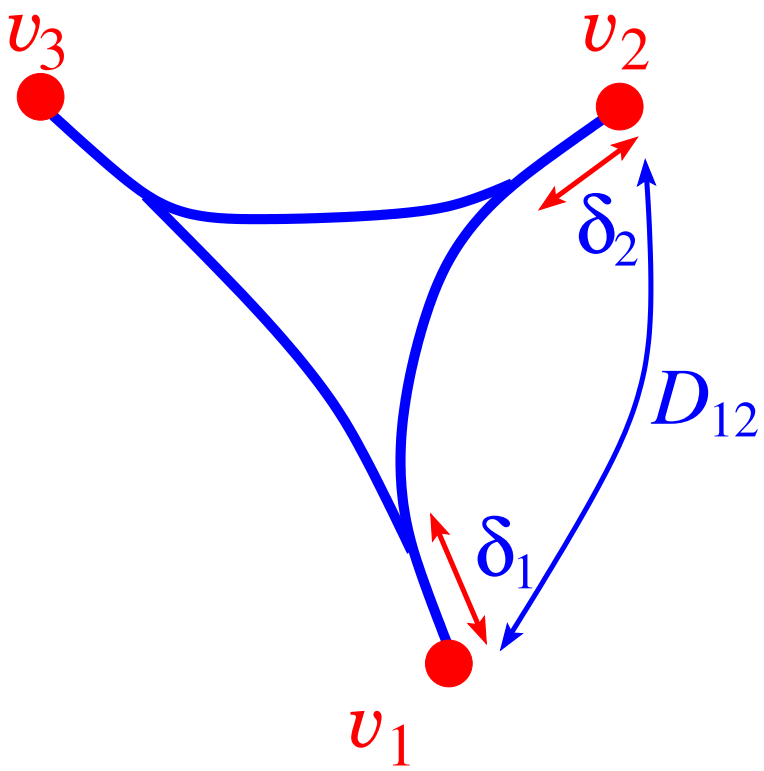


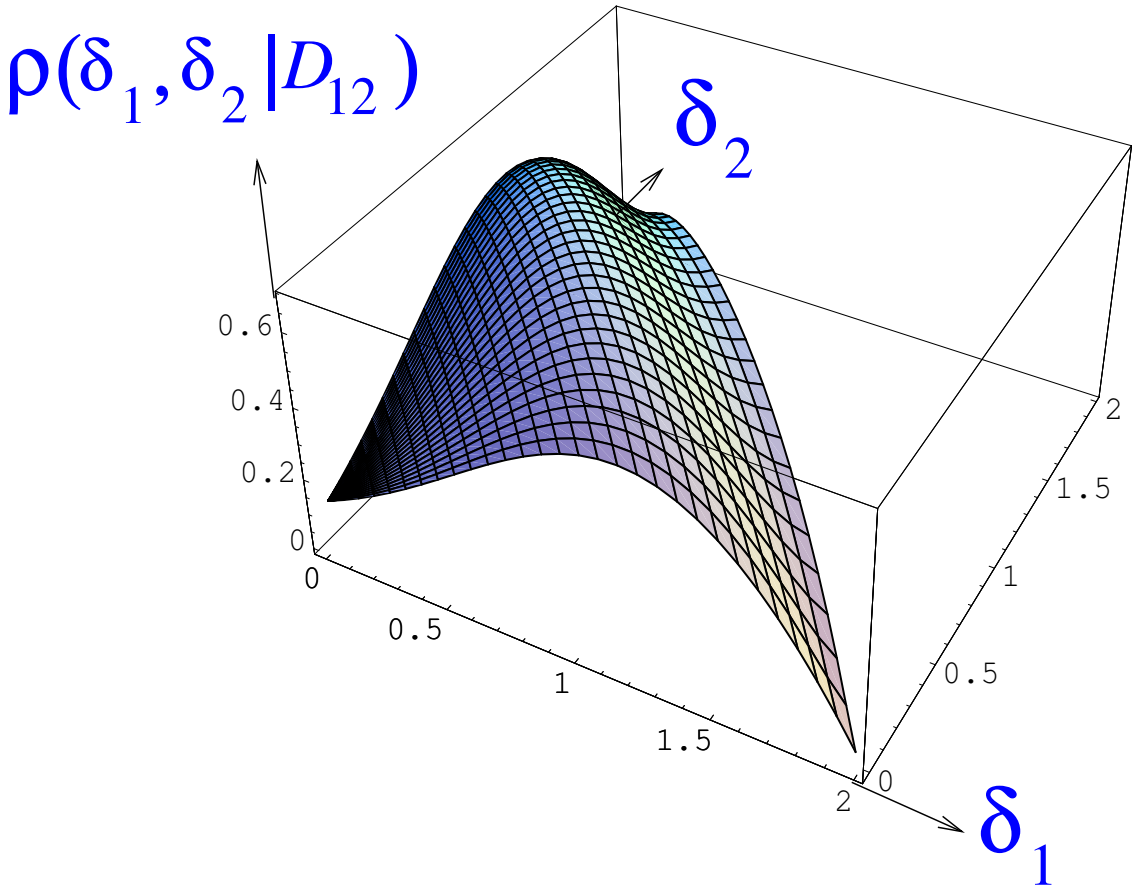


$$D_{12} = 1$$

Autres résultats (B.-Guitter '08)

Dans une grande carte aléatoire les triangles ont 6 côtés !

