

Cartes aléatoires et gravité quantique

Jérémye Bouttier

Institut de physique théorique, CEA Saclay
Département de mathématiques et applications, ENS Paris

Forum de la Théorie, 3 avril 2013

Les années 60 : le début de l'histoire



William Thomas "Bill" Tutte (1917–2002)

Les années 60 : le début de l'histoire



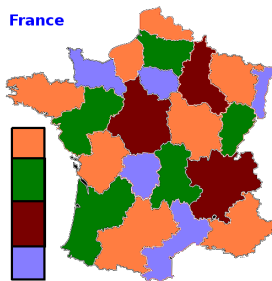
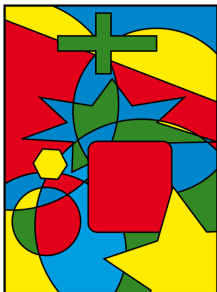
William Thomas "Bill" Tutte (1917–2002)

« the leading mathematician in combinatorics for three decades »

Contributions en théorie des graphes et matroïdes : théorème BEST, théorème d'homotopie, matrice de Tutte, formule de Tutte-Berge, graphe de Tutte-Coxeter, polynôme dichromatique... et premiers résultats sur les **cartes**.

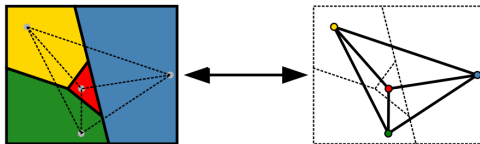
Motivation : théorème des quatre couleurs

Toute “carte” peut être coloriée en quatre couleurs (preuve : Appel et Haken, 1976).



Formalisation mathématique de la notion de carte

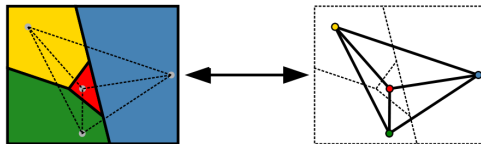
Une **carte** (planaire) peut être vue comme un **graphe** dessiné dans le plan sans croisement d'arêtes.



Constituants d'une carte : **sommets**, **arêtes**, **faces**.

Formalisation mathématique de la notion de carte

Une **carte** (planaire) peut être vue comme un **graphe** dessiné dans le plan sans croisement d'arêtes.



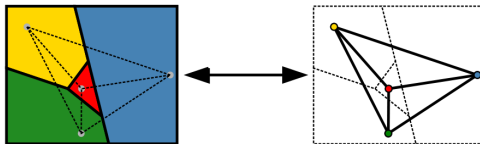
Constituants d'une carte : **sommets**, **arêtes**, **faces**.

Relation d'Euler (carte planaire) :

$$\#\{\text{sommets}\} - \#\{\text{arêtes}\} + \#\{\text{faces}\} = 2.$$

Formalisation mathématique de la notion de carte

Une **carte** (planaire) peut être vue comme un **graphe** dessiné dans le plan sans croisement d'arêtes.



Constituants d'une carte : **sommets**, **arêtes**, **faces**.

Relation d'Euler (carte de genre h) :

$$\#\{\text{sommets}\} - \#\{\text{arêtes}\} + \#\{\text{faces}\} = 2 - 2h.$$

Si toutes les faces ont trois côtés, la carte est une **triangulation**, quatre côtés, une **quadrangulation**, etc.

Comptage des cartes

Question : **combien** existe-t-il de cartes à n arêtes ? ($n = 0, 1, 2, 3 \dots$)

Par un comptage « manuel » : 1, 2, 9, 54, 378, 2916, ...

A CENSUS OF PLANAR MAPS

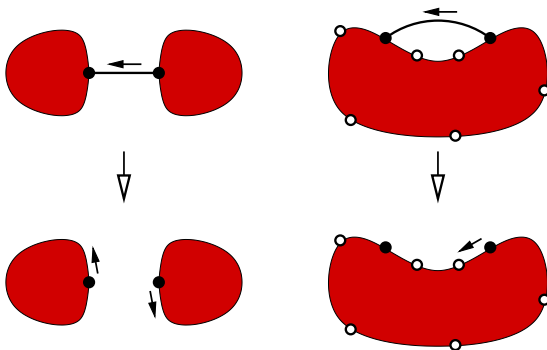
W. T. TUTTE

1. Introduction. In the series of “Census” papers, of which this is the fourth, we attempt to lay the groundwork of an enumerative theory of planar maps (**12, 13, 14**). The maps concerned are *rooted* in the sense that some edge is fixed as the *root*, and a positive sense of description and right and left sides are specified for it. This device simplifies the theory by ruling out the possibility of a map being symmetrical.

In this paper formulae are obtained for the number of rooted maps (with n edges), the number of non-separable rooted maps, and the number of 3-connected rooted maps without multiple joins (called *c*-nets). Some similar enumerations, supplementing the results of earlier papers, are given for triangulations and bicubic maps.

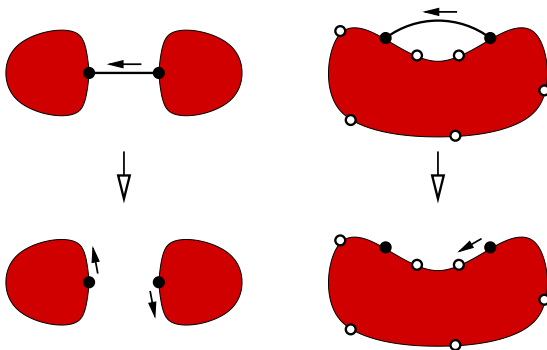
Comptage des cartes

Notons $M_{n,k}$ le nombre de cartes à n arêtes, dont la face externe a k côtés.



Comptage des cartes

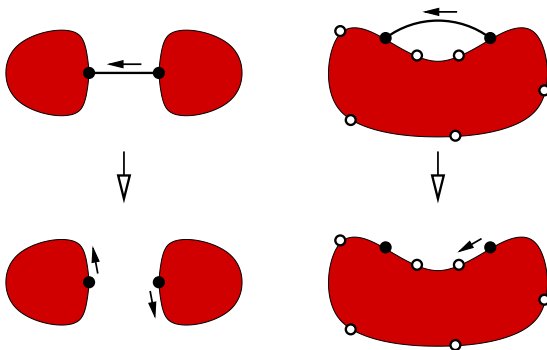
Notons $M_{n,k}$ le nombre de cartes à n arêtes, dont la face externe a k côtés.



$$M_{n,k} = \sum_{\substack{n_1+n_2=n-1 \\ k_1+k_2=k-2}} M_{n_1,k_1} M_{n_2,k_2} + \sum_{j \geq 1} M_{n-1,k+j-2}$$

Comptage des cartes

Notons $M_{n,k}$ le nombre de cartes à n arêtes, dont la face externe a k côtés.

