Rapport de DEA
Le groupe de traces

Anne Bouillard

mars-juillet 2002

Table des matières

1 Introduction

Les systèmes concurrents sont des systèmes où plusieurs événements peuvent avoir lieu en même temps. Dans une exécution où plusieurs actions ont lieu, le temps d'exécution (exécution parallèle) est inférieur à la somme de tous les temps d'exécution (exécution séquentielle). On modélise les événements par des lettres et un mot correspond à une suite d'actions. Pour représenter la simultanéité de plusieurs actions, on autorise les lettres les représentant à commuter. Ainsi plusieurs mots sur l'alphabet des actions représentent en fait la même suite d'événements, à l'ordre près des événements simultanés, qui bien sûr n'a pas d'importance. La structure qui permet cette modélisation est le monoïde de trace, qui a été étudié dans [6], pour des modèles tâches-ressources, et de manière théorique dans [3],[2]. Une mesure importante pour les systèmes concurrents est le rapport moyen entre temps d'exécution parallèle et temps d'exécution séquentielle ([7]).

La structure de monoïde peut facilement être étendue en une structure de groupe : on ajoute pour chaque lettre une lettre inverse. Pour des systèmes concurrents, il n'y a plus vraiment d'interprétation naturelle, puisque la superposition de deux actions pourrait entraîner la disparition de celles-ci. Cette structure a déjà été étudiée, de plusieurs manières et dans des domaines variés, tels que l'algèbre ([4]) ou la physique statistique ([9]).

L'objet de mon stage a été d'étudier les groupes de traces de la même manière que cela a été fait pour les monoïdes pour la modélisation des systèmes concurrents et de montrer si l'on pouvait avoir les mêmes propriétés pour les groupes de trace que pour les monoïdes. Dans une première partie, nous allons définir plus formellement les différentes structures citées dans cette introduction, puis nous étudierons les propriétés combinatoires des fonctions génératrices des éléments de ces ensembles. Enfin, nous nous attacherons au comportement asymptotique des séries génératrices, qui permettent de calculer la quantité moyenne de parallélisme. De plus, nous montrerons une application de ces résultats à des modèles tâches-ressources.

2 Monoïdes et groupes de traces

2.1 Définition et notations

2.1.1 Monoïde de traces

Soit Σ un alphabet fini, D une relation réflexive et symétrique sur Σ et I son complémentaire sur $\Sigma \times \Sigma$. On appelle D relation de dépendance et I relation d'indépendance. On définit une structure de monoïde à partir du monoïde libre sur Σ. Deux lettres en relation dans I commutent : elles représentent des événements qui peuvent avoir lieu en parallèle. On a donc une relation d'équivalence sur les mots : deux mots sont équivalents si l'un peut être obtenu à partir de l'autre en faisant commuter des lettres adjacentes en relation dans I. On a ainsi la définition plus formelle :

Définition 1. *Un monoïde de traces $\mathbb{M}(\Sigma, D)$ est le quotient du monoïde libre Σ^* par la plus petite congruence génénée par les relations $ab \sim ba$, $\forall aIb$. Les éléments de ce monoïde, aussi appelé monoïde libre partiellement commutatif, sont appelés les traces.*

Les graphes non-orientés (Σ, D) et (Σ, I) sont appelés graphe de dépendance et graphe d'indépendance de $\mathbb{M}(\Sigma, D)$. Les deux cas extrêmes, pour un alphabet Σ fixé, sont le monoïde libre ($D = \Sigma \times \Sigma$), et le monoïde libre commutatif d'alphabet Σ ($D = id_\Sigma$, et $\mathbb{M}(\Sigma, D)$ est isomorphe à $\mathbb{N}^{|\Sigma|}$).

On définit aussi $\psi : \Sigma^* \to \mathbb{M}(\Sigma, D)$ la surjection canonique qui à chaque mot associe la trace qu'il représente.

Deux mots représentant la même trace sont de la même longueur. On dit alors que la longueur de la trace t est la longueur d'un mot qui la représente et on la note $|t|$.

Soit u une trace. On note $\mathrm{alph}(u)$ l'ensemble des lettres qui apparaissent dans u. Pour un mot w, on note de la même manière l'ensemble des lettres qui apparaissent dans w : $\mathrm{alph}(w)$

Une clique est une trace non vide dont toutes les lettres sont mutuellement indépendantes. Ce sont en fait les cliques de (Σ, I) (c'est-à-dire les sous-graphes complets). Soit $\mathfrak{C}$ l'ensemble des cliques de $\mathbb{M}$ un monoïde de traces.

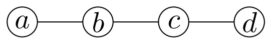
Définition 2. *Un couple $(u, v) \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ est Cartier-Foata (CF) admissible si pour tout lettre b apparaissant dans v il existe a apparaissant dans u tel que $(a, b) \in D$:*

$$\forall b \in \mathrm{alph}(v)\ \exists a \in \mathrm{alph}(u)\ t.q.\ (a, b) \in D.$$

Proposition 1. *La décomposition de Cartier-Foata (CF) d'une trace t est uniquement définie par la suite de cliques $(c_1, c_2, ..., c_n)$ telle que $t = c_1 c_2 ... c_n$ et pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$, (c_i, c_{i+1}) est CF admissible. L'entier n est appelé hauteur de la trace t, et noté $h(t)$.*

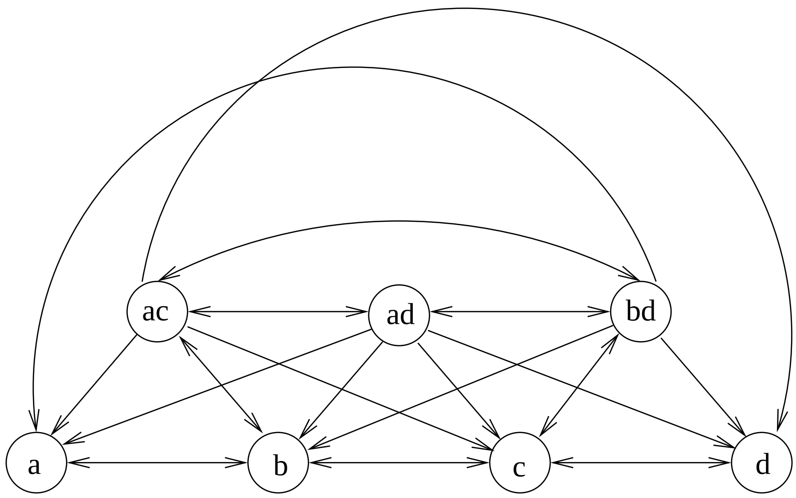
Cette définition permet de construire le graphe des cliques du monoïde $\mathbb{M}(\Sigma, D)$: c'est le graphe orienté dont les nœuds sont les cliques, et (u, v) est un arc si (u, v) est CF-admissible.

Exemple 1. *On considère $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, et le graphe de dépendance :*



Soit le mot $w = acdbabdcb$ et $t = \psi(t)$. On a alors $|t| = 9$, et la décomposition CF est : $\{a, c\}, \{b, d\}$, $\{a, d\}, \{b\}, \{c\}, \{b\}$. Donc la hauteur est $h(t) = 6$.

Le graphe des cliques est représenté par la figure suivante (les boucles, sur chaque nœud, n'ont pas été représentées).



2.1.2 Groupe de traces

On va étendre la structure de monoïde en une structure de groupe : à chaque lettre a de Σ, on associe une lettre, notée $\bar{a}$. On note aussi l'alphabet $\bar{\Sigma} = \{\bar{a}, a \in \Sigma\}$. On suppose que $\Sigma \cap \bar{\Sigma} = \emptyset$.

On construit un groupe de traces $\mathbb{G}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ à partir d'un monoïde de traces $\mathbb{M}(\Sigma, D)$ de la manière suivante :

– si l'alphabet de $\mathbb{M}$ est Σ, alors celui de $\mathbb{G}$ sera $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup \bar{\Sigma}$,

– si dans $\mathbb{M}$ on a aDb, alors dans $\mathbb{G}$, on aura $a\tilde{D}b$, $a\tilde{D}\bar{b}$, $\bar{a}\tilde{D}b$ et $\bar{a}\tilde{D}\bar{b}$,
– $\forall a \in \Sigma$, $a\bar{a} = \bar{a}a = \varepsilon$.

En particulier, la deuxième condition implique que $\forall a \in \Sigma$, on a $a\tilde{D}\bar{a}$.

Les éléments de $\mathbb{G}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ sont aussi appelés des traces.

On dit que $\tilde{D}$ est la relation de dépendance de $\mathbb{G}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$, et la relation d'indépendance du groupe $\mathbb{G}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ est $\tilde{I}$, le complémentaire de $\tilde{D}$.

On peut définir un groupe de traces de façon plus formelle :

Définition 3. *Un groupe de traces est un groupe finiment présenté de la forme $\mathbb{G} = \langle \Sigma | R \rangle$ où Σ est l'ensemble (fini) des générateurs du groupe, et R est un ensemble de relations de la forme $ab = ba$, pour certains $a, b \in \Sigma$.*

Remarque 1. *Cette définition ne fait pas apparaître les lettres barrées, car si $ab = ba$, on a $\bar{a}ab = b = \bar{a}ba$ donc $b\bar{a} = \bar{a}ba\bar{a} = \bar{a}b$: les autres relations se déduisent de celles qui sont données.*

Remarque 2. *On sait que a et $\bar{a}$ commutent puisqu'ils sont inverses l'un de l'autre, mais ils ne sont pas indépendants : si ces deux éléments appartenaient à la même clique du graphe d'indépendance, ils s'annuleraient.*

Notations : Dans toute la suite, on note $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup \bar{\Sigma}$ l'alphabet du groupe, $\tilde{D}$ et $\tilde{I}$ les relations de dépendance et d'indépendance du groupe. On garde les notations Σ, D et I pour les alphabet et relations du monoïde associé.

De même que pour les monoïdes, on définit une surjection canonique $\psi : \tilde{\Sigma}^* \to \mathbb{G}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$. On remarque que la restriction de ψ à Σ^* est exactement la surjection canonique sur $\mathbb{M}(\Sigma, D)$.

Tous les mots représentant la même trace n'ont pas la même longueur. On a donc une définition légèrement différents de la longueur d'une trace t pour le groupe : c'est la longueur d'un plus petit mot représentant la trace t.

$$|t| = \min\{|w|, w \in \psi^{-1}(t)\}$$

Nous allons aussi donner une nouvelle définition de cliques CF-admissibles : en effet, la superposition de a et $\bar{a}$ pose problème, puisque si ces deux lettres sont dans des cliques adjacentes dans un mot, elles s'annulent.

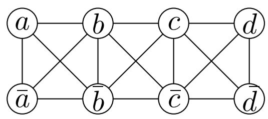
Définition 4. *Soient u et v deux cliques. On dit que (u, v) est CF-admissible si pour tout $b \in \mathrm{alph}(v)$ il existe $a \in \mathrm{alph}(u)$ tel que $(a, b) \in D$ et si $a \in \mathrm{alph}(v)$, alors $\bar{a} \notin \mathrm{alph}(u)$:*

$$\forall b \in \mathrm{alph}(v) \left((\bar{b} \notin \mathrm{alph}(u)) \wedge (\exists a \in \mathrm{alph}(u)\ a\tilde{D}b) \right)$$

où $\mathrm{alph}(u) = \cup_{w \in \psi^{-1}(u)} \mathrm{alph}(w)$.

Cette définition permet ainsi de définir la hauteur d'une trace et construire le graphe des cliques de la même manière que pour les monoïdes.