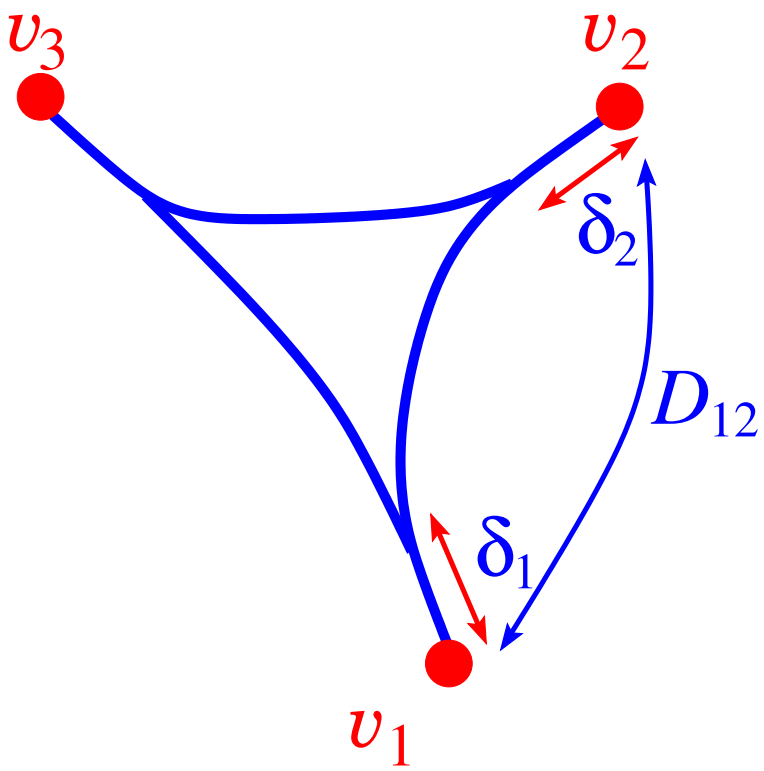


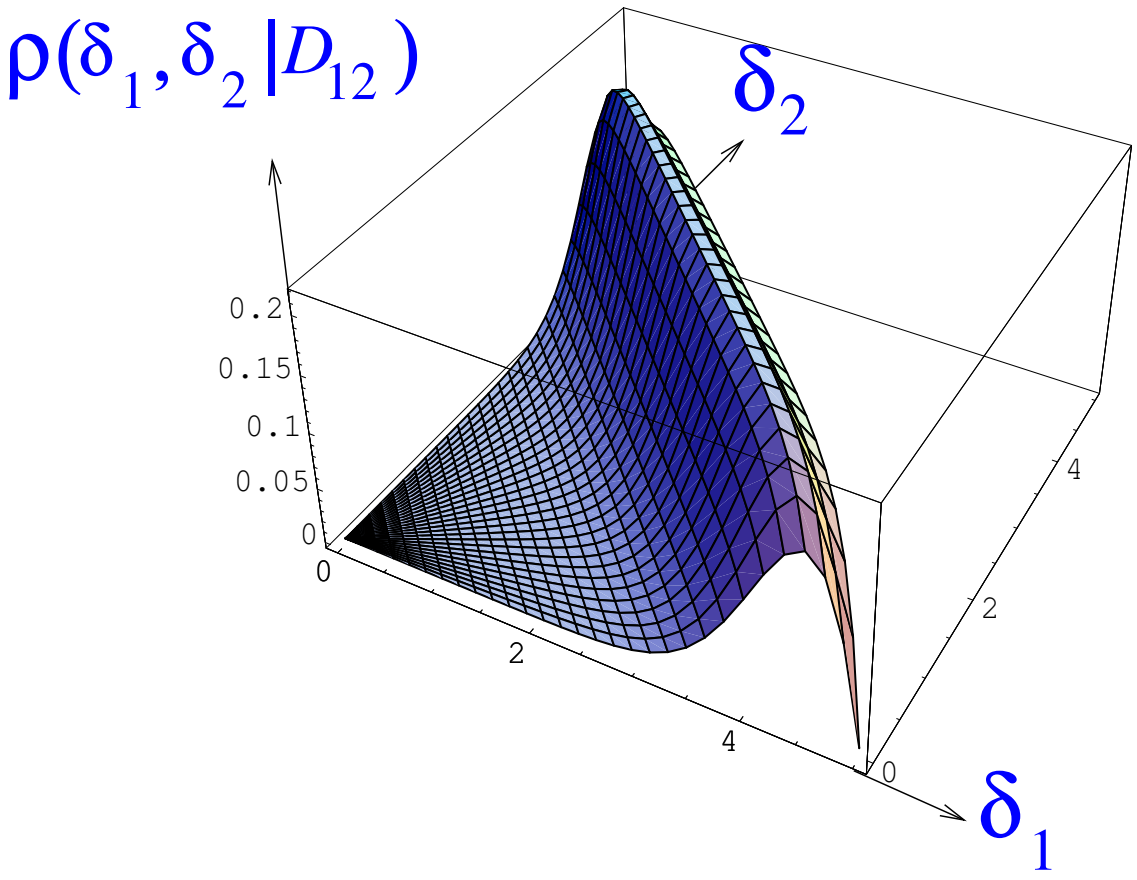


$$D_{12} = 2$$

Autres résultats (B.-Guitter '08)

Dans une grande carte aléatoire les triangles ont 6 côtés !

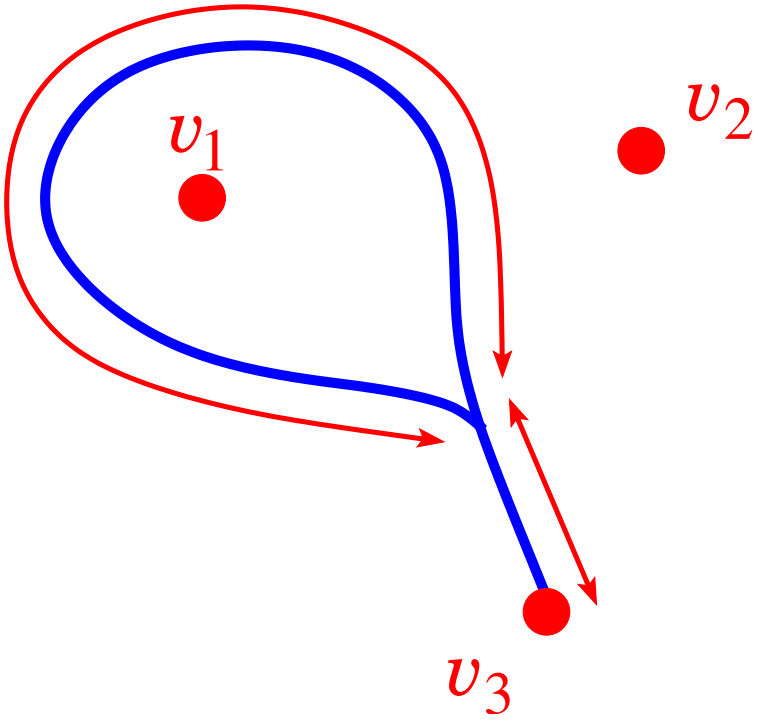




$D_{12} = 5$

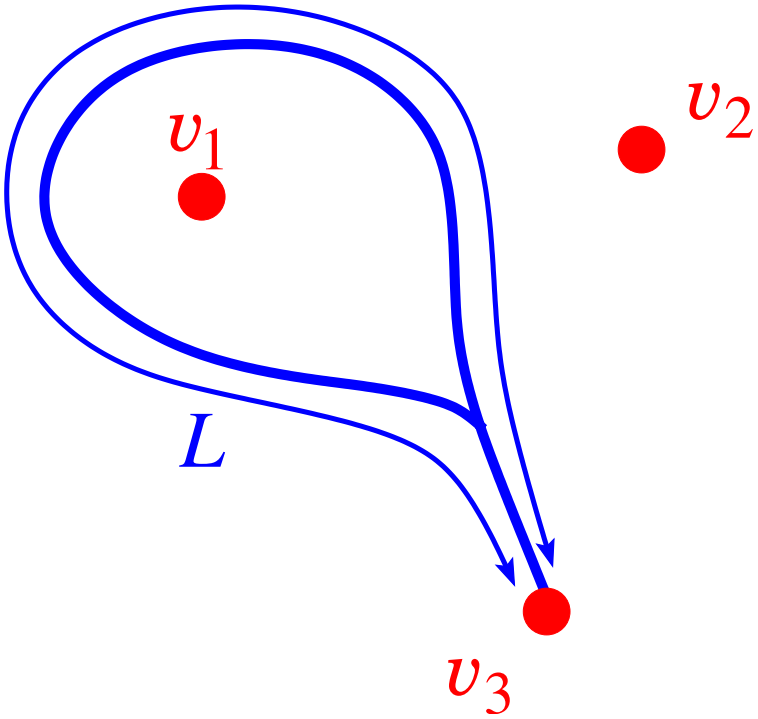
Autres résultats (B.-Guitter '08)

On peut également étudier les boucles séparantes.



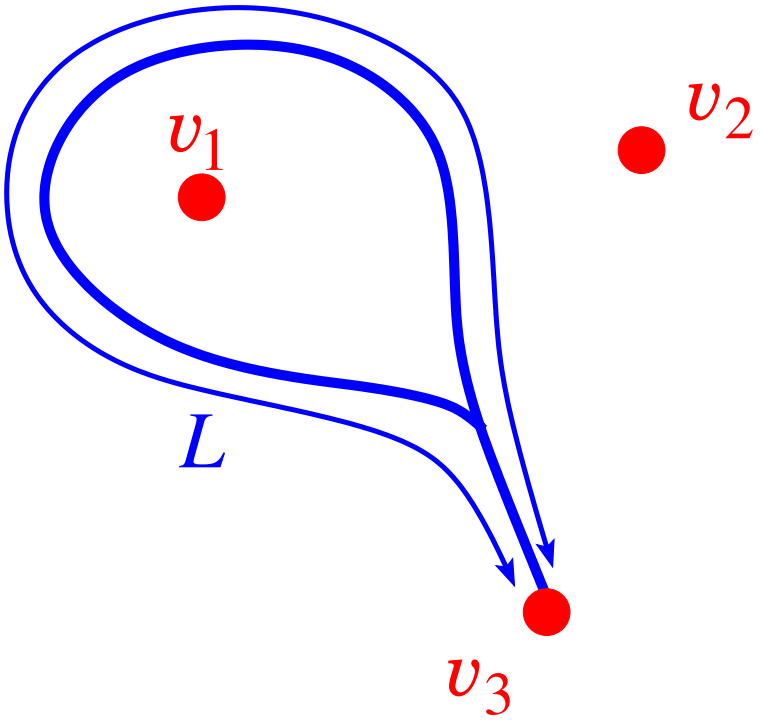
Autres résultats (B.-Guitter '08)