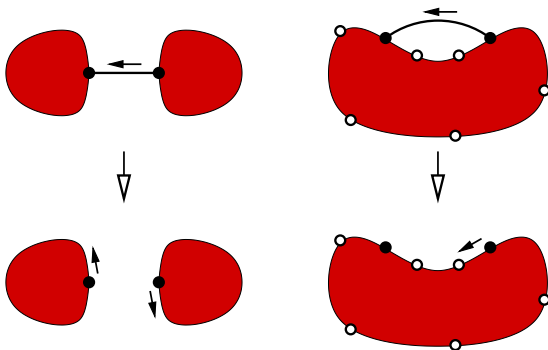


$$M_{n,k} = \sum_{\substack{n_1+n_2=n-1 \\ k_1+k_2=k-2}} M_{n_1,k_1} M_{n_2,k_2} + \sum_{j \geq 1} M_{n-1,k+j-2}$$

(vrai pour $n \geq 1$, avec $M_{0,k} = 1$ si $k = 0$, 0 sinon)

Comptage des cartes

Notons $M_{n,k}$ le nombre de cartes à n arêtes, dont la face externe a k côtés.



$$M(x, y) = 1 + xy^2 M(x, y)^2 + xy \frac{M(x, 1) - yM(x, y)}{1 - y}$$

où $M(x, y)$ est la série génératrice $\sum_{n,k \geq 0} M_{n,k} x^n y^k$.

Comptage des cartes

Tutte inventa la *méthode quadratique* pour résoudre une telle équation fonctionnelle à une *variable catalytique*, et aboutit au :

Théorème (1963)

Le nombre de cartes planaires enracinées à n arêtes est $2 \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+2)!}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$2 \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+2)!}$	1	2	9	54	378	2916	24057	208494

Comptage des cartes

Tutte inventa la *méthode quadratique* pour résoudre une telle équation fonctionnelle à une *variable catalytique*, et aboutit au :

Théorème (1963)

Le nombre de cartes planaires enracinées à n arêtes est $2 \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+2)!}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$2 \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+2)!}$	1	2	9	54	378	2916	24057	208494

Pour $n \rightarrow \infty$,

$$2 \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+2)!} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{12^n}{n^{5/2}}$$

Comptage des cartes

Tutte inventa la *méthode quadratique* pour résoudre une telle équation fonctionnelle à une *variable catalytique*, et aboutit au :

Théorème (1963)

Le nombre de cartes planaires enracinées à n arêtes est $2 \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+2)!}$.

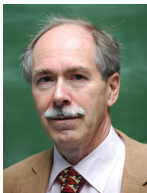
n	0	1	2	3	4	5	6	7
$2 \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+2)!}$	1	2	9	54	378	2916	24057	208494

Pour $n \rightarrow \infty$,

$$2 \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+2)!} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{12^n}{n^{5/2}}$$

L'exposant $5/2$ est **universel**.

Années 70 : les modèles de matrices



G. 't Hooft



É. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, J.-B. Zuber

Modèles de matrices

En étudiant la chromodynamique quantique (QCD), 't Hooft a considéré le cas où les particules ont un grand nombre N de couleurs (au lieu de 3 dans la vraie QCD). Il a montré que les diagrammes de Feynman «dominants» sont **planaires**.

Modèles de matrices

En étudiant la chromodynamique quantique (QCD), 't Hooft a considéré le cas où les particules ont un grand nombre N de couleurs (au lieu de 3 dans la vraie QCD). Il a montré que les diagrammes de Feynman «dominants» sont planaires.

Planar Diagrams

E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi*, and J. B. Zuber

Service de Physique Théorique, Centre d'Études Nucléaires de Saclay, F-91190 Gif-sur-Yvette, France

Abstract. We investigate the planar approximation to field theory through the limit of a large internal symmetry group. This yields an alternative and powerful method to count planar diagrams. Results are presented for cubic and quartic vertices, some of which appear to be new. Quantum mechanics treated in this approximation is shown to be equivalent to a free Fermi gas system.

BIPZ ont considéré le cas-limite d'une théorie à 0 dimensions, où le champ de jauge devient une simple **matrice** $N \times N$, avec N grand.

Le problème se ramène alors au calcul d'une **intégrale matricielle**.

3. Combinatorics of Quartic Vertices

1) Vacuum Diagrams

Setting each diagram equal to unity, apart from the overall weight, is equivalent to treat a field theory in zero dimension, in which space-time is reduced to one or to a finite number of points. It means that

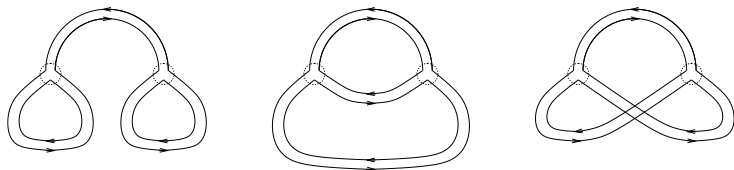
$$\exp - N^2 E^{(0)}(g) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int d^{N^2} M \exp - \left[\frac{1}{2} \text{tr} M^2 + \frac{g}{N} \text{tr} M^4 \right]. \quad (3)$$

The integration measure on hermitian matrices is

$$d^{N^2} M \equiv \prod_i dM_{ii} \prod_{i < j} d(\text{Re } M_{ij}) d(\text{Im } M_{ij}) \quad (4)$$

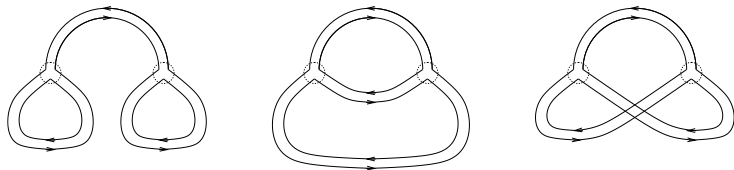
Modèles de matrices

D'une part, par un **développement perturbatif**, l'intégrale se réexprime comme une somme sur des diagrammes de Feynman.



