Exercices

Cours M2 Probabilités intégrables

Jérémie Bouttier

19 mars 2020

Je propose ici une liste d'exercices facultatifs liés au cours. Vous pouvez m'envoyer vos réponses par courrier électronique, ou tout simplement venir discuter avec moi.

1 Première partie du cours

Dans la première partie du cours, nous avons étudié le comportement asymptotique au premier ordre de la longueur d'une plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire uniforme de taille n, et vu que celui-ci est déterministe : $2\sqrt{n}$. La présentation est largement inspirée du premier chapitre du livre [Rom15]. Dans celui-ci on trouvera, entre les pages 70 et 78, de nombreux exercices de difficulté variable.

Il est suggéré de faire tout d'abord les exercices 1.7 et 1.8, applications de l'algorithme de Robinson-Schensted.

Il est ensuite proposé de démontrer le lemme sous-additif, également appelé lemme de Fekete, qui est une version déterministe du théorème ergodique sous-additif de Kingman.

Lemme 1.1 (Fekete)**.** *Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels* sous-additive*, c'est-à-dire que pour tous $m, n \geq 1$ on a*

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n. \tag{1.1}$$

Alors la suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ possède une limite pour $n \to \infty$, égale à la borne inférieure de ses valeurs :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}. \tag{1.2}$$

Ensuite, on pourra réfléchir à des exercices plus difficiles, par exemple :

— l'exercice 1.1, qui propose des améliorations des bornes «naïves» que nous avions vues au début du cours, via des arguments probabilistes,

— l'exercice 1.16, où il s'agit de majorer le nombre $p(n)$ de partitions de taille n par la borne sous-exponentielle $e^{\pi\sqrt{2n/3}}$ (borne qui a été utilisée dans le cours mais non démontrée).

Liste non limitative !

Indications pour l'exercice 1.16. (b) Montrer que

$$\log F(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \cdot \frac{x^n}{1-x^n}. \tag{1.3}$$

(c) La borne trouvée au point précédent permet de majorer $\log p(n)$ comme somme de deux termes dépendant de x, on peut chercher le minimum sur x mais on peut se contenter d'une minimisation approchée où les deux termes seront presque égaux. $\square$

2 Processus déterminantaux

Dans cette partie on considère un ensemble Λ fini.

2.1 Principe de complémentation ou "dualité particule-trou"

Soit X un processus déterminantal sur Λ de noyau K.

— Montrer que le complémentaire $\Lambda \setminus X$ est également un processus déterminantal, en exhibant un noyau de corrélation.

— Plus généralement, montrer que pour tout ensemble $D \subset \Lambda$, la différence symétrique $X\Delta D = (X \setminus D) \cup (D \setminus X)$ est un processus déterminantal (en exhibant à nouveau un noyau de corrélation).

2.2 L-ensembles

Une construction générale de processus déterminantaux est la suivante : soit X un sous-ensemble aléatoire de Λ tel qu'il existe une matrice $L : \Lambda \times \Lambda$, appelée *noyau de configuration*, telle que pour tout $A \subset \Lambda$ on a

$$\mathbb{P}(X = A) = \frac{1}{Z} \det L_A \tag{2.1}$$

où Z est un facteur de normalisation, et où on voit ici L_A comme une matrice à indices dans A.

1. Montrer que le facteur de normalisation est donné par

$$Z = \det(I + L) \tag{2.2}$$

et en déduire que $I + L$ et nécessairement inversible.

2. On pose $K = L(I + L)^{-1}$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\prod_{x\in X}(1 + \phi(x))\right) = \det(I + K\phi) \tag{2.3}$$

où, selon la convention vue en cours, la fonction $\phi : \Lambda \to \mathbb{C}$ est vue dans le membre de droite comme une matrice diagonale dont les indices sont dans l'ensemble Λ. En déduire que X est un processus déterminantal de noyau K. Indication : développer le membre de gauche de (2.3) pour faire apparaître les fonctions de corrélation $\mathbb{P}(U \subset X)$.

3. Existe-t-il un noyau de configuration L, tel que défini ci-dessus, pour tout processus déterminantal ? Si non, donner un contre-exemple.

Remarque 2.1. La construction ci-dessus, dite des *L-ensembles*, est importante en théorie des matrices aléatoires (dans sa généralisation continue à $\Lambda = \mathbb{R}$) et notamment en lien avec la méthode dite des polynômes orthogonaux. C'est une méthode alternative aux fermions pour montrer qu'un processus est déterminantal.

3 Fermions et formule des équerres

On utilisera les notations vues en cours, cf la section 3 des notes disponibles à l'adresse `http://nsup.org/~bouttier/coursM2Lyon/`.

3.1 Échauffement : relations de commutation

1. Vérifier la relation de commutation

$$[\psi_k^*, \alpha] = \psi_{k-1}^* \tag{3.1}$$

2. Expliquer pourquoi elle implique

$$e^{-x\alpha}\psi_k^* e^{x\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\psi_{k-n}^*. \tag{3.2}$$

3.2 Lemme de Wick

Démontrer la version suivante du lemme de Wick, qui diffère légèrement de celle vue en cours [1].