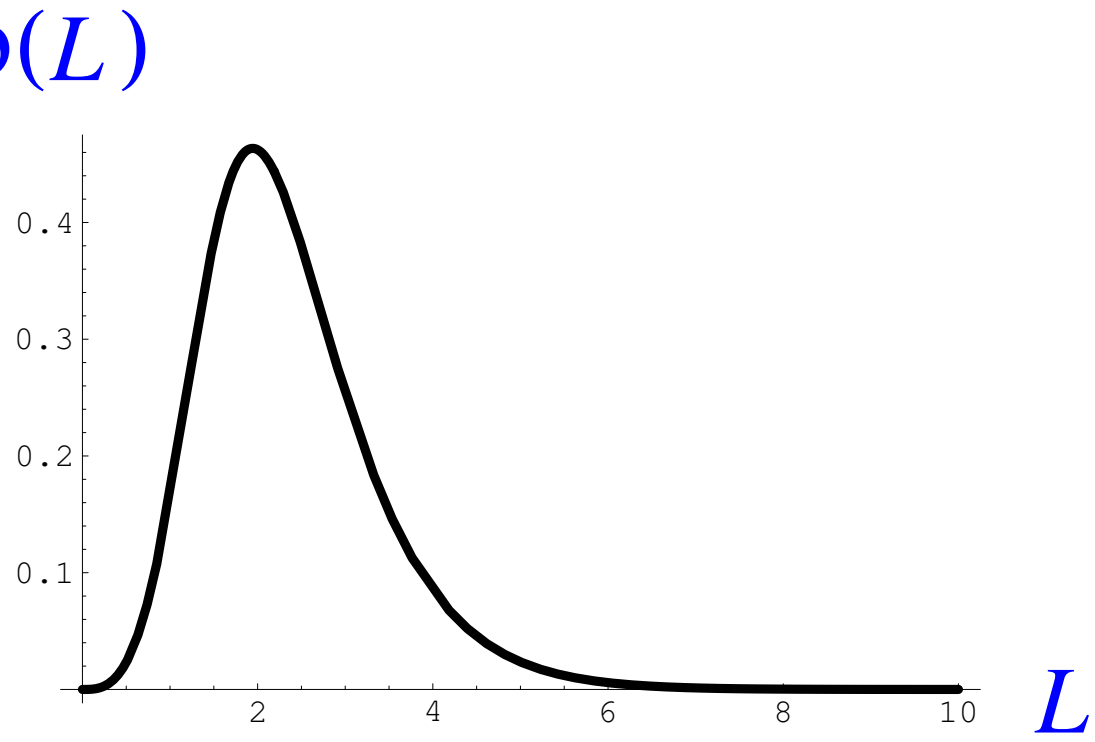
On peut également étudier les boucles séparantes.



Autres résultats (B.-Guitter '08)

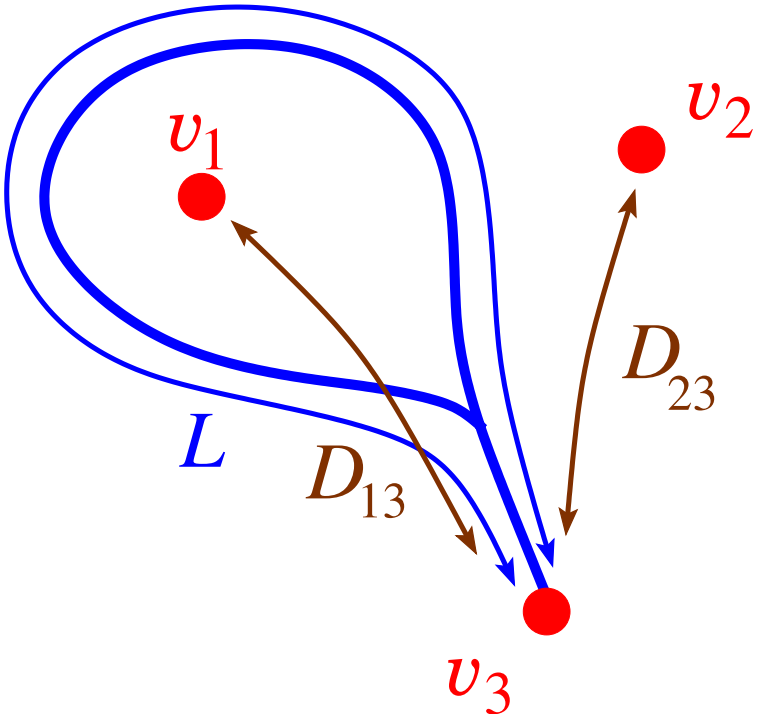
On peut également étudier les boucles séparantes.





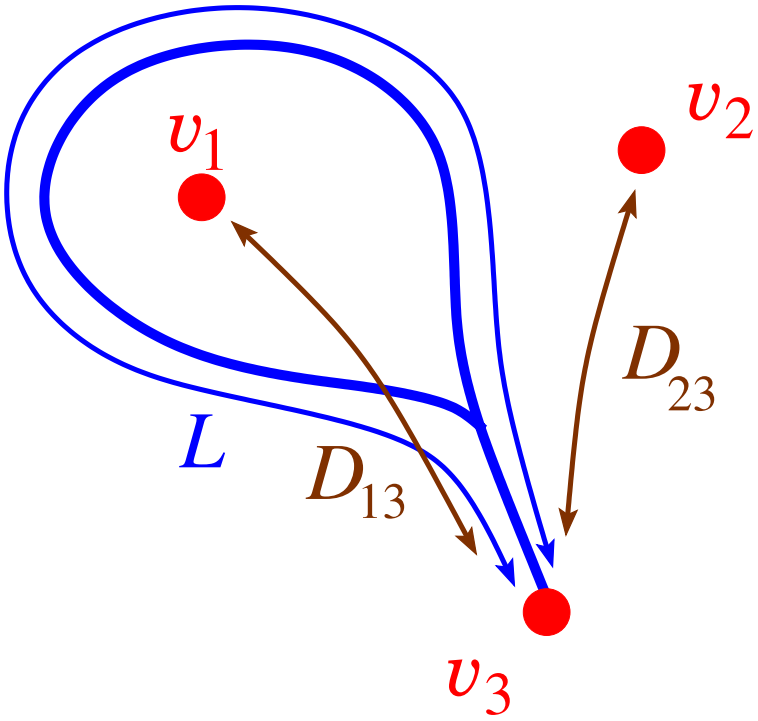
Autres résultats (B.-Guitter '08)

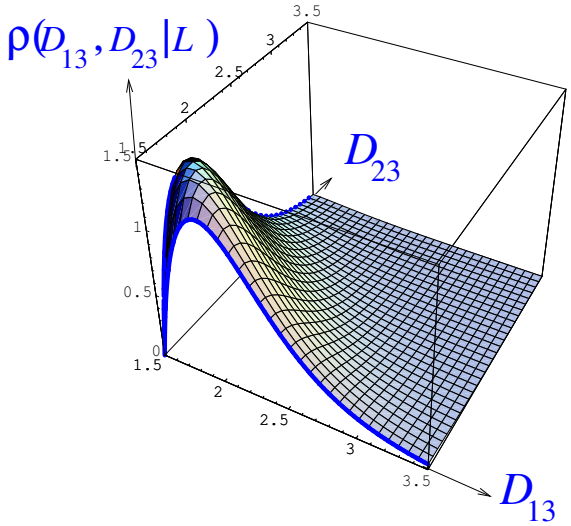
On peut également étudier les boucles séparantes.



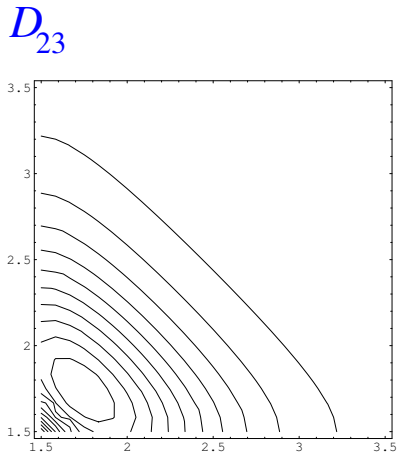
Autres résultats (B.-Guitter '08)

On peut également étudier les boucles séparantes.