Modèles de matrices

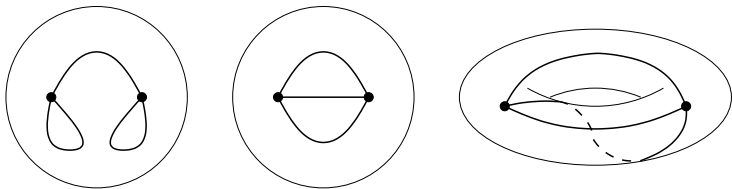
D'une part, par un développement perturbatif, l'intégrale se réexprime comme une somme sur des diagrammes de Feynman.



Chaque diagramme a un **poids** $N^{\#\{\text{sommets}\} - \#\{\text{arêtes}\} + \#\{\text{faces}\}} = N^{2-2h}$.

Modèles de matrices

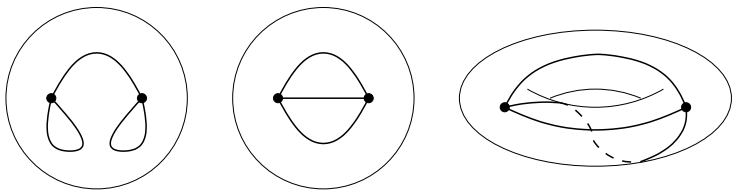
D'une part, par un développement perturbatif, l'intégrale se réexprime comme une somme sur des diagrammes de Feynman.



Chaque diagramme a un **poids** $N^{\#\{\text{sommets}\} - \#\{\text{arêtes}\} + \#\{\text{faces}\}} = N^{2-2h}$.

Modèles de matrices

D'une part, par un développement perturbatif, l'intégrale se réexprime comme une somme sur des diagrammes de Feynman.



Chaque diagramme a un poids $N^{\#\{\text{sommets}\} - \#\{\text{arêtes}\} + \#\{\text{faces}\}} = N^{2-2h}$.
Quand N est grand, les diagrammes **dominants** sont les cartes planaires !

Table 1. Counting rules for the vacuum amplitude $E^{(0)}(g)$ in the planar limit, up to order three

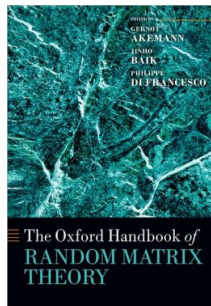
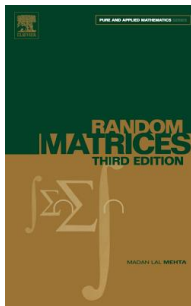
 $2g$	 $2g^2$	 $16g^2$	 $\frac{32}{3} g^3$
 $64g^3$	 $128g^3$	 $\frac{256}{3} g^3$	

Modèles de matrices

D'autre part, les intégrales matricielles sont largement étudiées en **théorie des matrices aléatoires**.

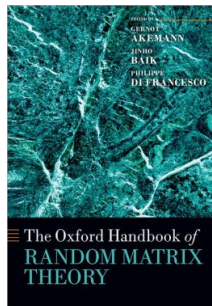
Modèles de matrices

D'autre part, les intégrales matricielles sont largement étudiées en théorie des matrices aléatoires.



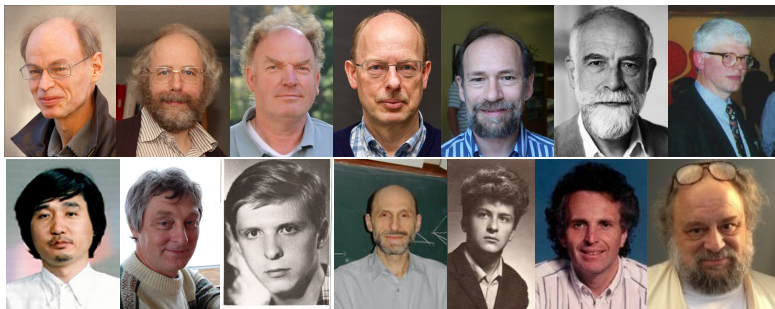
Modèles de matrices

D'autre part, les intégrales matricielles sont largement étudiées en théorie des matrices aléatoires.



Moult **techniques** sur le marché : méthode du col, polynômes orthogonaux, équations de Schwinger-Dyson (équivalent aux équations de Tutte), etc.

Années 80 : gravité quantique bidimensionnelle



Gravité quantique bidimensionnelle

A.M. Polyakov, 1981 : *“There are methods and formulae in science, which serve as master-keys to many apparently different problems. The resources of such things have to be refilled from time to time. In my opinion at the present time we have to develop an art of handling sums over random surfaces.”*



Gravité quantique bidimensionnelle

A.M. Polyakov, 1981 : *“There are methods and formulae in science, which serve as master-keys to many apparently different problems. The resources of such things have to be refilled from time to time. In my opinion at the present time we have to develop an art of handling sums over random surfaces. These sums replace the old-fashioned (and extremely useful) sums over random paths. The replacement is necessary, because today gauge invariance plays the central role in physics. Elementary excitations in gauge theories are formed by the flux lines (closed in the absence of charges) and the time development of these lines forms the world surfaces. All transition amplitude are given by the sums over all possible surfaces with fixed boundary.”*

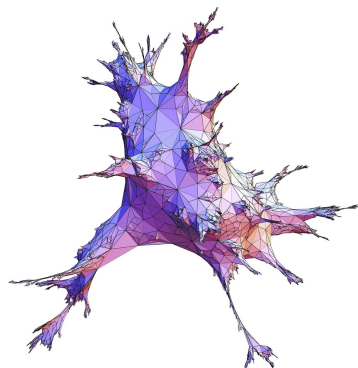


Les cartes comme discrétisation des surfaces aléatoires

Sommer sur les surfaces aléatoires est une opération mathématiquement mal définie.

Les cartes comme discrétisation des surfaces aléatoires

Sommer sur les surfaces aléatoires est une opération mathématiquement mal définie.
Idée (1985) : considérer une somme finie sur des surfaces discrètes (les cartes), dont on fera *in fine* tendre la taille vers l'infini.



V. Kazakov



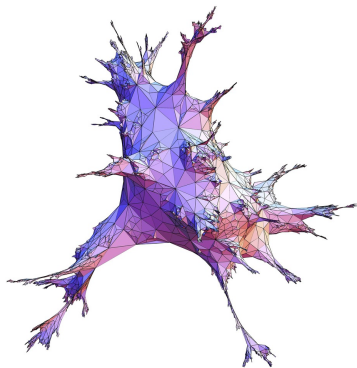
F. David



J. Ambjørn, B. Durhuus, J. Fröhlich

Les cartes comme discrétisation des surfaces aléatoires

Sommer sur les surfaces aléatoires est une opération mathématiquement mal définie. Idée (1985) : considérer une somme finie sur des surfaces discrètes (les cartes), dont on fera *in fine* tendre la taille vers l'infini. Pour calculer ces sommes sur les cartes, les intégrales de matrices sont un outil très efficace !