Exemple 2. *On construit le groupe de traces à partir du monoïde de l'exemple 1. On a donc le graphe de dépendance (on omet les boucles) :*



Soit $w = cd\bar{c}acb\bar{a}d$. La lettre c commute avec a, donc le mot $w' = cd\bar{c}cab\bar{a}d = cdab\bar{a}d$ représente la même trace que w. Les lettres a et b ne commutent pas, donc on ne peut plus trouver de mots de longueur inférieure qui représente la même trace. Donc la longueur de la trace est : $|\psi(w)| = 6$ et la décomposition en cliques CF-admissibles est $\{a, c\}, \{b, d\}, \{\bar{a}, d\}$: $h(\psi(t)) = 3$.

Relations entre les différentes structures. Soient $\mathbb{M} = \mathbb{M}(\Sigma, D)$, $\tilde{\mathbb{M}} = \mathbb{M}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ et $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$. Il existe différentes fonctions qui relient ces ensembles ainsi que les monoïdes libres Σ^* et $\tilde{\Sigma}^*$ et le groupe libre sur Σ noté $F(\Sigma)$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^* & \hookrightarrow & F(\Sigma) & \hookrightarrow & \tilde{\Sigma}^* \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{M} & \hookrightarrow & \mathbb{G} & \hookrightarrow & \tilde{\mathbb{M}} \end{array}$$

2.2 Représentants particuliers des traces

On appelle *forme normale* des traces toute injection de $\mathbb{M}$ (resp. $\mathbb{G}$) dans Σ^* (resp. $\tilde{\Sigma}^*$). Chaque trace admet plusieurs représentations, on peut en extraire certaines qui sont particulières.

Forme normale Cartier-Foata

Une trace est uniquement représentée par la suite CF admissible des cliques qui la compose. Prenons un ordre total sur Σ, et ordonnons les lettres de chaque clique dans cet ordre. On obtient la forme normale Cartier-Foata en mettant bout-à-bout les cliques de la suite CF-admissible.

Proposition 2. *L'ensemble des représentants en forme normale Cartier-Foata d'un monoïde de traces (resp. d'un groupe de traces) est un langage rationnel de Σ^* (resp. de $\tilde{\Sigma}^*$).*

Démonstration. À partir du graphe des cliques on peut construire un automate reconnaissant le langage des formes normales de Cartier-Foata. On explicitera cet automate par la suite. ☐

Forme normale lexicographique

Dans le monoïde de traces, les mots w de Σ^* représentant la même trace ont tous la même longueur, et donc sont en nombre fini. Définissons un ordre total sur l'alphabet Σ. Alors on peut ordonner de façon totale Σ^* à l'aide de l'ordre lexicographique noté $<_{lex}$. Le représentant en forme normale lexicographique est le plus petit élément pour cet ordre.

Pour le cas du groupe de traces, il y a un nombre infini de mots qui représentent la même trace : si w représente une trace t, alors les mots de la forme $a^n \bar{a}^n w$ représentent la même trace, et si a est la plus petite lettre, c'est une suite décroissante dans l'ordre lexicographique. On va donc prendre un autre ordre sur $\tilde{\Sigma}^*$:

$$u < v \text{ si } \left\{ \begin{array}{l} |u| < |v| \text{ ou} \\ |u| = |v| \text{ et } u <_{lex} v \end{array} \right. .$$

Ainsi, le représentant en forme normale lexicographique est le plus petit dans l'ordre lexicographique parmi les représentants les plus courts. Dans la suite, on prendra pour l'ordre sur $\Sigma \cup \bar{\Sigma}$ l'ordre induit par celui du monoïde : $a < \bar{a}$ et si $a < b$, alors $a < \bar{a} < b < \bar{b}$.

On a la proposition suivante (voir [3]) :

Proposition 3. *Un mot w est la forme normale lexicographique d'une trace de $\mathbb{M}(\Sigma, D)$ si et seulement si pour chaque facteur aub, $a, b \in \Sigma$, $u \in \Sigma^*$, $(au, b) \in I$ alors $a < b$, où $(u, a) \in I$ si $(b, a) \in I$, $\forall b \in \mathrm{alph}(u)$.*

On a aussi le même résultat pour les groupes :

Proposition 4. *Un mot w est la forme normale lexicographique d'une trace de $\mathbb{G}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ si et seulement si pour chaque facteur aub, $a, b \in \Sigma$, $u \in \Sigma^*$, $(au, b) \in I$ alors $a < b$.*

Et le corollaire :

Corollaire 1. *L'ensemble des formes normales lexicographiques d'un monoïde de traces ou d'un groupe de traces est un langage rationnel.*

Exemple 3. *Soit l'ordre $a < b < c < d$. Le représentant en forme normale lexicographique des mots des exemples précédents sont :*
- *pour $w = acdbabdcb$, le représentant est : $acbabddcb$,*
- *pour $cd\bar{c}acb\bar{a}d$, le représentant est : $ada\bar{a}dd$.*

2.3 Représentation des traces par tas de pièces

On peut représenter les éléments du monoïde de traces et du groupe de traces par des tas de pièces. Cette représentation permet d'avoir une idée de la structure du mot par une représentation graphique, et donc intuitive. Soit $\mathbb{M}$ le monoïde $\mathbb{M}(\Sigma, D)$. Soit $\mathcal{C}ol$ un ensemble fini de colonnes. On modélise chaque lettre a par une pièce rectangulaire $p(a)$, de hauteur 1, et de base $col(a) \subset \mathcal{C}ol$. Les colonnes occupées par les pièces doivent satisfaire les conditions suivantes :

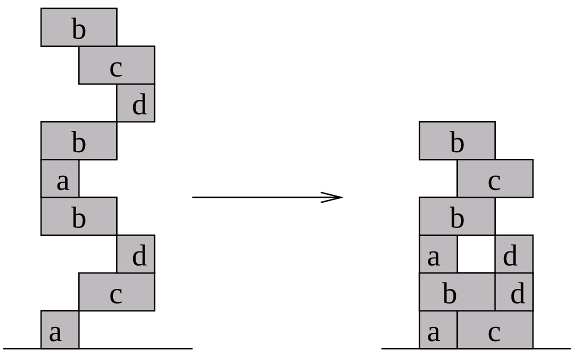
1. Si aIb, alors $col(a) \cap col(b) = \emptyset$,
2. Si aDb, alors $col(a) \cap col(b) \neq \emptyset$.

Soit $w = a_1 a_2 ... a_n$ un mot de Σ^*. On construit le tas de pièce correspondant à w en “faisant tomber” $p(a_1)$, puis $p(a_2)$ jusqu'à $p(a_n)$. Chaque ligne du tas ainsi construit représente une clique de la représentation CF de la trace représentée par le mot. De plus, on visualise aisément la hauteur d'un mot : c'est la hauteur du tas de pièces.

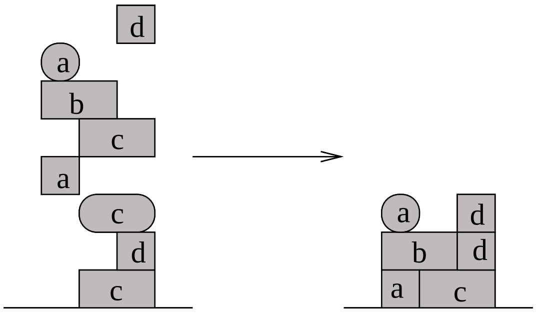
Si deux mots génèrent le même tas de pièces, alors ces mots sont équivalents : on a une bijection entre les traces du monoïde et les tas de pièces. Viennot [10] a démontré l'équivalence entre le modèle des tas de pièces et le monoïde de traces.

On peut représenter les traces du groupe par un tas de pièces colorées : a et $\bar{a}$ sont des pièces indentiques (elles occupent les mêmes colonnes, mais sont de couleurs différentes : par exemple les pièces de Σ sont rouges et celles de $\bar{\Sigma}$ sont bleues). Les pièces tombent sur le tas de manière identique à celle du monoïde, mais si une pièce tombe sur la même pièce de couleur différente, alors ces deux pièces disparaissent. Ainsi, la hauteur du tas peut diminuer, et même, le tas peut disparaître.

Exemple 4. *On reprend les deux exemples précédents. Voici le tas de pièces obtenu pour le monoïde :*



et pour le groupe. Pour plus de lisibilité, les lettres barrées sont représentées par des pièces aux coins arrondis.



2.4 Petite bibliographie des groupes de traces

Les groupes de traces ont déjà été étudiés, de plusieurs manières et dans des domaines variés. Ils sont un cas particulier des groupes d'Artin. Ces derniers sont des graphes définis par un ensemble fini de générateurs, notre alphabet Σ et des relations de type $abab... = baba...$ où il y a $n_{a,b}$ lettres de chaque côté de l'égalité et où $a, b \in \Sigma$, $a \neq b$.

Tout d'abord, Carl Droms a étudié les groupes de traces, qu'il appelle graph groups, car ces groupes sont construits à partir d'un graphe d'indépendance, comme nous le verrons dans la suite, d'un point de vue algébrique. Il a montré certaines propriétés de ces groupes : les groupes de traces dont tous les sous groupes sont aussi des groupes de traces sont les groupes construits à partir des graphes d'indépendance qui ne contiennent ni un carré, ni une ligne de quatre sommets comme sous-graphe ([4]). Il a aussi étudié les sous-groupes des groupes construits à partir du groupe à un générateur, du produit libre et du produit cartésien (qui sont des groupes de traces). Enfin, il s'est intéressé à des généralisations des groupes de traces, comme les groupes d'Artin.

Ensuite, cette structure a été étudiée en combinatoire, avec des applications en physique théorique, car elle permet d'obtenir des résultats quant à la topologie de chaînes de molécules, et des problèmes statistiques. Dans [9], les auteurs étudient les groupes de traces construits à partir des graphes lignes à n nœuds, pour n grand, et en déduit des résultats pour les groupes de tresses. Ils introduisent trois quantités différentes, et les mettent en relation.

3 Propriétés combinatoires

3.1 Séries génératrices des traces

L'un des problèmes naturels liés aux monoïdes de traces et du groupe de traces est de compter les éléments qui les constituent. On veut dénombrer les éléments qui ont la même longueur, ou ceux qui ont la même hauteur, par exemple. Pour répondre à ces questions, on introduit les séries génératrices de ces monoïdes. Définissons donc les séries :

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \sum_{t \in S} x^{h(t)} y^{|t|} \\ L(y) &= \sum_{t \in S} y^{|t|} \\ F(x) &= \sum_{t \in S} x^{h(t)} \end{aligned}$$

où S peut représenter un monoïde de traces ou un groupe de trace, selon le contexte.

On a bien sûr $L(y) = F(1, y)$ et $H(x) = F(x, 1)$. Les résultats suivants ont déjà été établis dans la cas du monoïde de traces [3], et la preuve s'adapte dans le cas des groupes :

Proposition 5. *Soit $\mathbb{G}$ un groupe de trace, et $\mathfrak{C}$ l'ensemble des cliques de I. Soit la matrice $A(x, y) \in \mathbb{N}[x, y]^{\mathfrak{C}\times\mathfrak{C}}$ définie par $A(x, y)_{i,j} = xy^{|i|}$ si (i, j) est CF admissible, et 0 sinon. $u = (1, ..., 1) \in \mathbb{N}[x, y]^{1\times\mathfrak{C}}$ et le vecteur $v \in \mathbb{N}[x, y]^{\mathfrak{C}\times 1}$ défini par $v(x, y)_i = xy^{|i|}$). Alors la série génératrice de la longueur et de la hauteur est donnée par :*

$$F = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} uA(x, y)^n v(x, y) = 1 + u(I - A(x, y))^{-1} v(x, y),$$

où I est la matrice identité.