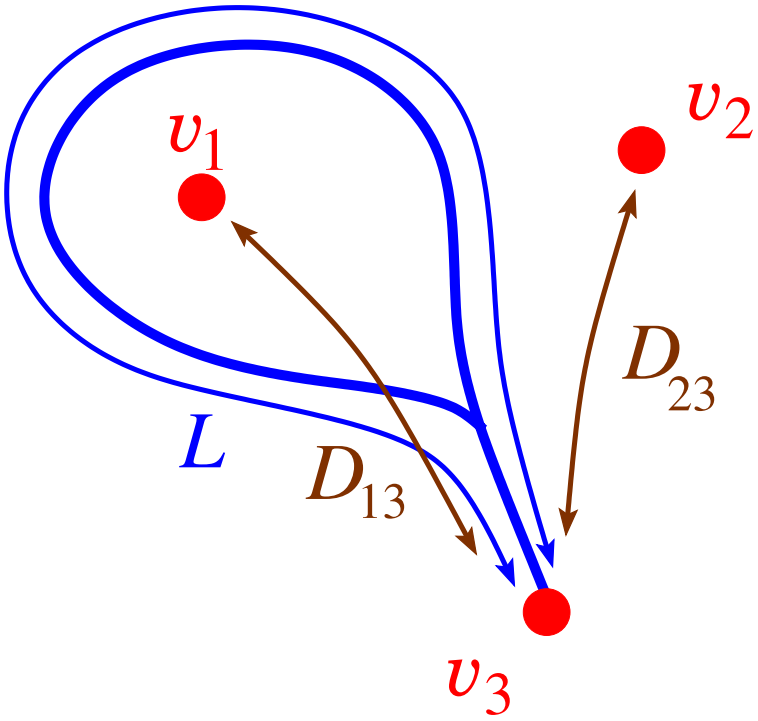


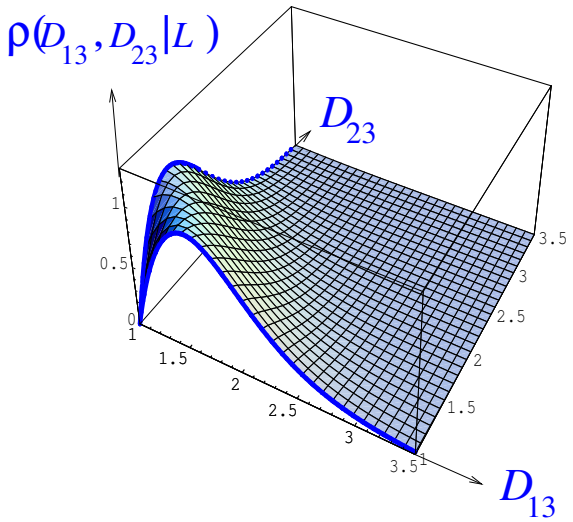
$L = 3$



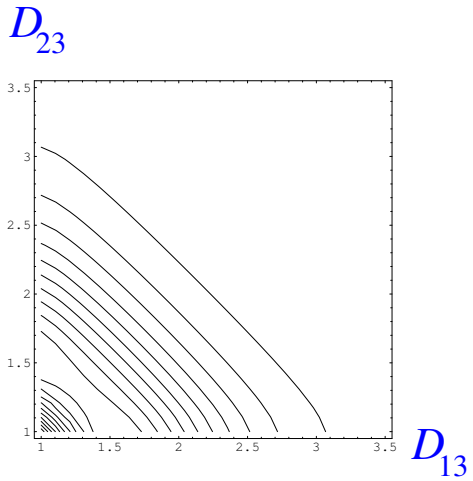
Autres résultats (B.-Guitter '08)

On peut également étudier les boucles séparantes.



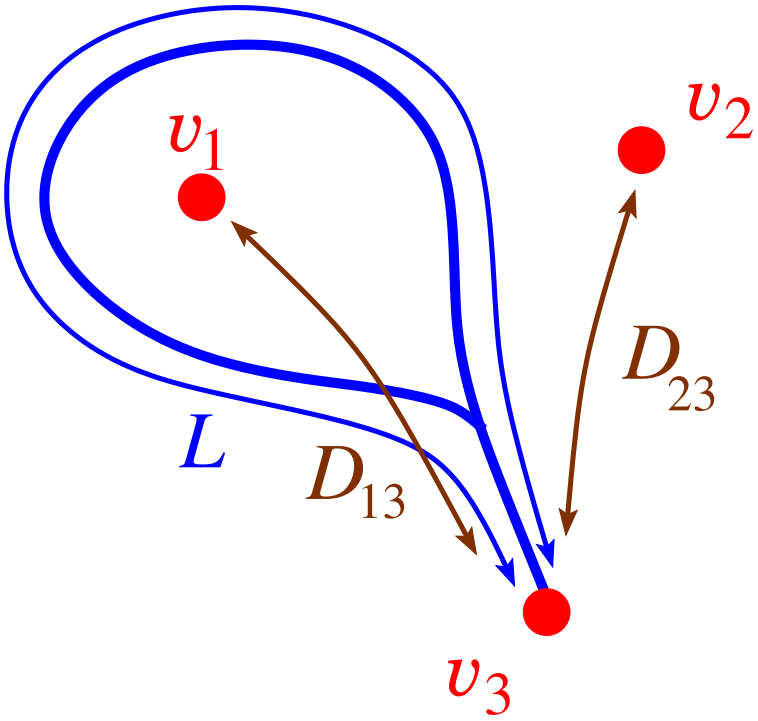


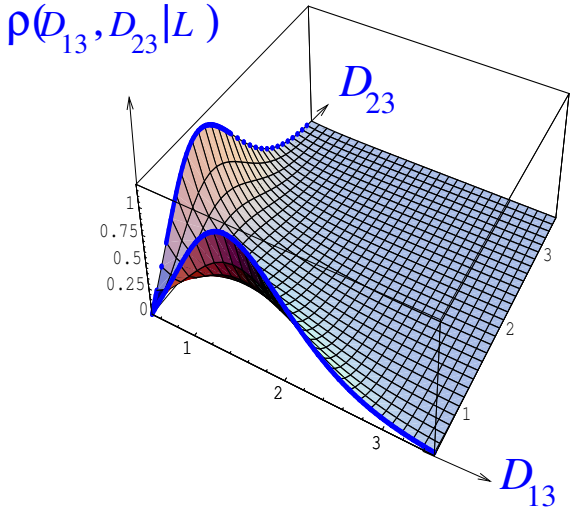
$L = 2$

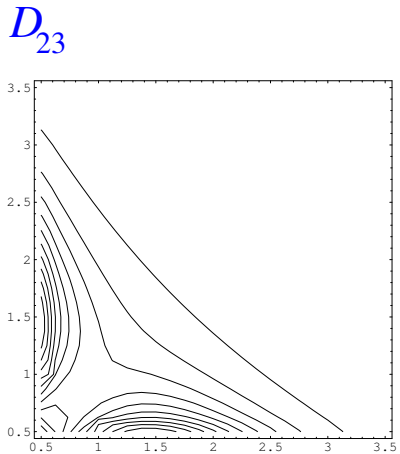


Autres résultats (B.-Guitter '08)

On peut également étudier les boucles séparantes.







$L = 5$

Origine combinatoire de l'intégrabilité (B.-Guitter '10)

En étudiant les cartes à bord, on s'est aperçu de la coïncidence suivante : si on note $\omega_{2p}(g)$ la série génératrice des quadrangulations à bord de longueur $2p$ (bien connue depuis 1960) et qu'on introduit la résolvante

$$\omega(z) = \sum_{p \geq 0} \omega_{2p} z^{2p}$$

Origine combinatoire de l'intégrabilité (B.-Guitter '10)

En étudiant les cartes à bord, on s'est aperçu de la coïncidence suivante : si on note $\omega_{2p}(g)$ la série génératrice des quadrangulations à bord de longueur $2p$ (bien connue depuis 1960) et qu'on introduit la résolvante

$$\omega(z) = \sum_{p \geq 0} \omega_{2p} z^{2p}$$

alors la fonction à deux points apparaît dans le développement en fraction continue de $\omega(z)$!

$$\omega(z) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{R_1 z^2}{1 - \cfrac{R_2 z^2}{1 - \cdots}}}$$

Origine combinatoire de l'intégrabilité (B.-Guitter '10)

À nouveau cela reste vrai dans un cadre plus général que celui des quadrangulations.