V. Kazakov



F. David



J. Ambjørn, B. Durhuus, J. Fröhlich

Gravité quantique bidimensionnelle

Parallèlement s'est développée la **théorie de Liouville**.

$$Z = \int D\varphi(\xi) \exp\left(-\frac{26-D}{48\pi} \int_{\xi} \left[\frac{1}{2}(\partial_{\mu}\varphi)^2 + \mu^2 e^{\varphi}\right]\right). \quad (25)$$

This expression shows very clearly the origin of the commonly known critical dimension 26 in the string theory: at this value of the dimension one could quantize the theory without bothering about the conformal anomaly, as has been done in dual models. However, for $D < 26$ in order to get proper quantization we must examine the quantum Liouville theory described by the lagrangian (25). This theory is two-dimensional, renormalizable, and completely integrable. All that means that it is exactly solvable, just as sine-Gordon theory, and thus it must be possible to evaluate explicitly the partition function of closed surfaces. This work is in progress now and in the present paper I shall only demonstrate

(A.M. Polyakov, 1981)

Gravité quantique bidimensionnelle

Parallèlement s'est développée la théorie de Liouville.

$$Z = \int D\varphi(\xi) \exp\left(-\frac{26-D}{48\pi} \int_{\xi} \left[\frac{1}{2}(\partial_{\mu}\varphi)^2 + \mu^2 e^{\varphi}\right]\right). \quad (25)$$

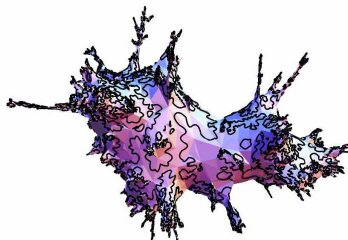
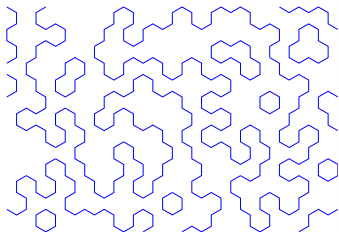
This expression shows very clearly the origin of the commonly known critical dimension 26 in the string theory: at this value of the dimension one could quantize the theory without bothering about the conformal anomaly, as has been done in dual models. However, for $D < 26$ in order to get proper quantization we must examine the quantum Liouville theory described by the lagrangian (25). This theory is two-dimensional, renormalizable, and completely integrable. All that means that it is exactly solvable, just as sine-Gordon theory, and thus it must be possible to evaluate explicitly the partition function of closed surfaces. This work is in progress now and in the present paper I shall only demonstrate

(A.M. Polyakov, 1981)

Les cartes et la théorie de Liouville décrivent-elles bien la même chose ?

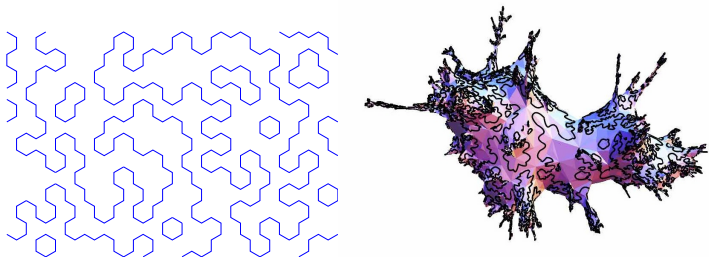
Relations KPZ (1988)

Considérons de la *matière* en deux dimensions et imaginons qu'il soit possible d'«allumer» ou «éteindre» la gravité quantique.



Relations KPZ (1988)

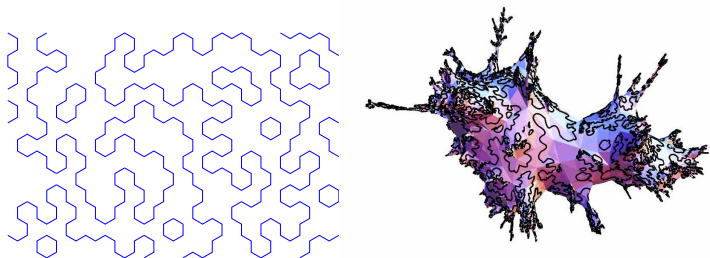
Considérons de la *matière* en deux dimensions et imaginons qu'il soit possible d'«allumer» ou «éteindre» la gravité quantique.



On peut caractériser le comportement de la matière à grande échelle par un petit nombre de paramètres, les *exposants critiques*.

Relations KPZ (1988)

Considérons de la *matière* en deux dimensions et imaginons qu'il soit possible d'«allumer» ou «éteindre» la gravité quantique.



On peut caractériser le comportement de la matière à grande échelle par un petit nombre de paramètres, les *exposants critiques*. Les exposants sont **modifiés** lorsqu'on couple la matière à la gravité quantique, et les relations KPZ, obtenues dans le cadre de la théorie de Liouville, disent précisément **comment**.

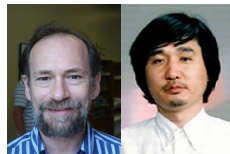
Relations KPZ (1988)



V. Knizhnik, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov



F. David



J. Distler, H. Kawai

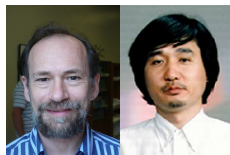
Relations KPZ (1988)



V. Knizhnik, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov



F. David



J. Distler, H. Kawai

Exemple : $\gamma = \frac{c - 1 - \sqrt{(1 - c)(25 - c)}}{12}$ où

- c est la *charge centrale* (mesurable «expérimentalement»),
- γ est l'*exposant de susceptibilité de corde*.

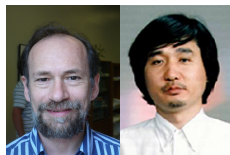
Relations KPZ (1988)



V. Knizhnik, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov



F. David



J. Distler, H. Kawai

Exemple : $\gamma = \frac{c - 1 - \sqrt{(1 - c)(25 - c)}}{12}$ où

- c est la *charge centrale* (mesurable «expérimentalement»),
- γ est l'*exposant de susceptibilité de corde*.

$c = 0$ correspond à la **gravité pure**, on obtient $2 - \gamma = 5/2$,
le même exposant que celui vu dans le comptage des cartes.