Lemme 3.1. *Soient $\varphi_1^*, \dots, \varphi_\ell^*$ des combinaisons linéaires des opérateurs d'annihilation ψ_k^*, et $\chi_1, \dots, \chi_\ell$ des combinaisons linéaires des opérateurs de création ψ_k, $k \in \mathbb{Z}'$. Alors on a*

$$v_\emptyset^* \varphi_\ell^* \cdots \varphi_1^* \chi_1 \cdots \chi_\ell v_\emptyset = \det_{1 \le i,j \le \ell} v_\emptyset^* \varphi_i^* \chi_j v_\emptyset. \tag{3.3}$$

Indication : par multilinarité on peut supposer $\varphi_i^* = \psi_{k_i}^*$ et $\chi_i = \psi_{k_i'}$ pour $k_i, k_i' \in \mathbb{Z}'$, $i = 1, 2$. Distinguer alors plusieurs cas, pour montrer que les deux membres prennent toujours la même valeur qui sera soit 0, soit 1, soit -1.

1. Dans le cours on alternait opérateurs de création et d'annihilation. Ici les annihilations sont à gauche des créations.

3.3 Formule des équerres

On va se servir de tout ça pour donner une expression du nombre d_λ de tableaux de Young standard de forme λ.

1. Expliquer pourquoi, si λ a une longueur inférieure ou égale à ℓ (i.e. $\lambda_i = 0$ pour $i > \ell$) alors

$$\frac{d_\lambda}{|\lambda|!} x^{|\lambda|} = v_\emptyset^* \psi^*_{\lambda_\ell + \frac{1}{2}} \psi^*_{\lambda_{\ell-1}+\frac{3}{2}} \cdots \psi^*_{\lambda_1+\ell-\frac{1}{2}} e^{x\alpha} \psi_{\ell-\frac{1}{2}} \cdots \psi_{\frac{3}{2}} \psi_{\frac{1}{2}} v_\emptyset. \tag{3.4}$$

   Indication : noter que $\psi_{\ell-\frac{1}{2}} \cdots \psi_{\frac{1}{2}} v_\emptyset = v_{\mathbb{Z}'_{<\ell}}$, ce qui correspond au vide translaté de ℓ, et que l'action de α commute aux translations.

2. Éliminer le facteur $e^{x\alpha}$ selon la méthode vue en cours.
3. Utiliser le lemme de Wick dans la version ci-dessus pour exprimer $\frac{d_\lambda}{|\lambda|!}$ comme un déterminant.
4. Évaluer le déterminant pour obtenir

$$\frac{d_\lambda}{|\lambda|!} = \frac{\prod_{1\le i,j\le \ell}(\lambda_i - i - \lambda_j + j)}{\prod_{1\le i\le \ell}(\lambda_i - i + \ell)!}. \tag{3.5}$$

   Indication : en extrayant des facteurs dépendant uniquement des lignes ou colonnes, se ramener à un déterminant de la forme $\det_{1\le i,j\le n} p_{j-1}(\lambda_i - i)$ où $p_j(x)$ est un polynôme en x de degré j, qui est égal au déterminant de Vandermonde.

5. Réarranger le résultat pour obtenir la formule des équerres sous la forme classique

$$\frac{d_\lambda}{|\lambda|!} = \prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{1}{\lambda_i - i + \lambda'_j - j + 1} \tag{3.6}$$

   où λ' est la partition conjuguée ($\lambda'_j = \#\{i : \lambda_i \le j\}$) et le produit porte sur toutes les “cases” du diagramme de Young de λ. Le dénominateur $\lambda_i - i + \lambda'_j - j + 1$ s'interprète graphiquement comme la longueur de l'équerre de la case (i,j).

4 Un peu d'asymptotique

4.1 L'équivalent de Stirling par les méthodes de Laplace et du col

1. Appliquer la méthode de Laplace pour donner un équivalent asymptotique de la fonction gamma

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx. \tag{4.1}$$

   Il est nécessaire d'effectuer un changement de variable [2] pour obtenir une intégrale de la forme vue en cours.

2. Un tel changement de variable peut être deviné en cherchant, lorsque s est grand, vers quelle valeur de x l'intégrande est maximal...

2. Appliquer la méthode du col pour calculer l'asymptotique de
$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{e^z dz}{z^{n+1}} \tag{4.2}$$
où l'intégrale est prise sur un contour entourant 0 positivement. À nouveau il est nécessaire d'effectuer un changement de variable pour obtenir une intégrale de la forme vue en cours. Ici on peut simplement prendre z sur le cercle de rayon r, où on choisira $r > 0$ tel que e^r/r^n soit *minimal*. Il peut sembler paradoxal de chercher un minimum plutôt qu'un maximum, mais c'est pourtant ce qu'il faut faire : pourquoi ?

4.2 Autour de la fonction et du noyau de Bessel

1. À la fin de la section 4.4 des notes de cours, on a démontré l'équivalent asymptotique (4.32), qui correspond au point (a) du théorème 2.27 dans le livre de Romik [Rom15]. Démontrer le point (b) du théorème, qui correspond à un contrôle uniforme sur les queues de distribution. (Ce point n'est pas nécessaire dans la preuve que nous avons vue en cours, mais il est utile pour la preuve que Romik donne dans son livre.)
2. Dans la section 4.1 des notes de cours, nous avons dit qu'il n'était pas vraiment intéressant de considérer l'asymptotique de $\mathbf{J}_{x^2}(s,t)$ dans le cas où s/x et t/x ont des limites différentes. Justifier, à l'aide de raisonnements similaires à ceux développés dans la section 4.5, qu'en effet $\mathbf{J}_{x^2}(s,t)$ tend vers 0. Pour les plus courageux·ses, donner le premier terme du développement asymptotique.

Références

[Rom15] Dan Romik. *The surprising mathematics of longest increasing subsequences.* Institute of Mathematical Statistics Textbooks. Cambridge University Press, New York, 2015.