Origine combinatoire de l'intégrabilité (B.-Guitter '10)

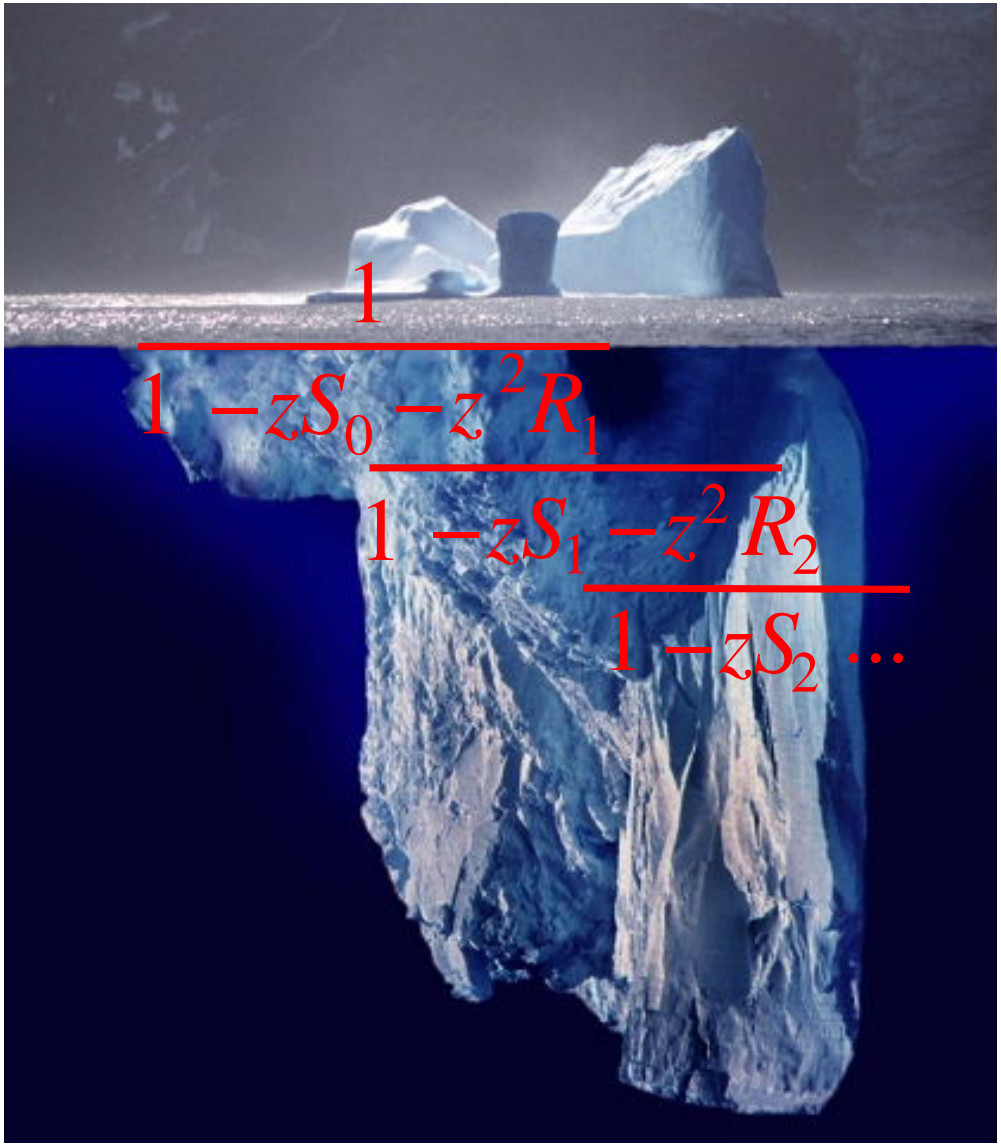
À nouveau cela reste vrai dans un cadre plus général que celui des quadrangulations.

$$R_\ell = R\,\frac{\det\limits_{1\le m,n\le M}[\ell+1+n]_m\ \det\limits_{1\le m,n\le M}[\ell-1+n]_m}{\left(\det\limits_{1\le m,n\le M}[\ell+n]_m\right)^2}$$

$$S_\ell = S - \sqrt{R}\left(\frac{\det\limits_{1\le m,n\le M}[\ell+1+n-\delta_{n,1}]_m}{\det\limits_{1\le m,n\le M}[\ell+1+n]_m} - \frac{\det\limits_{1\le m,n\le M}[\ell+n-\delta_{n,1}]_m}{\det\limits_{1\le m,n\le M}[\ell+n]_m}\right)$$

Origine combinatoire de l'intégrabilité (B.-Guitter '10)

Origine combinatoire de l'intégrabilité (B.-Guitter '10)

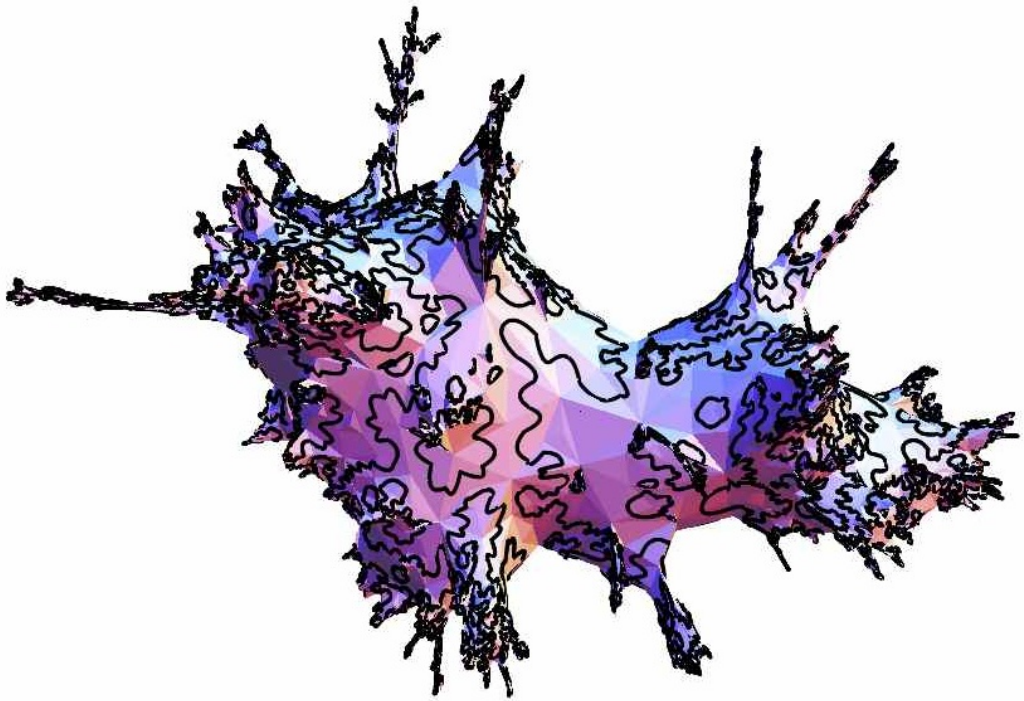


La suite ?

On obtient de nombreux résultats caractérisant la carte brownienne, classe d'universalité de cartes aléatoires.

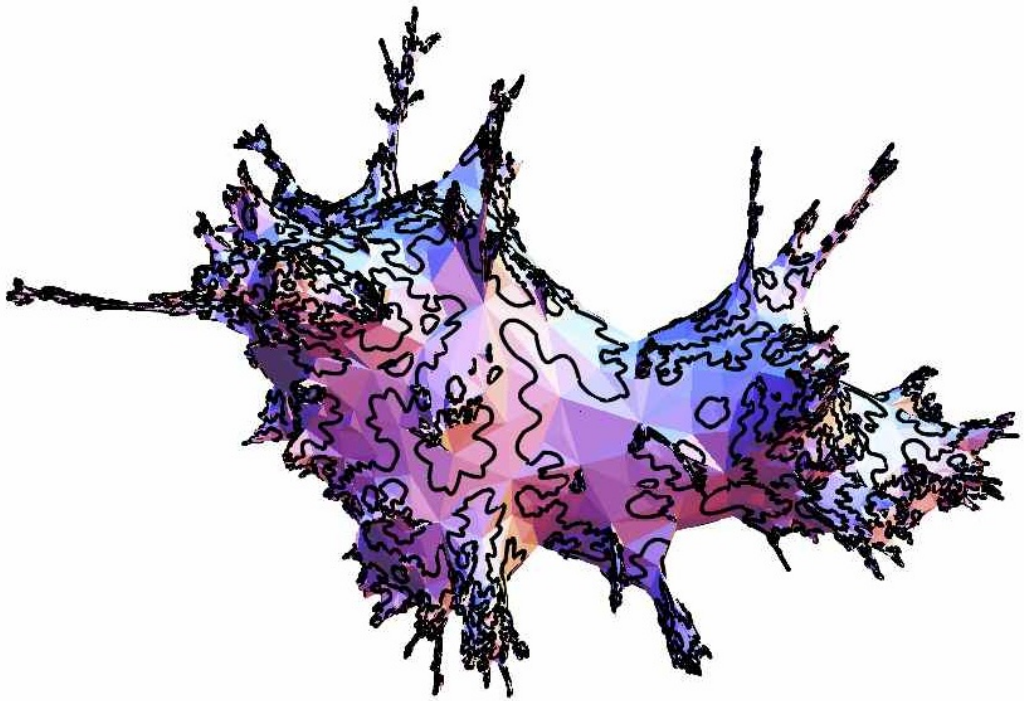
La suite ?