Démonstration. Une trace est associée à son unique décomposition CF. On associe à un chemin p dans Γ, le graphe des cliques la suite de nœuds qu'il parcourt $(c_1, ..., c_k)$. Par construction, la décomposition CF de $t = c_1...c_k$ est $(c_1, ..., c_k)$. Donc les décompositions CF sont en bijection avec les chemins dans Γ. La contribution de la trace t à la série F est $x^{h(t)}y^{|t|}$. Le poids du chemin p dans l'automate de représentation $(u, A(x, y), v(x, y))$ est :

$$u_{c_1}\left(\prod_{i=1}^{k-1} A(x, y)_{c_i c_{i+1}}\right) v(x, y)_{c_k} = \left(\prod_{i=1}^{k-1} xy^{|c_i|}\right) xy^{|c_k|} = x^{h(t)}y^{|t|}.$$

□

Et cette propriété a pour conséquence immédiate :

Corollaire 2. *$F(x, y)$, $L(y)$ et $H(x)$, sont des séries rationnelles, et*

$$\begin{aligned} L &= 1 + u(I - A(1, y))^{-1} v(1, y) \\ H &= 1 + u(I - A(x, 1))^{-1} v(x, 1) \end{aligned}$$

Partition équitable des cliques : La dimension de la matrice A est égale au nombre de cliques de I, qui devient vite très grand. Pour réduire la taille de la matrice, on partitionne l'ensemble des cliques en une partition équitable.

Définition 5. *Soit $\pi = \{\mathfrak{C}_1, ..., \mathfrak{C}_k\}$ est une partition de $\mathfrak{C}$. On dit que π est une partition équitable si :*

1. *π est une partition de $\mathfrak{C}$ et*
2. *pour tout $i, j \in \{1, ..., k\}$, tout élément de $\mathfrak{C}_i$ a le même nombre $n_{i,j}$ de successeurs dans $\mathfrak{C}_j$*

Soit π une partition équitable, telle que tous les éléments de chaque élément $\mathfrak{C}_i$ de la partition sont de la même longueur l_i. On a alors :

$$F = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} u_\pi A_\pi(x, y)^n v_\pi(x, y) = 1 + u_\pi(I - A_\pi(x, y))^{-1} v_\pi(x, y),$$

où $u_\pi = (|\mathfrak{C}_i|)_{i\in\mathbb{N}_k}$, $A_\pi(x, y) = (n_{i,j}xy^{|l_i|})_{i,j\in\mathbb{N}_k}$ et $v_\pi(x, y) = (xy^{|l_i|}))_{i\in\mathbb{N}_k}$.

Exemple 5. *Toujours avec le même exemple, on a la partition $\pi = \{\{\{a\}, \{d\}\}, \{\{b\}, \{c\}\}, \{\{a, c\}, \{b, d\}\}, \{\{a, d\}\}\}$. On obtient la matrice $A(1, 1)$ (on ne fait pas apparaître x et y) et les vecteurs u_π et v_π :*

$$u_\pi = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_\pi(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad v_\pi = \begin{pmatrix} xy \\ xy \\ xy^2 \\ xy^2 \end{pmatrix}$$

Pour le groupe, on met ensemble deux cliques qui sans tenir compte des barres sont identiques (car le comportement de toutes ces cliques l'est). Alors :

$$u_\pi = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_\pi(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad v_\pi = \begin{pmatrix} xy \\ xy \\ xy^2 \\ xy^2 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir le corollaire 1, on utilise la représentation matricielle d'un automate reconnaissant les suites de cliques CF-admissibles. Mais il existe un procédé beaucoup plus élégant pour calculer la série génératrice L, et qui de plus permet d'obtenir la fraction rationnelle explicitement : L est en fait l'inverse de la fonction de Möbius associée au monoïde.

3.2 Série génératrice des longueurs et fonction de Möbius

Définition 6. *Soit $\mathbb{M}(\Sigma, D)$ un monoïde de trace, I son graphe d'indépendance et $\mathfrak{C}$ l'ensemble des cliques de I. Alors le polynôme de Möbius est défini par :*

$$\mu_{\mathbb{M}}(x) = 1 + \sum_{c \in \mathfrak{C}} (-1)^{|c|} x^{|c|}$$

Théorème 1. *La série génératrice des longueurs des traces dans un monoïde de trace $\mathbb{M}$ est donnée par :*

$$L_{\mathbb{M}} = \frac{1}{\mu_{\mathbb{M}}}$$

Ce résultat est dû à Cartier et Foata [2]. On démontre maintenant un analogue dans le cas du groupe de traces.

Théorème 2. *La série génératrice des éléments de groupe est donnée par :*

$$L_{\mathbb{G}}(y) = \frac{1}{\mu_{\tilde{\mathbb{M}}}(\frac{y}{1+y})},$$

où $\mu_{\tilde{\mathbb{M}}}$ est le polynôme de Möbius associé au monoïde $\mathbb{M}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$.

Démonstration. À tout groupe $\mathbb{G}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$, on peut associer un monoïde $\mathbb{M}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ (noté dans la suite $\tilde{\mathbb{M}}$), qui est identique au groupe, pour les relations de commutation, mais il n'y a pas de relation d'annulation.

Au groupe $\mathbb{G}$, on associe la série génératrice $G(y) = \sum_{t \in \mathbb{G}} y^{|t|} = \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n y^n$.

Au monoïde $\tilde{\mathbb{M}}$, on fait correspondre la série génératrice $M(y) = \sum_{t \in \mathbb{M}} y^{|t|} = \sum_{n \in \mathbb{N}} m_n y^n$.

On essaie maintenant de trouver une correspondance entre les coefficients g_n et m_n.

Relation entre $\mathbb{G}$ et $\tilde{\mathbb{M}}$:

La différence principale entre $\mathbb{G}$ et $\tilde{\mathbb{M}}$ est que l'on peut superposer des lettres et leurs inverses dans $\tilde{\mathbb{M}}$ mais dans $\mathbb{G}$ leur superposition s'annule. Pour établir une correspondance entre les éléments de $\mathbb{G}$ et ceux de $\mathbb{M}$, il faut tout d'abord trouver une manière de les écrire, de telle sorte qu'aucune trace n'apparaisse écrite deux fois différemment. On choisit de prendre pour représentants d'une trace de $\tilde{\mathbb{M}}$ et d'une trace de $\mathbb{G}$ leur forme normale lexicographique avec un ordre de la forme : $a_1 < \bar{a}_1 < a_2 < \bar{a}_2 < ... < a_n < \bar{a}_n$.

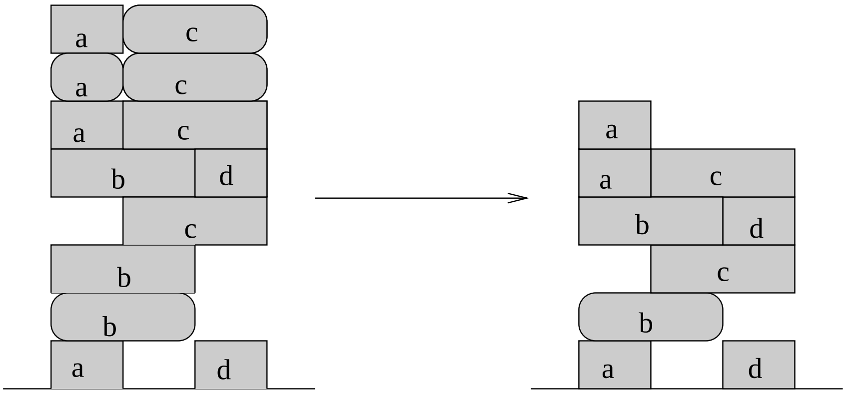
Soient $\mathcal{L}_{\mathbb{G}}$ et $\mathcal{L}_{\tilde{\mathbb{M}}}$ les languages (rationnels) des formes normales lexicographiques de $\mathbb{G}$ et $\tilde{\mathbb{M}}$. On a alors $g_n = |\mathcal{L}_{\mathbb{G}} \cap \tilde{\Sigma}^n|$ et $m_n = |\mathcal{L}_{\tilde{\mathbb{M}}} \cap \tilde{\Sigma}^n|$. On pose de plus $\mathbb{G}_n = \mathcal{L}_{\mathbb{G}} \cap \tilde{\Sigma}^n$ et $\mathbb{M}_n = \mathcal{L}_{\tilde{\mathbb{M}}} \cap \tilde{\Sigma}^n$.

Soit $B_{n,p} = \mathbb{G}_n \times N_{n-1,p}$ où $N_{n-1,p}$ est l'ensemble des suites croissantes à $n-1$ éléments dans $[2..p]$. $B_p = \bigcup_{n=1}^{p} B_{n,p}$ On veut montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{M}_p$ et B_p.

On définit une fonction $f : \mathbb{M}_p \to B_p$ qui à un mot $u = u_1 u_2 ... u_p$ associe $f(u) = (v, s)$ où $v = u_1 u_{i_1} ... u_{i_n}$ est un sous-mot de u et s une suite de $n-1$ nombres. Les lettres qui apparaissent dans v sont : $u_1 = u_{i_0}$, pour tout $j \in \{1, ...n\}$,

$$i_j = \min\{l \in \mathbb{N} | l > i_{j-1} \text{ et } u_l \neq \bar{u}_{i_{j-1}}\}.$$

La suite de nombres s est $(i_1, ..., i_n)$.



Lemme 1. *f est bien une fonction : $f(u) = (v, s)$ et v est bien le représentant d'une trace de $\mathbb{G}$ dans l'ordre lexicographique.*

1. On obtient bien un élément de taille minimale parmi tous les représentants d'une classe. En effet, si dans le "tas de pièces associé" au mot u, des lettres x et $\bar{x}$ se superposent, elles sont adjacentes dans le mot.

   Sinon, on aurait un facteur de la forme $xbw\bar{x}$, et le support de bw, en particulier b commute avec x et $\bar{x}$. Or, pour l'ordre lexicographique, on a la propriété suivante : $(bv, a) \in I \Rightarrow b < a$. Donc on a $b < \bar{x}$ et $x < b$. Or d'après l'ordre choisi, il ne peut y avoir de b entre x et $\bar{x}$.
2. L'élément obtenu est le premier dans l'ordre lexicographique. Si ce n'était pas le cas, il existerait un facteur vx de $f(u)$ tel que $(v, x) \in I$, mais aussi une lettre b appartenant au support de v telle que $x < b$. Soit $v = v'v''$, où v' est le plus long préfixe de v tel que pour toute lettre c de v, on a $c < x$. Alors $v'xv'' < vx$ et comme la transformation f ne fait que supprimer des lettres, ne change pas l'ordre des lettres conservées, et comme les lettres effacées immédiatement après x commutent avec les lettres de v et les lettres effacées après ces lettres, en interchangeant les blocs qui ont donné x et v'', on obtient une trace équivalente à u mais plus petite dans l'ordre lexicographique, ce qui contredit la minimalité de u.