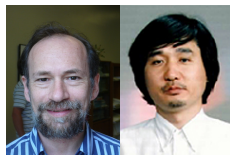
Relations KPZ (1988)



V. Knizhnik, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov



F. David



J. Distler, H. Kawai

Exemple : $\gamma = \frac{c - 1 - \sqrt{(1 - c)(25 - c)}}{12}$ où

- c est la *charge centrale* (mesurable «expérimentalement»),
- γ est l'*exposant de susceptibilité de corde*.

$c = 0$ correspond à la gravité pure, on obtient $2 - \gamma = 5/2$, le même exposant que celui vu dans le comptage des cartes.

$c = 1/2$ correspond au **modèle d'Ising 2D** (Onsager, 1944).

On trouve $2 - \gamma = 7/3$.

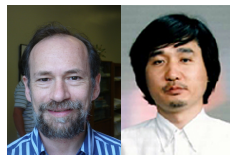
Relations KPZ (1988)



V. Knizhnik, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov



F. David



J. Distler, H. Kawai

Exemple : $\gamma = \frac{c - 1 - \sqrt{(1 - c)(25 - c)}}{12}$ où

- c est la *charge centrale* (mesurable «expérimentalement»),
- γ est l'*exposant de susceptibilité de corde*.

$c = 0$ correspond à la gravité pure, on obtient $2 - \gamma = 5/2$, le même exposant que celui vu dans le comptage des cartes.

$c = 1/2$ correspond au modèle d'Ising 2D (Onsager, 1944).

On trouve $2 - \gamma = 7/3$. Cet exposant, et tous les autres, **coïncident** avec ceux obtenus pour le **modèle d'Ising sur les cartes aléatoires** (résolu en 1986 via modèles de matrices).



V. Kazakov

Gravité quantique bidimensionnelle et matrices aléatoires



V. Knizhnik, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov



F. David



J. Distler, H. Kawai

Ainsi, on dispose de deux approches **cohérentes** à la gravité quantique bidimensionnelle : la théorie de Liouville, et la discrétisation en cartes, elle-même liée aux modèles de matrices.



Quelques experts locaux des modèles de matrices (parmi bien d'autres) :

V. Kazakov, B. Duplantier, I. Kostov, M. Staudacher, J. Zinn-Justin, B. Eynard, C. Kristjansen

Gravité quantique bidimensionnelle et matrices aléatoires



V. Knizhnik, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov

F. David

J. Distler, H. Kawai

Ainsi, on dispose de deux approches cohérentes à la gravité quantique bidimensionnelle : la théorie de Liouville, et la discrétisation en cartes, elle-même liée aux modèles de matrices.



Quelques experts locaux des modèles de matrices (parmi bien d'autres) :

V. Kazakov, B. Duplantier, I. Kostov, M. Staudacher, J. Zinn-Justin, B. Eynard, C. Kristjansen

Faiblesses de la théorie : **rigueur mathématique**, **intuition géométrique**.

Le retour de la combinatoire



R. Cori, B. Vauquelin



G. Schaeffer, M. Bousquet-Mélou



J. B., P. Di Francesco, E. Guitter

Comptage bijectif des cartes planaires

Nous avons vu que le nombre de cartes à n arêtes est $2 \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+2)!}$.
Peut-on prouver cette formule de manière élémentaire ? Bijective ?

Comptage bijectif des cartes planaires

Nous avons vu que le nombre de cartes à n arêtes est $2 \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+2)!}$.

Peut-on prouver cette formule de manière élémentaire ? Bijective ?

Une première bijection, dûe à Cori-Vauquelin (1981), a été reformulée de manière beaucoup plus simple par Schaeffer (1997).

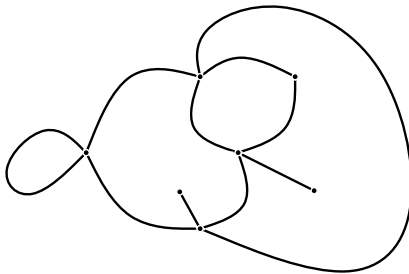
Comptage bijectif des cartes planaires

Nous avons vu que le nombre de cartes à n arêtes est $2 \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+2)!}$.

Peut-on prouver cette formule de manière élémentaire ? Bijective ?

Une première bijection, dûe à Cori-Vauquelin (1981), a été reformulée de manière beaucoup plus simple par Schaeffer (1997).

Tout d'abord, les cartes planaires à n arêtes sont en bijection avec les quadrangulations planaires à n faces (Tutte) :



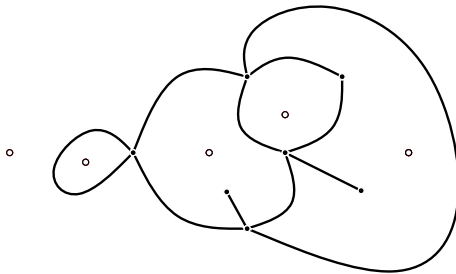
Comptage bijectif des cartes planaires

Nous avons vu que le nombre de cartes à n arêtes est $2 \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+2)!}$.

Peut-on prouver cette formule de manière élémentaire ? Bijective ?

Une première bijection, due à Cori-Vauquelin (1981), a été reformulée de manière beaucoup plus simple par Schaeffer (1997).

Tout d'abord, les cartes planaires à n arêtes sont en bijection avec les quadrangulations planaires à n faces (Tutte) :



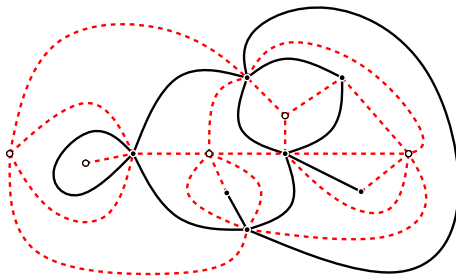
Comptage bijectif des cartes planaires

Nous avons vu que le nombre de cartes à n arêtes est $2 \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+2)!}$.

Peut-on prouver cette formule de manière élémentaire ? Bijective ?

Une première bijection, dûe à Cori-Vauquelin (1981), a été reformulée de manière beaucoup plus simple par Schaeffer (1997).

Tout d'abord, les cartes planaires à n arêtes sont en bijection avec les quadrangulations planaires à n faces (Tutte) :



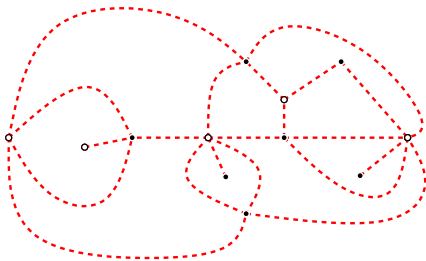
Comptage bijectif des cartes planaires

Nous avons vu que le nombre de cartes à n arêtes est $2 \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+2)!}$.