On obtient de nombreux résultats caractérisant la carte brownienne, classe d'universalité de cartes aléatoires. En existe-t-il d'autres ? Oui si on considère des cartes décorées par un modèle de physique statistique !



La suite ?

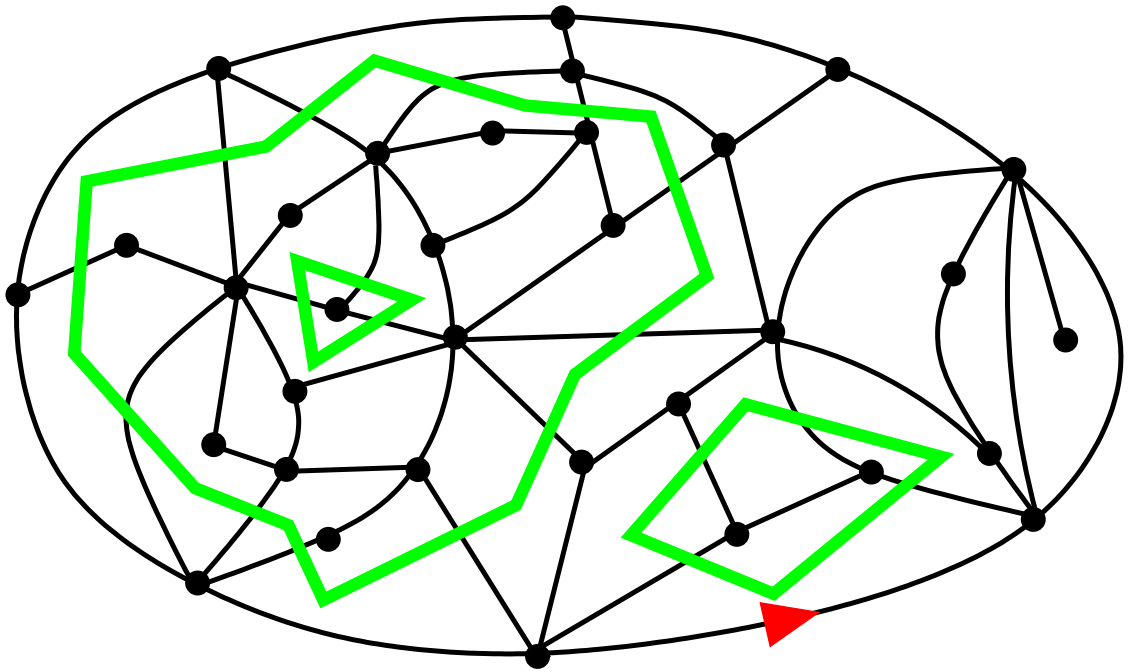
On obtient de nombreux résultats caractérisant la carte brownienne, classe d'universalité de cartes aléatoires. En existe-t-il d'autres ? Oui si on considère des cartes décorées par un modèle de physique statistique !



Aux points critiques la classe d'universalité est différente.

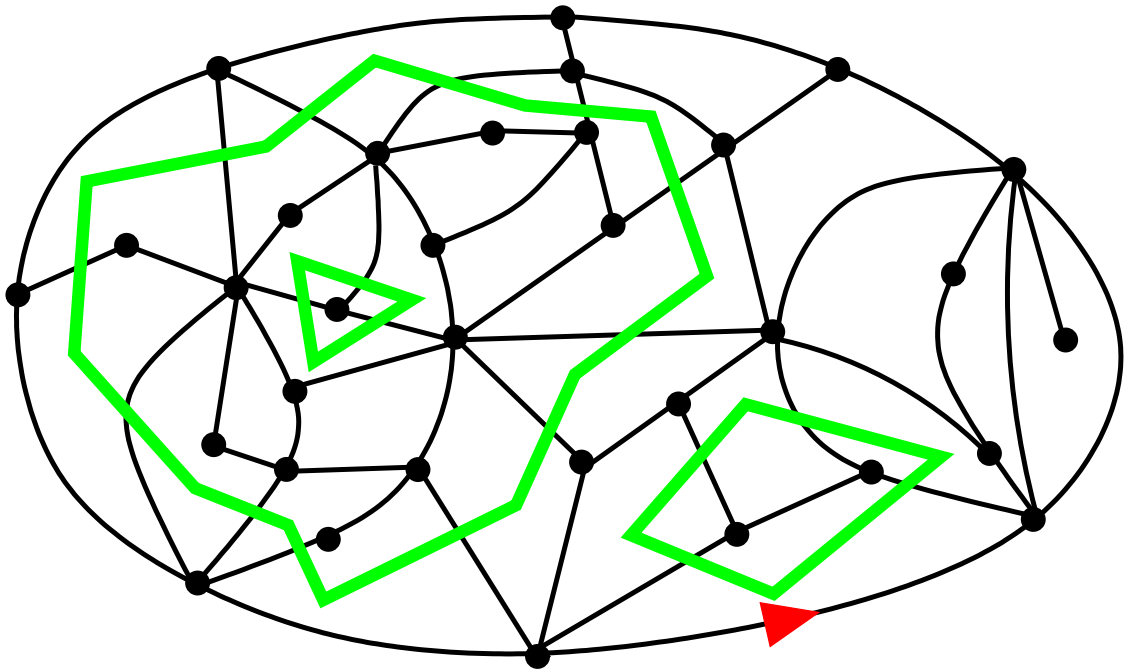
Le modèle O(n) sur les cartes aléatoires (Borot-B.-Guitter '11-'12)

On considère une carte sur laquelle vivent des boucles auto et mutuellement évitantes, avec une fugacité n par boucle.



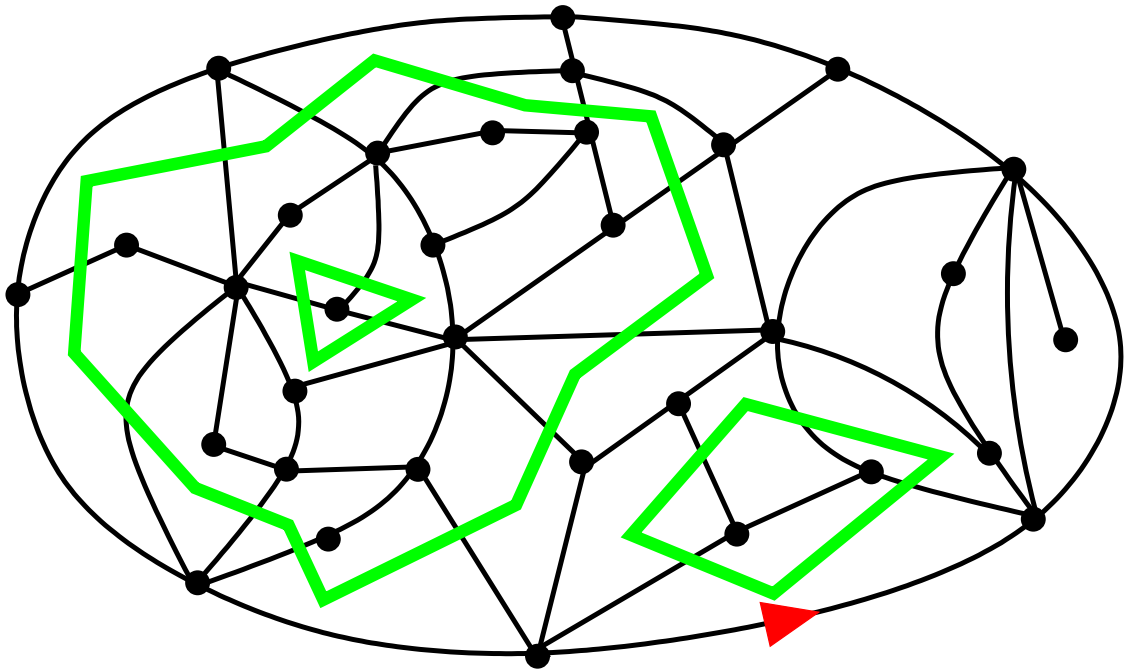
Le modèle O(n) sur les cartes aléatoires (Borot-B.-Guitter '11-'12)

On considère une carte sur laquelle vivent des boucles auto et mutuellement évitantes, avec une fugacité n par boucle.