Lemme 2. *La fonction f est bijective.*

Démonstration. Grâce à la construction donnée pour $f(u)$, on peut facilement construire la fonction inverse f^{-1} : soit (v, s) un élément de $B_{n,p} \subset B_p$. On lui associe le mot $u = u_1 ... u_p$ dans $\mathbb{M}_p$ avec $u_1 = v_1$, $\forall i \in \{1, ..., n-1\}$ $u_{s_i} = v_{i-1}$, et pour toutes les lettres non encore définies, u_j, $u_j = \bar{u}_i$ où $i = \max(s_k, s_k < j)$. On vérifie que $f(f^{-1}(u)) = u$ et que $f^{-1}(f(u)) = u$. $\square$

On en déduit donc que $m_p = |B_p|$. Or

$$\begin{aligned}
|B_p| &= |\bigcup_{n=1}^{p} B_{n,p}| \\
&= \sum_{n=1}^{p} |B_{n,p}| \\
&= \sum_{n=1}^{p} g_n |N_n - 1| \\
&= \sum_{n=1}^{p} g_n C_{p-1}^{n-1}
\end{aligned}$$

En réinjectant cette formule dans la série génératrice de $\mathbb{M}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{p\in\mathbb{N}} m_p y^p &= \sum_{p\in\mathbb{N}} \sum_{n\leq p} g_n C_{p-1}^{n-1} y^p \\
&= \sum_{p\in\mathbb{N}} \sum_{n+k=p} g_n C_{n+k-1}^{n-1} y^{n+k} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n y^n \sum_{k\in\mathbb{N}} C_{n+k-1}^{n-1} y^k \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n y^n (\frac{1}{y-1})^n \\
M(y) &= G(\frac{y}{1-y})
\end{aligned}$$

Or, on sait que $M(y)P(y) = 1$. Donc

$$G(\frac{y}{1-y})P(y) = 1 \text{ et } G(y)P(\frac{y}{1+y}) = 1.$$

Autre preuve :

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{\Sigma}^* & \\
\mathbb{G}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D}) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\rho"] & & \mathbb{M}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D}) \arrow[ul, "\nu"']
\end{tikzcd}$$

L'injection ρ de $\mathbb{G}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ dans $\mathbb{M}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ associe à une trace du groupe la trace du monoïde de même représentation en forme normale lexicographique. L'injection ν de $\mathbb{M}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ dans $\tilde{\Sigma}^*$ associe à une trace du monoïde son représentant en forme normale lexicographique. La fonction φ est la composition de ces deux fonctions. C'est l'injection de $\mathbb{G}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ dans $\tilde{\Sigma}^*$ qui associe à une trace du groupe son représentant en forme normale lexicographique.

Le langage formé par les représentants en forme normal lexicographique est rationnel. Si on a des expressions rationnelles non ambiguës sur un monoïde libre A^*, alors on a les formules suivantes pour les séries génératrices du langage :

$$\begin{aligned}
E = E_1 + E_2 &\rightsquigarrow S(E) = S(E_1) + S(E_2) \\
E = E_1.E_2 &\rightsquigarrow S(E) = S(E_1).S(E_2) \\
E = (E_1)^* &\rightsquigarrow S(E) = \frac{1}{1 - S(E_1)}
\end{aligned}$$

Soit E une expression rationnelle non ambigüe de $\nu \circ \rho(\mathbb{G})$. Alors l'expression F formée à partir de E en remplaçant chaque lettre a par $a(\bar{a})^*$ est une expression rationnelle de $\tilde{\Sigma}^*$ en bijection avec $\mathbb{M}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ (c'est l'expression du langage rationnel $\mathcal{L}_{\tilde{\mathbb{M}}}$).

Lemme 3. *F est une expression non ambigüe de $\tilde{\Sigma}^*$ qui représente le langage $\mathcal{L}_{\tilde{\mathbb{M}}}$.*

Démonstration. C'est une retraduction de lemme 1. □

Ainsi, on a $S(F)(x) = S(E)(\frac{x}{1-x})$ □

Dans [1], on trouve une relation de la même forme entre les empilements et les empilements stricts (deux mêmes lettres ne peuvent pas se suivre).

Exemple 6. *Le polynôme de Möbius associé au monoïde de l'exemple 1 est : $\mu_{\mathbb{M}}(y) = 1 - 4x + 3x^2 = (1-x)(1-3x)$.*

Le polynôme de Möbius associé au monoïde dont le graphe de dépendance est celui de l'exemple 2 est : $\mu_{\tilde{\mathbb{M}}}(y) = 1 - 8x + 12x^2 = (1-2x)(1-6x)$.

La fonction génératrice des longueurs des éléments du groupe de l'exemple 2 est donc :

$$L_{\mathbb{G}} = \frac{1}{(1-2\frac{x}{1+x})(1-6\frac{x}{1+x})} = \frac{(1+x)^2}{(1-x)(1-5x)}$$

Lien entre les racines des séries génératrices des longueurs de $\mathbb{G}$ et de $\mathbb{M}$. On a $L_{\tilde{\mathbb{M}}}(x) = L_{\mathbb{M}}(2x)$. En effet, à chaque lettre a dans $\mathbb{M}$, on peut associer $(a + \bar{a})$. D'après la section précédente, on a donc :

$$L_{\mathbb{G}}(x) = L_{\mathbb{M}}(\frac{2x}{1+x}).$$

On sait que $\frac{1}{L_{\mathbb{M}}(x)}$ est le polynôme de Möbius associé à $\mathbb{M}$, μ. Décomposons-le en éléments simples :

$$\mu = \alpha \prod_{i=1}^{n} (1 - \rho_i^{-1} x)$$

Soit $R = \frac{1}{L_{\mathbb{G}}(x)}$. On a alors :

$$\begin{aligned} R &= \alpha \prod_{i=1}^{n} (1 - \rho_i^{-1} \frac{2x}{1+x}) \\ &= \alpha \frac{\prod_{i=1}^{n} (1 - (2\rho_i^{-1} - 1)x)}{(1+x)^n} \end{aligned}$$

Par conséquent, on a la proposition suivante :

Proposition 6. *Soit $\mathbb{M} = \mathbb{M}(\Sigma, D)$ un monoïde de traces, et $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ le groupe de traces construit à partir de $\mathbb{M}$. On note $L_{\mathbb{M}}$ et $L_{\mathbb{G}}$ les séries génératrices des longueurs des traces dans $\mathbb{M}$ et dans $\mathbb{G}$. Si les pôles de $L_{\mathbb{M}}$ sont $\rho_1 < ... < \rho_k$ avec les multiplicités respectives $\alpha_1, ..., \alpha_k$, alors les pôles de $L_{\mathbb{G}}$ sont $\rho_1/(2-\rho_1) < ... < \rho_k/2 - \rho_k$ avec les multiplicités $\alpha_1, ..., \alpha_k$.*

En particulier, si ρ est le pôle dominant de $L_{\mathbb{M}}$, alors $\rho/2 - \rho$ est le pôle dominant de $L_{\mathbb{G}}$, avec la même multiplicité.

3.2.1 Interprétation en variables non commutatives.

Le langage des représentants en forme normale lexicographique d'un groupe ou d'un monoïde de traces est rationnel. De plus, on peut définir un ensemble de mots interdits de ces langages : ce sont des mots qui ne peuvent apparaître comme facteurs dans les représentants (c'est donc un idéal à gauche et à droite). Il existe un plus petit ensemble qui génère l'ensemble des mots interdits (c'est la base de l'idéal). Dans tout ce paragraphe, on note toujours $\mathcal{L}_S$ le langage des formes normales lexicographique correspondant à la structure S (groupe ou monoïde de traces), et $Forb_S$ la base du langage des mots interdits de $\mathcal{L}_S$.

On va maintenant définir la notion de chaîne recouvrante pour $Forb_S$.

Définition 7. *Une chaîne recouvrante pour $Forb_S$ est une suite finie $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathcal{L}_S$ telle que $a_1 \in \Sigma$ et pour tout i de 1 à $n-1$, $a_i a_{i+1} \in \Sigma^* Forb_S \backslash \Sigma^* Forb_S \Sigma^+$.*

Exemple 7. *Pour le monoïde de graphe de dépendance,*

$$a \;\text{———}\; c \;\text{———}\; b$$

avec l'ordre $a < b < c$, le seul mot interdit est ba, les chaînes recouvrantes sont : a,b,c,ba. Pour le groupe $\mathbb{G}$ correspondant à ce monoïde, avec l'ordre $a < \bar{a} < b < \bar{b} < c < \bar{c}$, les mots interdits sont ba, $\bar{b}a$, $b\bar{a}$, $\bar{b}\bar{a}$, et aussi $a\bar{a}$, $\bar{a}a$, $b\bar{b}$, $\bar{b}b$, $c\bar{c}$, $\bar{c}c$. Les chaînes recouvrantes sont en nombre infini, et de la forme $(b\bar{b})^n(\bar{a}a)^m\bar{a}$, par exemple.

On note $\mathcal{F}orb_S$ l'ensemble des chaînes recouvrantes. On a le théorème suivant ([3], th. 4.4.2.) :

Théorème 3. *Soient les séries sur le monoïde libre Σ^**

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{F}_S} &= \sum_{(w_1,...,w_n) \in \mathcal{F}orb_S} (-1)^n (w_1 ... w_n) \ \text{et} \\ \zeta_{\mathcal{F}_S} &= \sum_{w \in \mathcal{L}_S} w. \end{aligned}$$

Ces séries formelles $\mu_{\mathcal{F}_S}$ et $\zeta_{\mathcal{F}_S}$ sont inverses l'une de l'autre.

Dans le cas du monoïde, on retrouve la fonction de Möbius en variables non commutatives. On obtient un résultat similaire pour les groupes.

Exemple 8. *Reprenons l'exemple précédent :*

Pour le monoïde, on obtient,

$$\zeta_{\mathcal{F}_{\mathbb{M}}} = \frac{1}{1 - a - b - c + ba}$$

Pour le groupe, on a une résultat plus compliqué, mais assez facile à obtenir. En effet, il suffit de remplacer chaque lettre $a \in \Sigma$ par $(a(\bar{a}a)^*(1-\bar{a}) + \bar{a}(a\bar{a})^*(1-a))$.

Pour passer de la série formelle d'un monoïde à celle d'un groupe, il faut distinguer deux cas :

Cas 1 : la relation $I \cap <$ est transitive sur Σ. Dans ce cas, la base de l'idéal des mots interdits est uniquement formé de mots de deux lettres, et donc, dans le monoïde les chaînes recouvrantes sont en nombre fini, et correspondent aux cliques du graphe d'indépendance, les lettres classées par ordre décroissant. Dans chaque chaîne recouvrante, une lettre n'apparaît qu'une seule fois. Pour obtenir la série génératrice du groupe de traces, il suffit de remplacer chaque lettre a par $l(a) = (a(\bar{a}a)^*(1-\bar{a}) + \bar{a}(a\bar{a})^*(1-a))$. On vérifie bien que les expressions rationnelles utilisées sont non ambiguës.