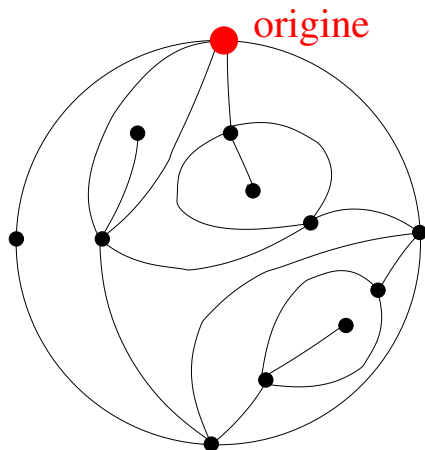
Peut-on prouver cette formule de manière élémentaire ? Bijective ?

Une première bijection, dûe à Cori-Vauquelin (1981), a été reformulée de manière beaucoup plus simple par Schaeffer (1997).

Tout d'abord, les cartes planaires à n arêtes sont en bijection avec les quadrangulations planaires à n faces (Tutte) :

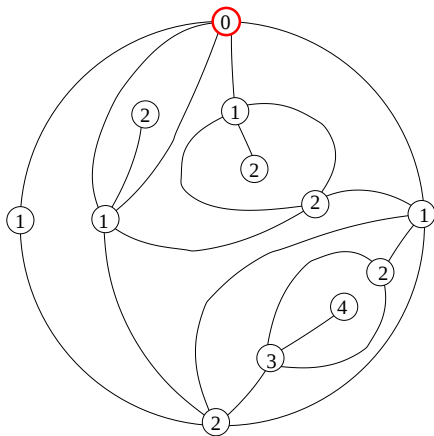


La bijection de Schaeffer



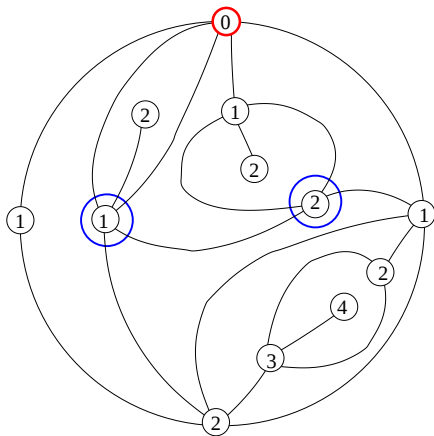
Considérons une quadrangulation planaire **pointée** (sommet marqué : origine).

La bijection de Schaeffer



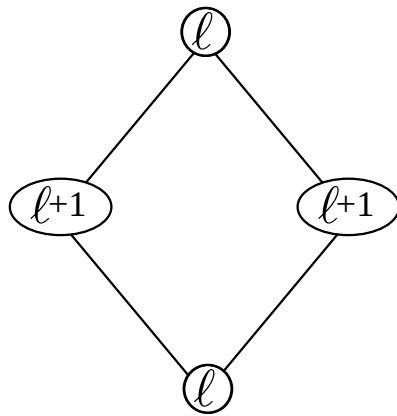
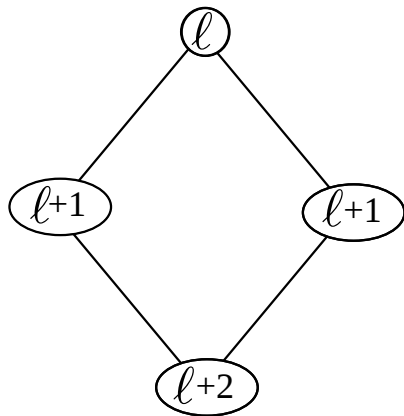
Chaque sommet v reçoit une étiquette $\ell(v)$ égale à sa distance à l'origine.

La bijection de Schaeffer



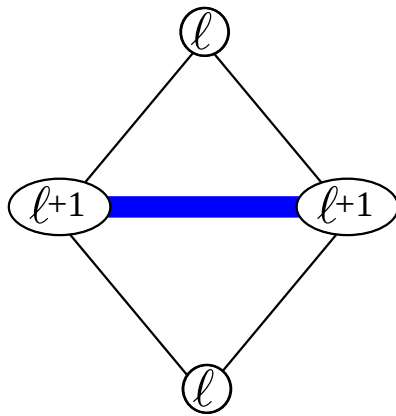
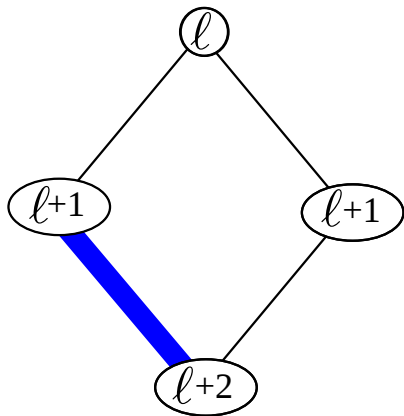
$|\ell(v) - \ell(v')| = 1$ si v et v' sont adjacents.

La bijection de Schaeffer



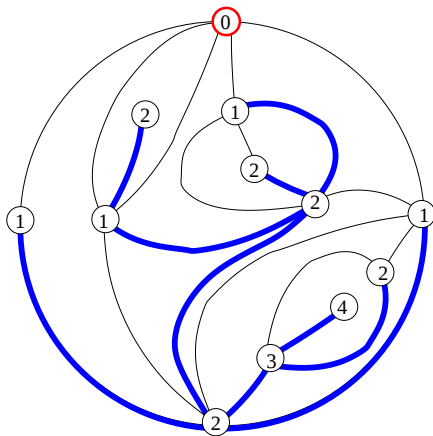
Deux types de faces.

La bijection de Schaeffer



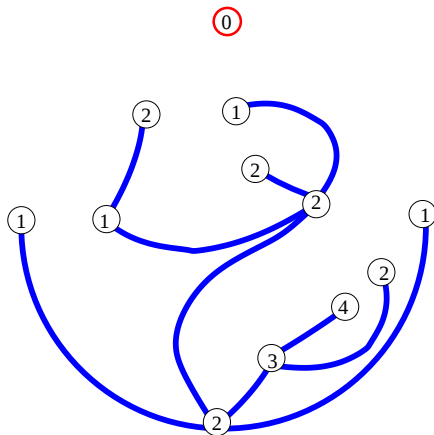
On crée une nouvelle arête dans chaque face selon son type.
 $|\ell(v) - \ell(v')| \leq 1$ si v et v' sont reliés par une nouvelle arête.