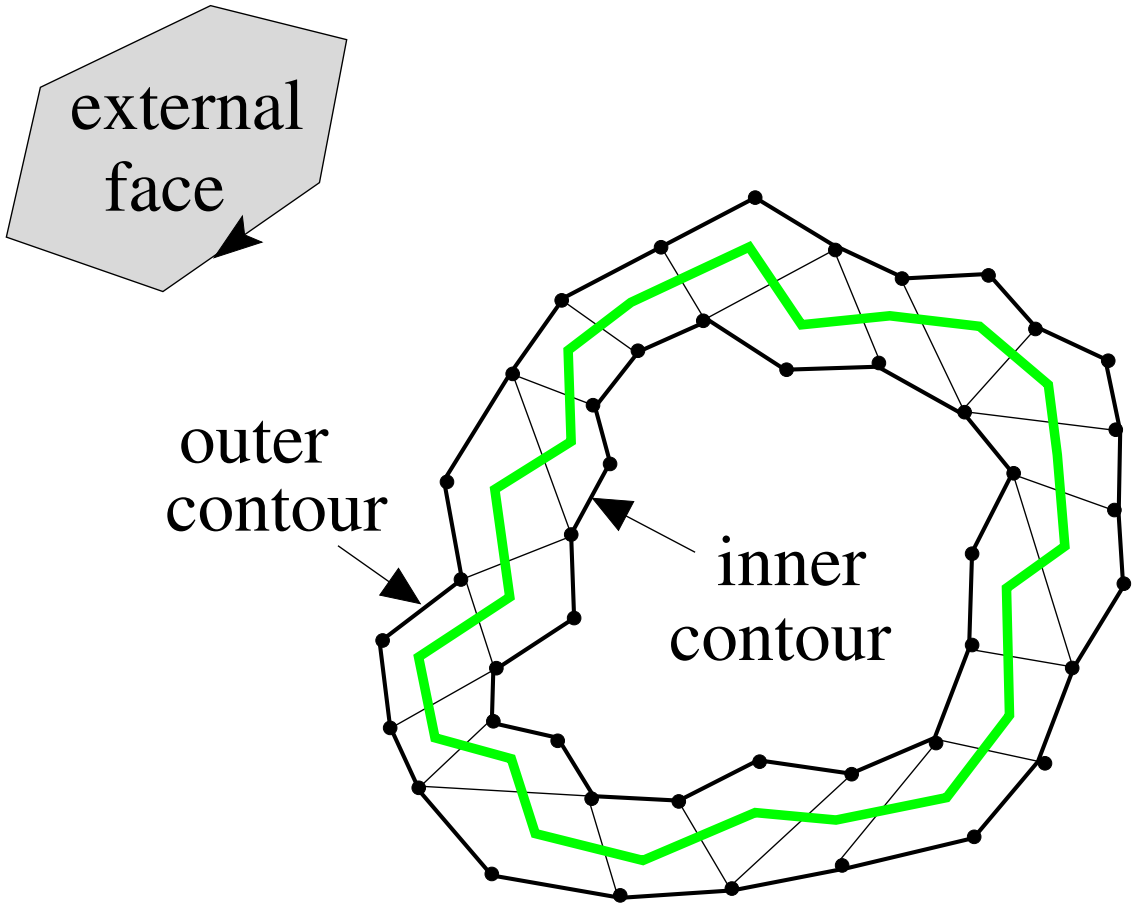
C'est un modèle soluble (Kostov, Eynard...) généralisant d'autres modèles classiques (percolation, Ising, Potts). Au-delà des exposants critiques on s'intéresse ici à la géométrie sous-jacente.

Le modèle O(n) sur les cartes aléatoires (Borot-B.-Guitter '11-'12)



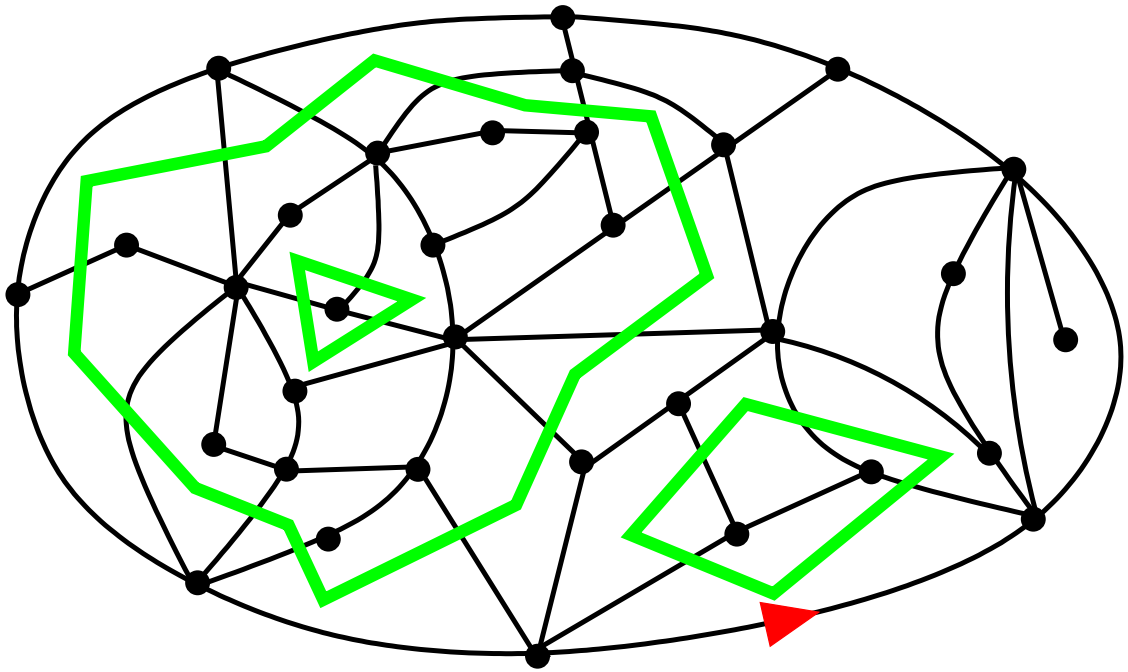
Notre approche repose sur une décomposition combinatoire simple : on part d'une configuration du modèle O(n).

Le modèle O(n) sur les cartes aléatoires (Borot-B.-Guitter '11-'12)