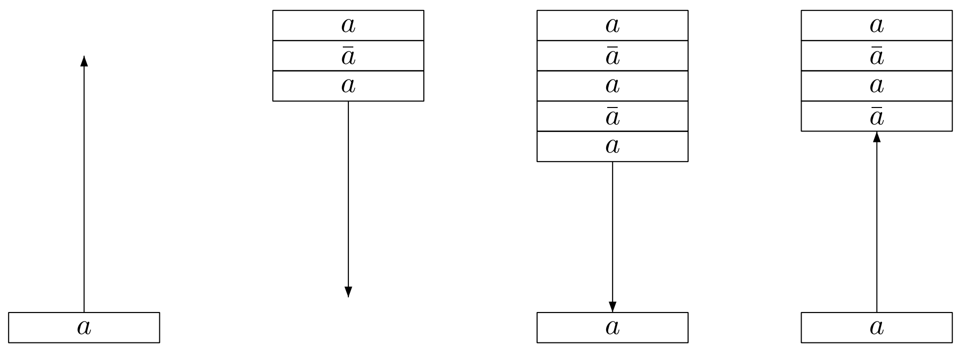
Cas 2 : la relation $I\cap <$ n'est pas transitive sur Σ. Il y a alors des mots interdits de longueur 2, mais aussi des familles de la forme $cI_{b,c}^*b$ où $I_{b,c}$ est l'ensemble des lettres qui commutent avec b, qui sont plus petites que b, et qui dépendent de c. Les chaînes recouvrantes deviennent alors beaucoup plus complexes, et n'ont pas été étudiées de manière aussi approfondie que pour les ordres transitifs.

3.2.2 Preuve bijective de la fonction de Möbius pour le groupe dans les séries sur le monoïde de traces

Dans ce paragraphe, on note $\tilde{\mathbb{M}} = \mathbb{M}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ et $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\Sigma, D)$. On va maintenant donner une preuve de la fonction de Möbius pour les groupes de traces similaire à celle donnée dans [10]. Malheureusement, on se peut pas de placer directement dans l'espace des séries sur le groupe de traces, car le produit de Cauchy (produit usuel pour la multiplication de séries) n'y est pas défini. On se place donc dans l'espace des séries sur le monoïde de traces $\tilde{\mathbb{M}}$, et on définit une injection Φ de $\mathbb{G}$ dans $\tilde{\mathbb{M}}$ qui à une trace dans le groupe, associe la trace du monoïde qui a le même représentant lexicographique. On cherche alors à calculer la série caractéristique de $\Phi(\mathbb{G})$ dans les séries sur $\tilde{\mathbb{M}}$. On appelle trace colorée toute trace de $\mathbb{M}$ représentée par un mot de la forme $a_1\bar{a}_1a_1\bar{a}_1..., a_2\bar{a}_2a_2..., ..., a_k\bar{a}_ka_k...$ tel que $(a_1, ..., a_k)$ est une clique de $\tilde{I}$. On note $\mathbb{T}_{col}$ l'ensemble des traces colorées.

On représente les traces par des tas de pièces (pour simplifier, on identifie les termes de lettre et pièce). Les pièces maximales d'un tas sont celles qui ne sont recouverte par aucune autre pièce. On les note $Max(t)$. On note aussi $Max(c,t)$ l'ensemble des lettres du support de c et des lettres de $Max(t)$ qui sont indépendantes du support de c.

Définissons une involution ψ de $\mathbb{T}_{col} \times \Phi(\mathbb{G})\backslash(\varepsilon, \varepsilon)$. On note a la plus petite des lettres de $Max(c,t)$. On distingue les cas suivants , où on a représenté les occurences de a et $\bar{a}$ dans c au dessus, et dans les pièces maximales de t en dessous :



Les flèches indiquent que l'on fait passer une lettre d'un ensemble à l'autre. On voit aisément que définie comme cela, ψ est une involution, et qu'on a l'égalité :

$$(-1)^{|c|}t.c = -(-1)^{|c'|}t'.c', \text{ avec } \psi(c,t) = (c', t').$$

Donc,

$$\sum_{c,t\in\mathfrak{C}_{col}\times\Phi(\mathbb{G})} (-1)^{|c|}c.t = 1.$$

La série génératrice de $\sum_{c\in\mathbb{T}_{col}}(-1)^{|c|}c$ est :

$$\sum_{c\in\mathbb{T}_{col}}(-1)^{|c|}c = \sum_{\tilde{c}\in\mathfrak{C}(\tilde{I})}(-1)^{|\tilde{c}|}\prod_{a\in\tilde{c}} a\frac{1-\bar{a}}{1-\bar{a}a}.$$

On déduit facilement la même formule en se plaçant cette fois dans l'espace des séries sur le monoïde commutatif libre.

3.3 Sur la série génératrice des hauteurs

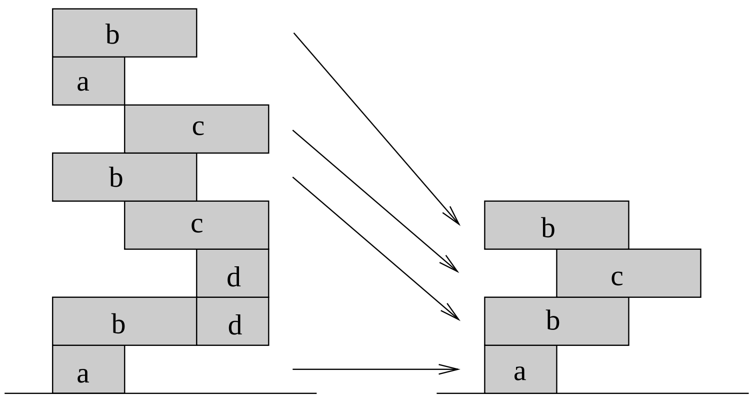
Il y a deux manières de calculer la série génératrice des longueurs : on passe soit par l'interprétation matricielle d'un automate $((u, A(1, y),\ v(1, y)))$, soit par une méthode directe qui donne une interprétation combinatoire à la série. C'est la fonction de Möbius.

La première méthode permet aussi de calculer la série génératrice de la hauteur $((u, A(x, 1),$ $v(x, 1)))$, mais aucune interprétation combinatoire, qui donnerait un calcul direct de H n'a jusqu'à présent été trouvée.

Dans ce paragraphe, nous allons donner une interprétation combinatoire de la série génératrice des hauteurs. Mais cette interprétation ne donne pas directement la formule pour H. En fait, la série H est utilisée pour calculer une autre série, dont on peut aussi donner une formule explicite.

On considère les cliques $\mathfrak{C}$ associées au monoïde (ou au groupe, le raisonnement étant le même). Pour calculer H, on interprète une trace comme un tas de pièces, et donc comme un empilement de cliques. Certains empilements sont admissibles, d'autres ne le sont pas. C'est ce qui fait la spécificité du monoïde. On considère tout d'abord un empilement quelconque de cliques. On note $D_{\mathbb{M}}$ la série génératrice des empilements quelconques de cliques du monoïde de traces $\mathbb{M}$ (et $D_{\mathbb{G}}$ celle correspondant au groupe de traces $\mathbb{G}$), en gardant les cliques comme variables commutatives. On a : $D_{\mathbb{M}} = 1/(1-\mathfrak{C})$. On essaie maintenant de trouver une bijection entre les éléments de l'empilement et ceux du monoïde.

On définit pour chaque clique c l'ensemble $\mathfrak{C}_c = \{u \in \mathfrak{C} | (c, u) \notin CF\}$ des cliques qui ne peuvent être empilées la clique c dans le monoïde. On transforme un empilement quelconque en un empilement CF-admissible comme suit : on garde la première clique, puis la première clique rencontrée qui est CF-admissible avec la première, et ainsi de suite :



Plus formellement, on a la transformation suivante entre les empilements quelconques de cliques et les empilements CF-admissibles :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathfrak{C}^* & \to & \mathfrak{C}^* \\ (c_1 ... c_k) & \mapsto & (c_{i_1} ... c_{i_l}) \end{array}$$

où $i_1 = 1$ et $c_{i_j} = \min_{s>i_{j-1}}\{c_s|(c_{i_{j-1}}, c_s) \in CF\}$. Si c_{i_j} n'est pas défini, on s'arrête à $c_{i_{j-1}}$. La fonction f est surjective sur l'ensemble des formes normales CF, et on a

$$f^{-1}(c_1...c_j) = c_1\mathfrak{C}_{c_1}^*...c\mathfrak{C}c_j{}^*.$$

On a donc la proposition suivante :

Proposition 7. *Soit $\mathbb{M} = \mathbb{M}(\Sigma, D)$ un monoïde de traces, $\mathfrak{C} = \{c_1, ...c_n\}$ l'ensemble des cliques de son graphe d'indépendance. On a alors l'égalité suivante dans l'espace des séries sur le monoïde libre$\mathfrak{C}^*$.*

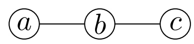
$$D_{\mathbb{M}}(c_1, c_2, ..., c_n) = H_{\mathbb{M}}\left(\frac{c_1}{1-\mathfrak{C}_{c_1}}, \frac{c_2}{1-\mathfrak{C}_{c_2}}, ..., \frac{c_n}{1-\mathfrak{C}_{c_n}}\right)$$

Pour trouver H il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} c_1' &= \frac{c_1}{1-\mathfrak{C}_{c_1}} \\ c_2' &= \frac{c_2}{1-\mathfrak{C}_{c_2}} \\ ... & ... \\ c_n' &= \frac{c_1}{1-\mathfrak{C}_{c_n}} \end{cases}$$

et remplacer toutes les cliques par la variable x.

Exemple 9. *On calcule la série génératrice des hauteurs associée au monoïde de trace dont le graphe de dépendance est :*



On a le système d'équations :

$$\begin{cases} a' &= \frac{a}{1-c-(ac)} \\ b' &= b \\ c' &= \frac{c}{1-a-(ac)} \\ (ac)' &= (ac) \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve :

$$\begin{cases} a &= \frac{a'(1-(ac)')(1-c')}{1-a'c'} \\ b &= b' \\ c &= \frac{c'(1-(ac)')(1-a')}{1-a'c'} \\ (ac) &= (ac)' \end{cases}$$

Comme

$$D = \frac{1}{1-a-b-c-(ac)},$$

on obtient :

$$H(x) = \frac{1}{1-2\frac{x(1-x)^2}{(1-x^2)}-2x} = \frac{1+x}{1-3x}$$

3.4 Où l'on retrouve le polynôme de Möbius

On considère maintenent la série $\sum_{t \in \mathbb{M}} h(t) y^{|t|}$. C'est en fait la dérivée de F par rapport à x, prise en $x = 1$. On remarque sur quelques exemples que la fonction de Möbius apparaît au dénominateur de cette fonction. Nous allons donc le montrer dans le cas général.

Proposition 8. *Soit*

$$F(x, y) = \frac{N(x, y)}{D(x, y)}$$

une fraction rationelle. On pose

$$L(y) = F(1, y) = \frac{N(1, y)}{D(1, y)} = \frac{1}{\mu(y)}.$$

Alors

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1, y) = \frac{N_1}{D_1 \mu},$$

où N, D, N_1, D_1 sont des polynômes.

Démonstration. Soit ρ une racine de μ. On va étudier la multiplicité du pôle 1 dans la dérivée de la fraction $F(x, \rho)$.

On note α la multiplicité de 1 dans $D(x, \rho)$ et β celle de 1 dans $N(x, \rho)$. On a toujours $\alpha > \beta$ car ρ est pôle de L. On distingue deux cas, suivant que 1 est racine de $N(x, \rho)$ ou non.

Cas 1 : 1 n'est pas racine de $N(x, \rho)$. Alors, le numérateur

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x, \rho) D(x, \rho) - \frac{\partial D}{\partial}(x, \rho) N(x, \rho)$$

a pour racine avec multiplicité exactement $\alpha - 1$. Mais alors, la fraction

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \rho) D(x, \rho)$$

ne s'annule pas en $x = 1$, et même, 1 est un pôle. Ceci veut dire que ρ est pôle de $\frac{\partial F}{\partial x}(1, y) D(1, y)$. Donc on retrouve dans $\frac{\partial F}{\partial x}(1, y)$, au dénominateur un pôle ρ avec sa multiplicité dans $D(1, y)$, plus 1.