La bijection de Schaeffer



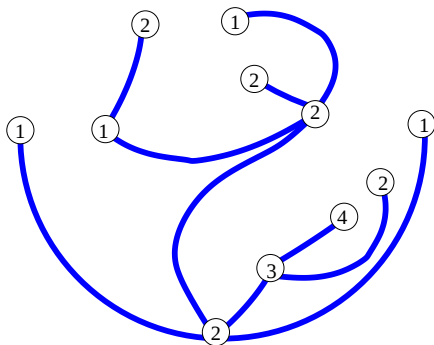
On applique les règles indépendamment dans chaque face.

La bijection de Schaeffer



On retire l'origine isolée.

La bijection de Schaeffer



On obtient un *arbre bien étiqueté* (positif).

Comptage bijectif des cartes planaires

On a une **bijection** entre :

- quadrangulations planaires enracinées à n faces,
- arbres bien étiquetés **positifs** enracinés à n arêtes.

Comptage bijectif des cartes planaires

On a une **bijection** entre :

- quadrangulations planaires **pointées** enracinées à n faces,
- arbres bien étiquetés enracinés à n arêtes.

Comptage bijectif des cartes planaires

On a une **bijection** entre :

- quadrangulations planaires **pointées** enracinées à n faces,
- arbres bien étiquetés enracinés à n arêtes.

Il y a

$$\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

arbres plans enracinés à n arêtes.

Comptage bijectif des cartes planaires

On a une **bijection** entre :

- quadrangulations planaires **pointées** enracinées à n faces,
- arbres bien étiquetés enracinés à n arêtes.

Il y a

$$3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

arbres plans bien étiquetés à n arêtes.

Comptage bijectif des cartes planaires

On a une **bijection** entre :

- quadrangulations planaires **pointées** enracinées à n faces,
- arbres bien étiquetés enracinés à n arêtes.

Il y a

$$3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

quadrangulations planaires pointées **enracinées** à n faces.

Comptage bijectif des cartes planaires

On a une **bijection** entre :

- quadrangulations planaires enracinées à n faces,
- arbres bien étiquetés **positifs** enracinés à n arêtes.

Il y a

$$\frac{2}{n+2} \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

quadrangulations planaires enracinées à n faces.

Comptage bijectif des cartes planaires

On a une **bijection** entre :

- quadrangulations planaires enracinées à n faces,
- arbres bien étiquetés **positifs** enracinés à n arêtes.

Il y a

$$\frac{2}{n+2} \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

quadrangulations planaires enracinées à n faces. On retrouve ainsi la formule de Tutte.

Comptage bijectif des cartes planaires

On a une bijection entre :

- quadrangulations planaires enracinées à n faces,
- arbres bien étiquetés positifs enracinés à n arêtes.

Il y a

$$\frac{2}{n+2} \cdot 3^n \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

quadrangulations planaires enracinées à n faces. On retrouve ainsi la formule de Tutte.

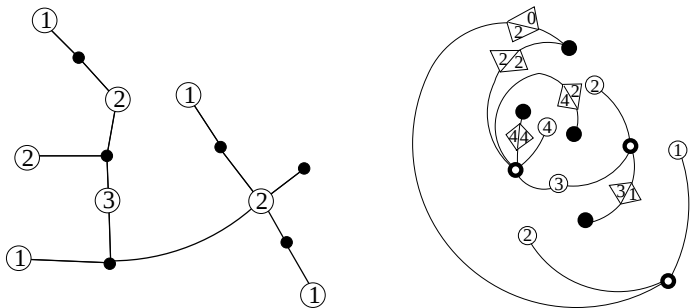
La bijection de Schaeffer a en outre un intérêt majeur : elle code de manière transparente les **distances** à l'origine.

Cadre plus général

On peut dépasser le cadre des quadrangulations, grâce à d'autres bijections (*B., Di Francesco, Guitter 2002; Bousquet-Mélou-Schaeffer 2002; etc*) : triangulations, modèle d'Ising, cartes 2-connexes, etc.

Cadre plus général

On peut dépasser le cadre des quadrangulations, grâce à d'autres bijections (B., Di Francesco, Guitter 2002; Bousquet-Mélou-Schaeffer 2002; etc) : triangulations, modèle d'Ising, cartes 2-connexes, etc.



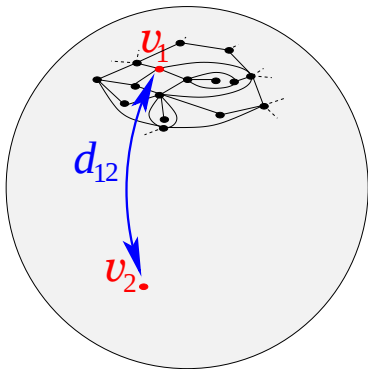
Mentionnons les **mobiles** (BDG, 2004), généralisation des arbres bien étiquetés, qui codent également de manière transparente les distances.

Derniers développements : théorie des probabilités



Statistique des distances dans une carte aléatoire

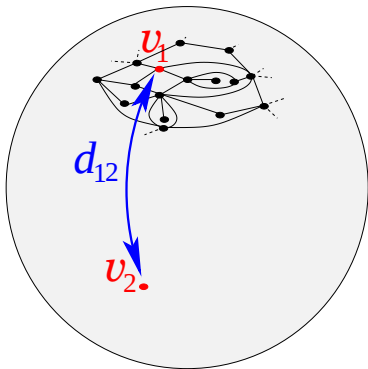
L'approche bijective nous fournit les outils pour étudier la **statistique des distances dans une carte aléatoire** (Chassaing-Schaeffer 2002; B.-Di Francesco-Guitter 2003; etc).



Statistique des distances dans une carte aléatoire

L'approche bijective nous fournit les outils pour étudier la statistique des distances dans une carte aléatoire (*Chassaing-Schaeffer 2002*; *B.-Di Francesco-Guitter 2003*; etc).

Comportement générique : dans une carte de taille n , la distance typique entre deux points est de l'ordre de $\sqrt{\sqrt{n}} = n^{1/4}$.

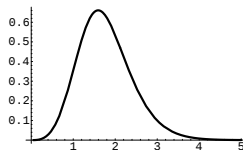
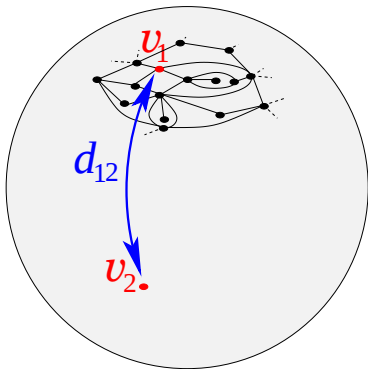


Statistique des distances dans une carte aléatoire

L'approche bijective nous fournit les outils pour étudier la statistique des distances dans une carte aléatoire (*Chassaing-Schaeffer 2002*; *B.-Di Francesco-Guitter 2003*; etc).