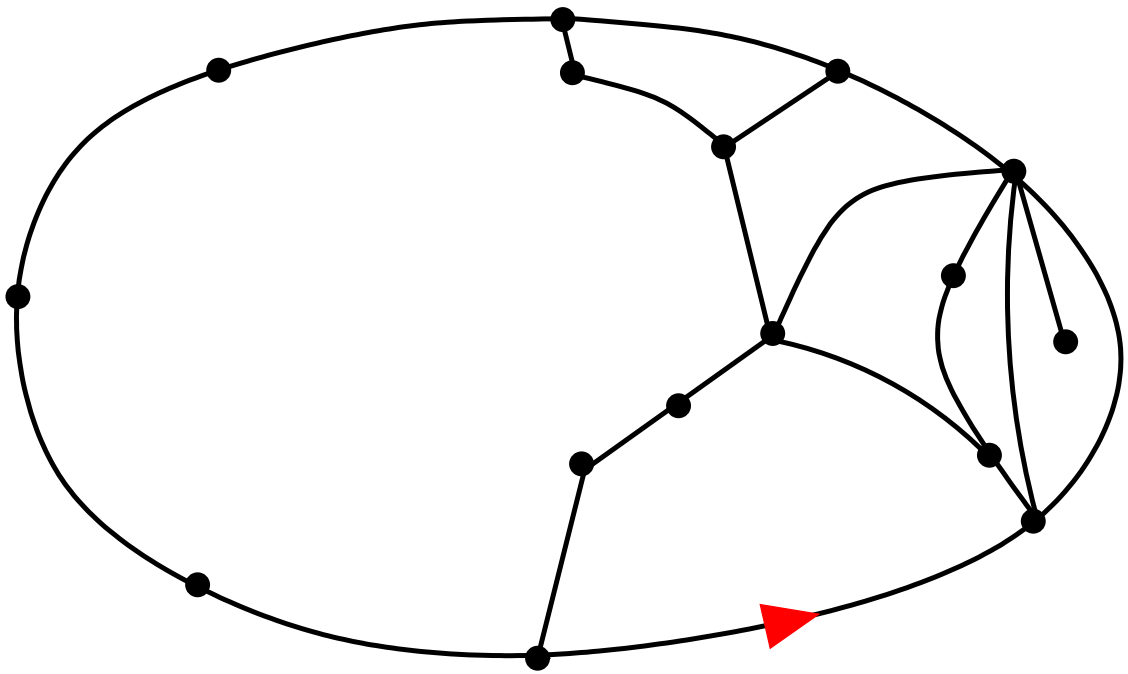
Les faces visitées par une boucle forment un collier.

Le modèle O(n) sur les cartes aléatoires (Borot-B.-Guitter '11-'12)



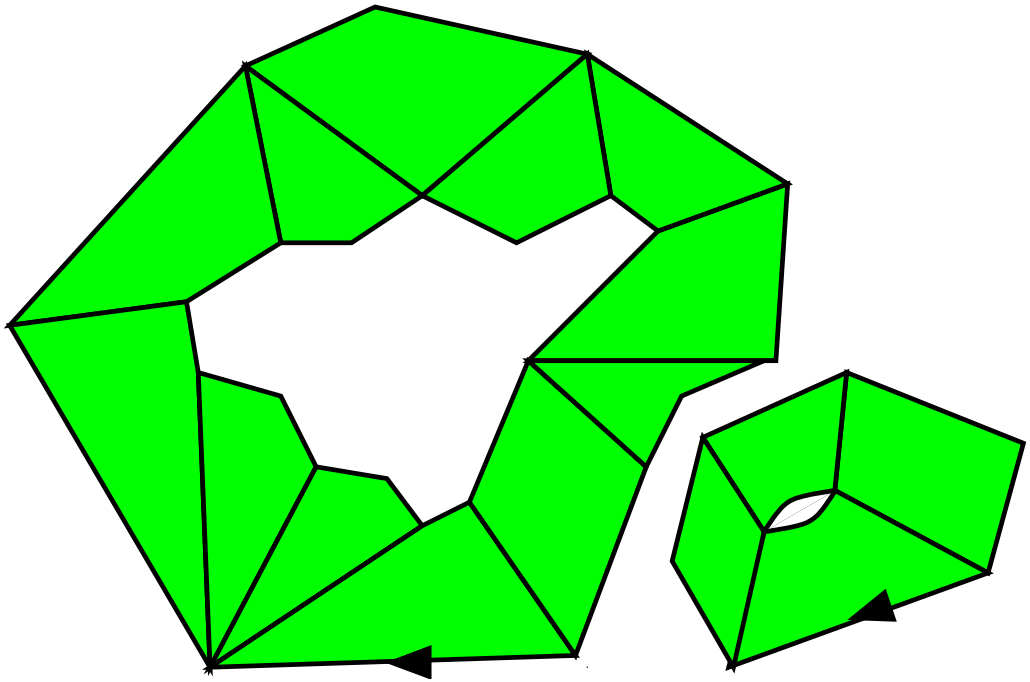
On coupe le long des contours des boucles extérieures.

Le modèle O(n) sur les cartes aléatoires (Borot-B.-Guitter '11-'12)



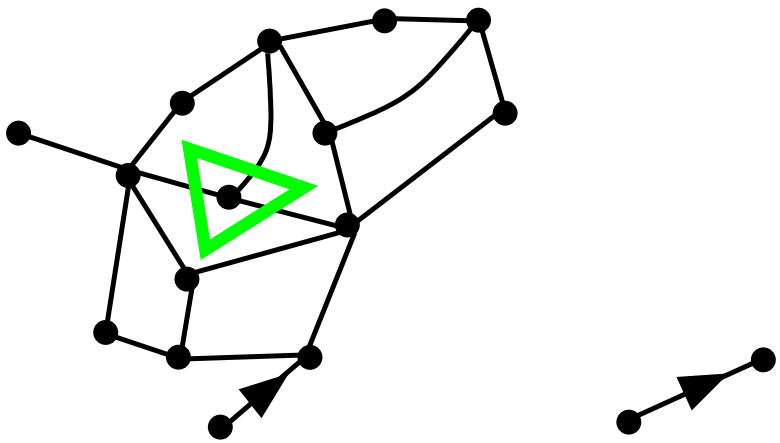
La partie externe forme le tamis (*gasket*).

Le modèle O(n) sur les cartes aléatoires (Borot-B.-Guitter '11-'12)



Chaque boucle externe forme un collier formé de polygones collés bord à bord.

Le modèle O(n) sur les cartes aléatoires (Borot-B.-Guitter '11-'12)



Chaque boucle externe contient une configuration interne de même nature que la configuration de départ.

Le modèle O(n) sur les cartes aléatoires (Borot-B.-Guitter '11-'12)

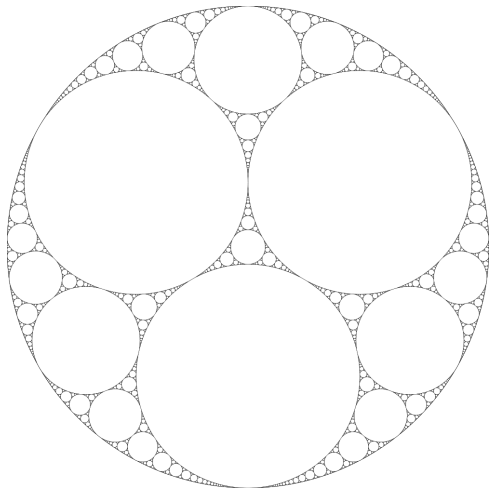
Résultats :

- on déduit une équation fonctionnelle permettant de calculer la fonction de partition du modèle,
- on détermine le diagramme de phase exact,
- on caractérise la géométrie du tamis aux points critiques.

Le modèle O(n) sur les cartes aléatoires (Borot-B.-Guitter '11-'12)

Résultats :

- on déduit une équation fonctionnelle permettant de calculer la fonction de partition du modèle,
- on détermine le diagramme de phase exact,
- on caractérise la géométrie du tamis aux points critiques. Elle coïncide avec celle des cartes à grandes faces (Le Gall-Miermont '09).

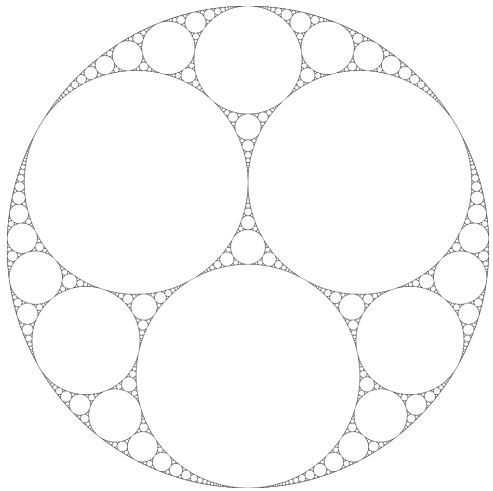


Le modèle O(n) sur les cartes aléatoires (Borot-B.-Guitter '11-'12)

Résultats :

- on déduit une équation fonctionnelle permettant de calculer la fonction de partition du modèle,
- on détermine le diagramme de phase exact,
- on caractérise la géométrie du tamis aux points critiques. Elle coïncide avec celle des cartes à grandes faces (Le Gall-Miermont '09). La dimension fractale est différente du 4 de la carte brownienne et vaut

$$d_H = 3 \pm \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{n}{2}\right), \qquad n \in (0,2).$$



Merci !