Cas 2 : 1 est racine de $N(x, \rho)$, donc $\beta \neq 0$. On pose

$$N'(x) = \frac{N(x, \rho)}{(1 - x)^\beta} \text{ et } D'(x) = \frac{D(x, \rho)}{(1 - x)^\beta}.$$

Alors comme précédemment le numérateur

$$\frac{\partial N'}{\partial x}(x, \rho) D'(x, \rho) - \frac{\partial D'}{\partial x}(x, \rho) N'(x, \rho)$$

a 1 pour racine avec multiplicité exactement $\alpha - \beta - 1$, et donc $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \rho) \frac{D(x,\rho)}{N(x,\rho)}$ ne s'annule pas en $x = 1$, qui est même pôle. Donc $\frac{\partial F}{\partial x}(1, y) \frac{D(1,y)}{N(1,y)}$ ne s'annule pas en $y = \rho$ qui est même pôle, et on retrouve ρ au dénominateur de $\frac{\partial F}{\partial x}(1, y)$ avec la multiplicité que cette racine avait dans μ, plus 1. $\square$

4 Propriétés asymptotiques des séries génératrices

Notations : Soit $S \in \mathbb{N}[[x]]$ une série rationnelle. On la note $S = \sum (S|n)x^n$, sa singularité dominante est notée ρ_S, de multplicité k_S.

Si S est une fraction rationnelle, on connaît le comportement asymptotique des coefficients $(S|n)$ ([5]) :

$$(S|n) \sim \frac{\rho_S}{(k_S - 1)!}[S(y)(\rho_S - y)^{k_S}]_{|y=\rho_S} n^{k_L - 1} \rho_S^{-n}$$

4.1 Étude des singularités des séries $L_{\mathbb{G}}$ et $H_{\mathbb{G}}$

Nous avons calculé les expressions des séries génératrices des longueurs et des hauteurs. À partir de celles-ci, on peut trouver le comportement asympotique des coefficients des séries. On peut alors approximer le nombre de traces de longueur n, ou de hauteur h. Les techniques utilisées consistent à trouver le pôle dominant et l'ordre de la fraction rationnelle série génératrice.

Donnons tout d'abord un premier lemme ayant rapport au graphe des cliques, pour le monoïde, puis pour le groupe :

Lemme 4. *Si le graphe de dépendance D du monoïde de traces $\mathbb{M} = \mathbb{M}(\Sigma, D)$ est fortement connexe, alors le graphe des cliques correspondant est aussi fortement connexe.*

La preuve de ce lemme est donnée dans [7].

Lemme 5. *Si le graphe de dépendance de $\tilde{D}$ du groupe de traces $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ est fortement connexe , alors le graphe des cliques correspondant est aussi fortement connexe.*

Notation : $\bar{a}$ est l'inverse de a donc on prend la convention $\bar{\bar{a}} = a$ et on étend la notion aux mots : la trace représentée par $\bar{u}$ est l'inverse de celle représentée par u. En particulier, $a \in supp(u) \Leftrightarrow \bar{a} \in supp(\bar{u})$.

Démonstration. Il s'agit de montrer que pour toutes cliques u et v il existe un chemin dans Γ de u à v. Faisons-le par récurrence sur la taille des cliques : $|u| + |v|$. Si $|u| + |v| = 2$, alors $|u| = |v| = 1$ et comme il existe un chemin de u à v dans le graphe $(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$, il existe aussi un chemin de $\{u\}$ à $\{v\}$ dans le graphe des cliques. Si $|u| + |v| > 2$, si $|u| > 1$, il existe $a \in \text{alph}(u)$ tel que (u, a) est admissible, puis, si nécessaire ($\bar{a} \in \text{alph}(v)$), un chemin de a à une lettre qui n'appartient pas à $\text{alph}(\bar{v})$, notée b.

Il existe un chemin de b à v : on considère le sous-graphe de $\tilde{D}$ dont les nœuds sont pour chaque lettre c de Σ soit c, soit $\bar{c}$, sachant que si $c \in \text{alph}(vb)$, alors on choisit c. On garde toutes les arêtes qui joignent les nœuds sélectionnés. Ce graphe est par construction isomorphe à D, et donc fortement connexe. D'après le lemme précédents, le graphe des cliques restreint à ces nœuds est fortement connexe : il existe un chemin de b à v. ☐

Le lemme suivant permet de caractériser les structures commutatives. Nous le démontrons dans le cas du groupe (pour le monoïde, il déjà été démontré dans [7]) :

Lemme 6. *On a $\rho_{L_{\mathbb{G}}} = 1$ ou $\rho_{H_{\mathbb{G}}} = 1$ si et seulement si $\mathbb{G}$ est le groupe commutatif libre.*

Démonstration. D'après la formule de la croissance exponentielle, on a $\limsup_n (L_{\mathbb{G}}|n)^{1/n} = 1/\rho_{L_{\mathbb{G}}}$. On a donc : $\rho_{L_{\mathbb{G}}} \leq 1$ et de même $\rho_{H_{\mathbb{G}}} \leq 1$. S'il existe $a, b \in A$ tel que $a\tilde{D}b$, $a \neq b$, alors toutes les traces $t_1...t_n$ avec $t_i \in \{a, b\}$ sont de longueur et de hauteur n. Donc $(L_{\mathbb{G}}|n) \geq 2^n$ et $(H_{\mathbb{G}}|n) \geq 2^n$. Donc on a $\rho_{L_{\mathbb{G}}} \leq 1/2$ et $\rho_{H_{\mathbb{G}}} \leq 1/2$.

Dans le cas du monoïde commutatif libre, on a le résultat grâce à la proposition 6, et au cas de l'alphabet à une lettre où l'on voit facilement que $\rho_{L_{\mathbb{G}}} = \rho_{H_{\mathbb{G}}} = 1$:

$$L_{\mathbb{G}} = H_{\mathbb{G}} = \frac{1+x}{1-x}$$

□

Proposition 9. *Soit (Σ, D) un graphe de dépendance fortement connexe et $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ le groupe de traces correspondant. Alors $L_{\mathbb{G}}$ et $H_{\mathbb{G}}$ ont une unique singularité dominante qui est réelle, positive et d'ordre 1.*

Démonstration. Pour le monoïde, le résultat n'était pas immédiat, mais dans le cas du groupe, la preuve pour $L_{\mathbb{G}}$ en est une conséquence immédiate : $L_{\mathbb{G}}$ est de la forme $L_{\mathbb{M}}(\frac{2x}{1+x})$, où $L_{\mathbb{M}}$ est la série génératrice du monoïde associé, qui a un graphe de dépendance connexe si celui du groupe l'est. Donc $L_{\mathbb{M}}$ a une unique singularité dominante, d'ordre 1, et la relation entre les singularités de $L_{\mathbb{G}}$ et $L_{\mathbb{M}}$, donnée au paragraphe précédent montre que $L_{\mathbb{G}}$ a aussi une unique singularité dominante, d'ordre 1 : $2\rho_{L_{\mathbb{M}}} - 1$.

La preuve pour $H_{\mathbb{G}}$ ainsi qu'une autre preuve pour L est donnée en annexe, avec d'autres preuves. □

Proposition 10. *Soit (Σ, D) un graphe de dépendance non connexe et $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ le groupe de traces correspondant. Soit $(\Sigma_s, D_s)_{s\in S}$ sa partition en sous-graphes fortement connexes. Notons L_s et H_s les fontions génératrices des longueurs et des hauteurs correspondantes. On a :*

1. *La série $L_{\mathbb{G}}$ a une unique singularité dominante : $\rho_{L_{\mathbb{G}}} = \min_{s\in S} \rho_{L_s}$, dont l'ordre est $\#\{s,\ \rho_{L_s} = \rho_{L_{\mathbb{G}}}\}$*
2. *La série $H_{\mathbb{G}}$ a une unique singularité dominante : $\rho_{H_{\mathbb{G}}} = \prod_{s\in S} \rho_{H_s}$, dont l'ordre est $|\Sigma|$ si $\mathbb{G}$ est le groupe libre commutatif et $1 + \#\{s,\ |\Sigma_s| = 1\}$ sinon.*

Démonstration. On a
$$L_{\mathbb{G}} = \prod_s L_s = \prod_s \frac{1}{\mu_s(\frac{x}{1+x})}.$$
On en déduit que la seule racine de cette fraction est -1. de plus on sait que les pôles dominants desfractions L_s sont positives. Donc il n'y a pas d'annulation possible entre le numérateur et le dénominateur. Donc la singularité dominante et son ordre sont bien ceux énoncés dans la proposition.

Considérons maintenant la série génératrice des hauteurs, et prouvons le résultat par induction sur $|S|$. Si $|S| = 1$, alors le résultat est déjà démontré, à la proposition précédente. Si $|S| = m > 1$, $S = \{1, ..., m\}$, et supposons que le résultat est démontré pour $|S| = m - 1$ alors posons H_1 la série génératrice des hauteurs associée au graphe (Σ_1, D_1) et H_2 la série génératrice des hauteurs associée au graphe $(\Sigma\backslash\Sigma_1, D\backslash D_1)$. On a : $H_{\mathbb{G}} = \sum_{i,j}(H_1|i)(H_2|j)x^{\max(i,j)}$. Mais alors,
$$(H_{\mathbb{G}}|n) = (H_1|n)\sum_{i=0}^{n}(H_2|i) + (H_2|n)\sum_{i=0}^{n}(H_1|i) - (H_1|n)(H_2|n). \tag{1}$$
H_1 a une unique singularité dominante, d'ordre 1, réelle positive, donc, $(H_1|n) = a_n\rho_{H_1}^{-n}$, avec $\lim_n a_n = a \in \mathbb{R}_+^*$. H_2 a une unique singularité dominante, réelle, positive d'après l'hypothèses de récurrence, et notons k son ordre : $(H_2|n) = b_n n^{k-1}\rho_{H_2}^{-n}$, avec $\lim_n b_n = b \in \mathbb{R}_+^*$.

Si $\rho_{H_1} < 1$ et $\rho_{H_2} < 1$:
$$\begin{aligned}(H_1|n)\sum_{i=0}^{n}(H_2|i) &= a_n\rho_{H_1}^{-n}(\sum_{i=0}^{n} b_i\rho_{H_2}^{-i} i^{k-1}) \\ &= a_n b\rho_{H_1}^{-n}\rho_{H_2}^{-n}(\sum_{i=0}^{n}(b_{n-i}/b)\rho_{H_2}^{i}(n-i)^{k-1}) \\ &\sim abn^{k-1}(1-\rho_{H_2})^{-1}(\rho_{H_1}\rho_{H_2})^{-n}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(H_2|n)\sum_{i=0}^{n}(H_1|i) &= b_n n^{k-1}\rho_{H_2}^{-n}(\sum_{i=0}^{n}a_i\rho_{H_1}^{-i}) \\ &= b_n a n^{k-1}\rho_{H_2}^{-n}\rho_{H_1}^{-n}(\sum_{i=0}^{n}(a_{n-i}/a)\rho_{H_1}^{i}) \\ &\sim abn^{k-1}(1-\rho_{H_1})^{-1}(\rho_{H_2}\rho_{H_1})^{-n}\end{aligned}$$

En revenant à l'équation 1, on obtient :

$$(H_{\mathbb{G}}|n) \sim abn^{k-1}((1-\rho_{H_1})^{-1}+(1-\rho_{H_2})^{-1}-1)(\rho_{H_1}\rho_{H_2})^{-n}$$

On a donc bien $\rho_{H_{\mathbb{G}}} = \rho_{H_1}\rho_{H_2}$ et l'ordre de $H_{\mathbb{G}}$ reste bien k : on a le même nombre de composantes à un élément que pour H_2.