Comportement générique : dans une carte de taille n , la distance typique entre deux points est de l'ordre de $\sqrt{\sqrt{n}} = n^{1/4}$.

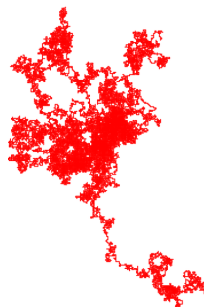
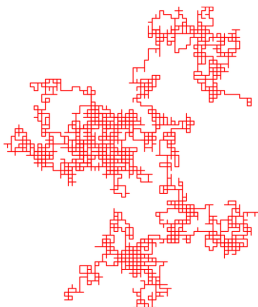
On sait calculer exactement la distribution de cette distance (fonction à deux points, *BDG 2003*)



et bien plus encore (*B.-Guitter 2008-2010*).

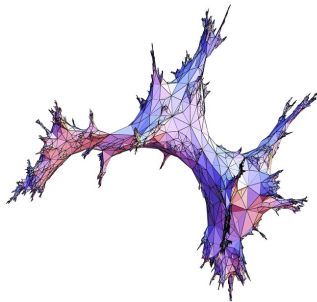
La carte brownienne

Considérons une marche au hasard dans le plan. Lorsque le pas devient de plus en plus petit, on obtient « à la limite » le *mouvement brownien*, qui est un objet mathématiquement bien compris, et on sait donner un sens précis à cette *convergence*.



La carte brownienne

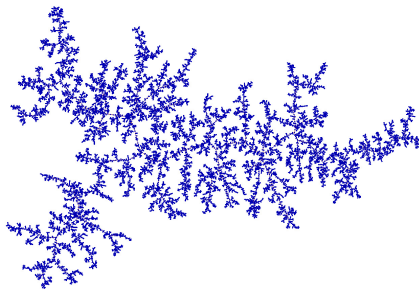
Considérons une marche au hasard dans le plan. Lorsque le pas devient de plus en plus petit, on obtient « à la limite » le *mouvement brownien*, qui est un objet mathématiquement bien compris, et on sait donner un sens précis à cette *convergence*.



Peut-on parvenir à une compréhension similaire de la *limite d'échelle* des cartes aléatoires ?

La carte brownienne

Considérons une marche au hasard dans le plan. Lorsque le pas devient de plus en plus petit, on obtient « à la limite » le *mouvement brownien*, qui est un objet mathématiquement bien compris, et on sait donner un sens précis à cette *convergence*.



Peut-on parvenir à une compréhension similaire de la *limite d'échelle* des cartes aléatoires ? Celle des arbres aléatoires est elle-même bien comprise (Aldous 1992 ; Le Gall 1993 ; etc).

La carte brownienne

La bijection de Schaeffer permet de définir la limite d'échelle des quadrangulations aléatoires à partir de celle des arbres.

Théorème (Miermont 2011 ; Le Gall 2011)

La quadrangulation aléatoire uniforme à n faces, munie de la *distance de graphe* multipliée par $n^{-1/4}$, tend lorsque $n \rightarrow \infty$ vers un *espace métrique* aléatoire appelé *carte brownienne*, au sens de la *convergence en loi* pour la *topologie de Gromov-Hausdorff*.



La carte brownienne

La bijection de Schaeffer permet de définir la limite d'échelle des quadrangulations aléatoires à partir de celle des arbres.

Théorème (Miermont 2011 ; Le Gall 2011)

La quadrangulation aléatoire uniforme à n faces, munie de la *distance de graphe* multipliée par $n^{-1/4}$, tend lorsque $n \rightarrow \infty$ vers un *espace métrique* aléatoire appelé *carte brownienne*, au sens de la *convergence en loi* pour la *topologie de Gromov-Hausdorff*.



Universalité : on obtient également la carte brownienne comme limite d'échelle d'autres familles de cartes, via les mobiles (Le Gall 2011).

La carte brownienne

La bijection de Schaeffer permet de définir la limite d'échelle des quadrangulations aléatoires à partir de celle des arbres.

Théorème (Miermont 2011 ; Le Gall 2011)

La quadrangulation aléatoire uniforme à n faces, munie de la *distance de graphe* multipliée par $n^{-1/4}$, tend lorsque $n \rightarrow \infty$ vers un *espace métrique* aléatoire appelé *carte brownienne*, au sens de la *convergence en loi* pour la *topologie de Gromov-Hausdorff*.



Universalité : on obtient également la carte brownienne comme limite d'échelle d'autres familles de cartes, via les mobiles (Le Gall 2011).

Propriétés fractales : la carte brownienne a dimension de Hausdorff 4 mais est homéomorphe à la sphère de dimension 2 (Le Gall, Paulin 2008).

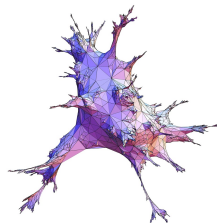
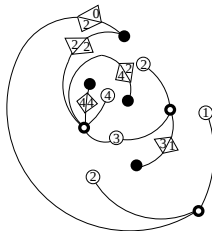
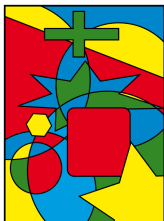
Conclusion

L'étude des cartes aléatoires connaît bien d'autres développements :

- cartes de genre quelconque (*Chapuy 2010; Bettinelli 2012*)
- étude des cartes aléatoires infinies
(*Angel, Schramm 2003; Chassaing, Durhuus 2006; Krikun 2005; ...*)
- autres classes d'universalité : modèles avec matière
(*Bernardi, Bousquet-Mélou 2009; Le Gall, Miermont 2009; Borot, B., Guitter 2010-12...*)
- lien avec l'approche mathématique aux relations KPZ
(*Duplantier, Sheffield, Rhodes, Vargas 2008-...*)

La prochaine frontière : gravité quantique en dimension plus élevée ?

Merci de votre attention !



Crédits graphiques : Inductiveload / CC-BY-SA-3.0 / GFDL (pp. 3,4,32) ; Tomwsulcer / Domaine public (p. 3) ; Oleg Alexandrov / Domaine public (p. 29) ; avec l'aimable autorisation de N. Curien (pp. 15,17,21,29,32) et I. Kortchemski (p.29)