Si maintenant $\rho_{H_1} = \rho_{H_2} = 1$, les composantes connexes du graphe D sont nécessairement des graphes à un seul nœud, et le groupe est nécessairement le groupe commutatif engendré par $k+1$ lettre. On a donc $(H_1|0) = (H_2|0) = 1$ et pour tout n strictement positif, on a $(H_1|n) = 2$ et $(H_2|n) \sim bn^{k-1}$. On a :

$$\begin{aligned}(H_{\mathbb{G}}|n) &= (H_1|n)\sum_{i=0}^{n}(H_2|i) + (H_2|n)\sum_{i=0}^{n-1}(H_1|i) \\ &= 2b\sum_{i=0}^{n}b_n/bi^{k-1} + b_n n^{k-1}(2n-1) \\ &\sim cn^k.\end{aligned}$$

$H_{\mathbb{G}}$ a pour singularité dominante 1, d'ordre $k+1$.

Enfin, si $\rho_{H_1} = 1$ et $\rho_{H_2} < 1$ (pour le dernier cas, on peut se ramener à ceui-ci) :

$$\begin{aligned}(H_1|n)\sum_{i=0}^{n}(H_2|i) &= 2(\sum_{i=0}^{n}b_i\rho_{H_2}^{-i}i^{k-1}) \\ &= 2b\rho_{H_2}^{-n}(\sum_{i=0}^{n}(b_{n-i}/b)\rho_{H_2}^{i}(n-i)^{k-1}) \\ &\sim 2bn^k(1-\rho_{H_2})^{-1}(\rho_{H_2})^{-n}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(H_2|n)\sum_{i=0}^{n}(H_1|i) &= b_n n^{k-1}\rho_{H_2}^{-n}(2n+1) \\ &\sim 2bn^{k-1}(\rho_{H_2}\rho_{H_1})^{-n}\end{aligned}$$

En injectant de nouveau dans l'équation 1, on obtient que $\rho_{H_{\mathbb{G}}} = \rho_{H_2}$ et que l'ordre ce cette singularité est $k+1$, car il y a une composante à un seul élément de plus par rapport à H_2.

Ainsi, la proposition est prouvée pour m composantes. Elle est donc prouvée dans le cas général. $\square$

Ces deux propositions permettent de connaître le comportement asymptotique des séries $L_{\mathbb{G}}$ et $H_{\mathbb{G}}$:

$$\begin{aligned}(L_{\mathbb{G}}|n) &\sim \frac{\rho_{L_{\mathbb{G}}}}{(k_{L_{\mathbb{G}}}-1)!}[L_{\mathbb{G}}(y)(\rho_{L_{\mathbb{G}}}-y)^{k_{L_{\mathbb{G}}}}]_{|y=\rho_{L_{\mathbb{G}}}} n^{k_{L_{\mathbb{G}}}-1}\rho_{L_{\mathbb{G}}}^{-n} \\ (H_{\mathbb{G}}|n) &\sim \frac{\rho_{H_{\mathbb{G}}}}{(k_{H_{\mathbb{G}}}-1)!}[H_{\mathbb{G}}(y)(\rho_{H_{\mathbb{G}}}-y)^{k_{H_{\mathbb{G}}}}]_{|y=\rho_{H_{\mathbb{G}}}} n^{k_{H_{\mathbb{G}}}-1}\rho_{H_{\mathbb{G}}}^{-n}\end{aligned}$$

4.2 Probabilité uniforme sur les traces

On veut maintenant savoir quelle est en moyenne la hauteur d'un mot comparée à sa longueur, et d'abord si cette limite existe. Pour cela, on se fixe une mesure de probabilité sur les traces d'une longueur donnée : on note $\mathbb{M}_n$ (resp. $\mathbb{G}_n$) est l'ensemble des traces de longueur n du monoïde $\mathbb{M}$ (resp. du groupe $\mathbb{G}$), et on définit une probabilité P_n sur $\mathbb{M}_n$ (resp. $\mathbb{G}_n$) : $P_n\{t\} = 1/|\mathbb{M}_n|$ (resp. $P_n\{t\} = 1/|\mathbb{G}_n|$) pour tout $t \in \mathbb{M}_n$ (resp. $\mathbb{G}_n$). La hauteur moyenne des mots de $\mathbb{M}_n$ (resp. $\mathbb{G}_n$) est alors :

$$\mathbb{E}_n[h] = \sum_{t\in\mathbb{M}_n} P_n\{t\}h(t).$$

Sous réserve d'existence de la limite, on appelle $\lim_n \mathbb{E}_n[h]/n$ la hauteur moyenne asymptotique, et on la note $\lambda_{\mathbb{G}}$.

$$\lambda_{\mathbb{G}} = \lim_n \frac{E_n[h]}{n} = \lim_n \frac{\sum_{t\in\mathbb{G}_n} h(t)}{n|\mathbb{G}_n|} = \lim_n \frac{\sum_m m f_{m,n}}{\sum_m n f_{m,n}}$$

où $f_{m,n}$ le nombre de traces de longueur n et de hauteur m dans $\mathbb{G}$.

Dans le cas du monoïde, on sait déjà ([3]) que cette limite existe, et qu'elle est algébrique.

De même, on définit la longueur moyenne asymptotique, en faisant jouer à la longueur et la hauteur des rôles symétriques : on définit la probabilité uniforme $\tilde{P}_n$ sur les traces de hauteur n. On note ${}_n\mathbb{G}$ le nombre de traces du groupe $\mathbb{G}$ de hauteur n, et $\tilde{P}_n\{t\} = 1/|{}_n\mathbb{G}|$. La longueur moyenne d'un mot pour une hauteur donnée est alors :

$$\mathbb{E}_n[l] = \sum_{t\in{}_n\mathbb{G}} \tilde{P}_n\{t\}|t|.$$

et on note $\gamma_{\mathbb{G}}$ la limite, sous réserve d'existence :

$$\gamma_{\mathbb{G}} = \lim_m \frac{E_m[l]}{m} = \lim_m \frac{\sum_{t\in{}_m\mathbb{G}} h(t)}{m|{}_m\mathbb{G}|} = \lim_m \frac{\sum_n n f_{m,n}}{\sum_n m f_{m,n}}$$

On sait aussi ([7]) que cette limite existe et est algébrique pour le monoïde.

Proposition 11. *Les limites $\lambda_{\mathbb{G}}$ et $\gamma_{\mathbb{G}}$ existent et ces nombres sont algébriques.*

De plus, la preuve donnée en appendice nous permet d'avoir une formule explicite de ces limites. Soient $G = (\partial F/\partial x)(1, y)$ et $\tilde{G} = (\partial F/\partial y)(x, 1)$. Alors, on a :

$$\lambda_{\mathbb{G}} = \frac{[G(y)(\rho_L - y)^{k_L+1}]_{|y=\rho_L}}{k_L\rho_L.[L(y)(\rho_L - y)^{k_L}]_{|y=\rho_L}}, \gamma_{\mathbb{G}} = \frac{[\tilde{G}(x)(\rho_H - x)^{k_H+1}]_{|x=\rho_H}}{k_H\rho_H.[H(x)(\rho_H - x)^{k_H}]_{|x=\rho_H}}$$

4.3 Probabilité uniforme sur les mots

Jusqu'ici, on a réussi à transposer ce que l'on savait sur les monoïdes de traces aux groupes de traces. On va maintenant étudier la hauteur asymptotique des traces, mais au lieu de prendre une probabilité uniforme sur les traces, on considère une probabilité uniforme sur les mots de l'alphabet $\tilde{\Sigma}$. Pour le monoïde, l'existence de la hauteur moyenne a déjà été prouvée, et on peut calculer la hauteur d'un mot grâce à un automate à multiplicité sur le semi-anneau (Max,+).

Pour les groupes, on peut aussi montrer l'existence de la hauteur asymptotique, grâce au théorème de Kingman :

Théorème 4 (Kingman). *Soit $(X, \mathcal{A}, P, T)$ un espace de probabilités muni d'un shift T stationnaire et ergodique. Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles. Si*

1. *$(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est sous-additive ($A_{m+n} \leq A_m + A_n$) p.s., et*
2. *$\exists c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[A_i] \geq ci$.*

Alors $\exists \gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{n}A_n \xrightarrow[n]{p.s.\ \mathbb{L}_1} \gamma$

Pour tout n, on met une probabilité uniforme $\mathbb{Q}_n$ sur les mots de longueur n : soit $w \in \tilde{\Sigma}^n$. $\mathbb{Q}_n\{w\} = 1/|\tilde{\Sigma}|^n$. Pour tous $u, v \in \mathbb{G}$, on a clairement $h(uv) \leq h(u) + h(v)$. Soit une suite $(B_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables i.i.d. de $\tilde{\Sigma}$. On définit A_i comme la hauteur du tas formé des i premières pièces de la suite B : $A_i = h(B_1 ... B_i)$. La suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est sous-additive, positive. Donc on peut appliquer le théorème de Kingman : il existe un réel, que l'on note λ^*, tel que la hauteur d'un tas de pièce soit asymptotiquement équivalente à $\lambda^* n$.

De plus, on peut comparer les hauteurs asymptotiques obtenues pour les monoïdes et pour les groupes. Notons $\lambda^*_{\mathbb{M}}$ (resp. $\lambda^*_{\mathbb{G}}$) la hauteur moyenne asymptotique du monoïde de traces $\mathbb{M}$ (resp. du groupe de traces $\mathbb{G}$). On a :

Proposition 12. *Soit Σ un alphabet fini, et D une relation réflexive et symétrique sur Σ. On pose $\mathbb{M} = \mathbb{M}(\Sigma, D)$,$\tilde{\mathbb{M}} = \mathbb{M}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ et $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$. Alors on a :*

$$\lambda^*_{\mathbb{G}} \leq \lambda^*_{\tilde{\mathbb{M}}} = \lambda^*_{\mathbb{M}}$$

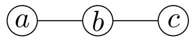
Démonstration. Soit un mot w de $\tilde{\Sigma}$. On a toujours $h_{\tilde{\mathbb{M}}}(w) \geq h_{\mathbb{G}}(w)$, puisque des simplifications sont permises dans le groupe, et pas dans le monoïde. Or

$$\lambda_S = \lim_n \frac{\sum_{w\in\tilde{\Sigma}^n} h_S(w)}{n|\tilde{\Sigma}|^n} \text{ ,S} = \mathbb{G} \text{ ou } \tilde{\mathbb{M}}.$$

De plus, on obtient la dernière égalité en remarquant qu'en oubliant le coloriage des pièces, le nombre de mots de longueur n est divisé par 2^n, mais aussi chaque mot non colorié correspond à 2^n mots coloriés différents. □

Comme pour les monoïdes, on aimerait pouvoir modéliser l'évolution d'un tas de pièces, et en particulier sa hauteur, grâce à des applications topicales. Mais nous n'avons pas trouvé de telle modélisation, et même nous ne savons même pas si une telle modélisation existe. En effet, pour connaître l'évolution d'un tas de pièces pour un monoïde de traces, il suffit de représenter son profil (la forme supérieure du tas sans indication des pièces qui le constituent). On peut alors déterminer le profil exact du tas où on a fait tomber une pièce supplémentaire. Ainsi, pour des exemples simples, on peut trrouver une représentation par une chaîne de Markov qui soit assez simple pour mener à bien les calculs de la hauteur moyenne d'une trace. Mais dans le cas du groupe, les pièces peuvent s'annuler, et donc le tas peut disparaître en fonction des pièces du tas. On ne peut donc pas vraiment simplifier la représentation du tas de pièces pour obtenir sa hauteur. Ainsi, même pour des exemples simples (hors monoïde libre, et monoïde libre commutatif), on ne peut rien calculer sur la représentation par une chaîne de Markov.

Exemple 10. *Considérons le graphe :*



On obtient pour le monoïde $\lambda^*_{\mathbb{M}} = \frac{10+\sqrt{5}}{15}$ *grâce à un argument utilisant les chaînes de Markov. Pour les groupes, il faudraît une chaîne de Markov modélisant la probabilité de passage d'un profil à l'autre, mais cette probabilité ne dépend pas uniquement du profil (pour modéliser le tas de pièces avec une chaîne de Markov, il faudrait un état par trace).*

On peut néanmoins calculer les valeurs de λ^* pour les deux cas extrêmes que sont le groupe libre et le groupe commutatif libre. On a le tableau suivant, avec $k = |\Sigma|$:

λ^*	Monoïde	Groupe
libre	1	$1 - 1/k$
commutatif libre	$1/k$	0

Pour le groupe libre, on peut modéliser la hauteur par une chaîne de Markov : soit h_n la hauteur de l'empilement des n premières pièces. Alors (h_n) est une chaîne de Markov, et l'on a :

$$\mathbb{P}(h_{n+1} = h_n + 1) = 1/2k \qquad \mathbb{P}(h_{n+1} = h_n - 1) = (2k-1)/2k.$$

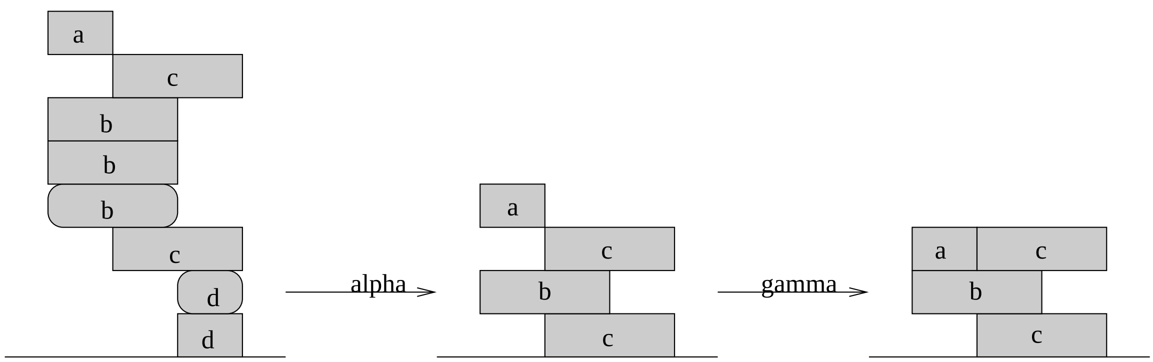
Donc la hauteur asymptotique moyenne est $1 - 1/k$. Pour le groupe libre commutatif, on peut aussi modéliser le tas par une chaîne de Markov, de la marche aléatoire sur $\mathbb{N}^k$. Chaque état représente la hauteur de chaque colonne. La chaîne est récurrente nulle. Donc $\lambda^* = 0$.

En fait, on peut obtenir la hauteur de la trace d'un groupe en deux étapes : tout d'abord, on réduit le mot, c'est à dire que l'on enlève toutes les lettres qui s'annulent. Puis on calcule la hauteur, comme si l'on était dans un monoïde. Il existe, toujours d'après le théorème de Kingman, une limite asymptotique presque sure de la longueur de la trace représentée par un mot. Notons $\alpha = \lim_n \frac{|\psi(w_1...w_n)|}{n}$ où $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \tilde{\Sigma}^{\mathbb{N}^*}$. On a

$$\begin{aligned} \lambda^*_{\mathbb{G}} &= \lim_n \frac{h(\psi(w_1...w_n))}{n} \\ &= \lim_n \frac{h(\psi(w_1...w_n))}{|\psi(w_1...w_n)|} \frac{|\psi(w_1...w_n)|}{n}. \end{aligned}$$

On note $\gamma = \lim_n \frac{h(\psi(w_1...w_n))}{|\psi(w_1...{}_n)|}$. On a $\alpha\gamma = \lambda^*_{\mathbb{G}}$. Intuitivement on peut se demander si $\gamma = \lambda^*_{\mathbb{M}}$.

Les résultats des simulations que nous avons effectuées montrent que ce n'est pas le cas. Le tableau des résultats est donné dans l'annexe (B.3).



On vérifie que l'on a bien $\lambda_{\mathbb{M}} \geq \lambda_{\mathbb{G}}$, et on constate que $\gamma \geq \lambda_{\mathbb{M}}$ et en général $\gamma \neq \lambda_{\mathbb{M}}$. De plus, si l'on calcule la différence $\lambda^*_{\mathbb{M}} - \lambda^*_{\mathbb{G}}$, on remarque qu'elle est proche de $1/|\Sigma|$. L'égalité $\lambda^*_{\mathbb{M}} - \lambda^*_{\mathbb{G}} = 1/|\Sigma|$ est vérifiée pour le groupe libre et le groupe commutatif libre.

Elle l'est aussi pour un graphe de dépendance dont toutes les composantes fortement connexes maximales sont des graphes complets : soit p le nombre de sommets d'une composante connexe maximale, et k la taille de l'alphabet Σ. Le comportement de la hauteur des différentes colonnes du tas de pièces correspondant (une colonne par composante connexe) est semblable au comportements des hauteurs des graphes des composantes connexes prises séparément. Dont la pile la plus haute sera une des piles correspondant à une composante fortement connexe de taille p (que l'on note C). La hauteur asymptotique des traces du monoïde est alors $1.p/k$ (en moyenne une pièce tombe sur la colonne C avec une probabilité p/k). Pour le groupe, la hauteur asymptotique est : $(1-1/p)(p/k) = p/k - 1/k$.

Pour les autres graphes de dépendance, on ne peut pas faire de calculs. Mais on remarque qu'à deux centièmes près, l'égalité est vérifiée.

5 Monoïde involutif de traces.

On se place toujours dans l'alphabet $\Sigma \cup \bar{\Sigma}$. Mais la structure associée aux traces n'est plus un groupe : aux relations de commutation attribuées précédemment, on ajoute seulement $a\bar{a} = \epsilon$, et pas $\bar{a}a = \epsilon$. On peut considérer que les lettres barrées modélisent une annulation de la tâche correspondant à la même lettre non barrée. Mais cette annulation n'a pas toujours lieu, même quand une annulation est lancée : si elle est lancée trop tard, et qu'elle arrive après une tâche avec laquelle elle ne commute pas, la pièce la modélisant reste dans le tas. On a la définition plus formelle suivante.

Définition 8. *Le monoïde $\mathbb{A}(\tilde{\Sigma}, D)$ est le monoïde défini par les générateurs $\tilde{\Sigma}$ et des relations : $ab = ba$, $\bar{a}b = b\bar{a}$, $a\bar{b} = \bar{b}a$ et $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$, $(a,b) \notin D$ d'une part et $a\bar{a} = \varepsilon$ $\forall a \in \Sigma$.*

Comme pour les deux structures précédentes, on définit le graphe des cliques, et les cliques CF-admissibles : (u,v) est CF-admissible si

$$\forall b \in \mathrm{alph}(v)\ (\exists a \in \mathrm{alph}(u) \text{ tel que } aDb \text{ et } \bar{b} \in \bar{\Sigma} \Rightarrow b \notin \mathrm{alph}(u)).$$

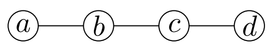
Il existe aussi une formule agréable pour la série génératrice des longueurs de la structure asymétrique $\mathbb{A}$. En effet, il existe une bijection entre les éléments de cette structure et celle du monoïde de trace noté $\mathbb{M}_{\mathbb{A}}$ défini sur le même alphabet $\tilde{\Sigma}$ que $\mathbb{A}$, avec la relation de dépendance $\tilde{D}$:

1. $aDb \Rightarrow a\tilde{D}b$, $a\tilde{D}\bar{b}$, $\bar{a}\tilde{D}b$, $\bar{a}\tilde{D}\bar{b}$ $\forall a \neq b$,
2. $\bar{a}\tilde{I}a$, $\forall a \in \tilde{\Sigma}$.

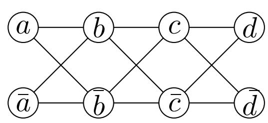
En effet si l'on prend l'ordre sur $\tilde{\Sigma}$: $\bar{a} < a < \bar{b} < b < \ldots$, les représentants en forme normale lexicographique pour ces deux structures sont exactement les mêmes, puisque on autorise dans $\mathbb{A}$ les empilements du type $\bar{a}a$, mais pas ceux du type $a\bar{a}$.

On obtient aussi les mêmes résultats que pour les monoïdes et les groupes quand aux hauteurs asymptotiques des traces de cette structure.

Exemple 11. *Si l'on reprend le premier exemple :*



Le graphe associé au monoïde de même série génératrice est :



On a donc :

$$L_{\mathbb{A}} = \frac{1}{1 - 8x + 16x^2 - 12x^3 + 3x^4}$$

6 Une application aux systèmes à événements discrets

Considérons un modèle tâches-ressources, comme proposé dans [6] : une fabrique exécute un nombre fini de tâches Σ à l'aide d'un ensemble de ressources. Chaque tâche requiert un sous-ensemble donné de ressources pour être exécutée. Soit $D \in \Sigma \times \Sigma$ la relation symétrique et réflexive constituée des paires de tâches qui nécessitent des ressources non disjointes. Puisque deux tâches peuvent être exécutées simultanément si et seulement si elles nécessitent des ressources disjointes, il est naturel de modéliser l'exécution des tâches par le monoïde de traces $\mathbb{M}(\Sigma, D)$. Dans ce contexte, les deux principales mesures de performances asociées à une trace t sont sa longueur $|t|$ (le temps d'exécution séquentiel) et sa hauteur $h(t)$ (le temps d'exécution parallèle).

Maintenant, on modélise l'ordre (aléatoire) des commandes par une suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur Σ. Le temps de cycle de la fabrique est alors $\lambda^*_{\mathbb{M}(\Sigma,D)} = \lim_n n^{-1}\mathbb{E}[h \circ \pi(\xi_0\xi_1 ... \xi_{n-1})]$ (voir paragraphe précédent).

Ici, on veut en plus quantifier la résistance aux pannes et aux annulations d'ordres. Pour ce faire, considérons le modèle suivant. La production à l'étape n est donnée par une trace t_n dans $\mathbb{M}(\Sigma, D)$. On rappelle que $Max(t_n)$ est l'ensembles des lettres a telles que $|t_n\bar{a}| = |t_n| - 1$. La production à l'étape $n + 1$ est une variable aléatoire t_{n+1} donnée par :

$$\begin{cases} \forall a \in Max(t_n), & P\{t_{n+1} = t_n\bar{a}\} = \alpha/K,\ P\{t_{n+1} = t_n a\} = 1/K \\ \forall a \in \Sigma \backslash Max(t_n), & P\{t_{n+1} = t_n a\} = 2/K \end{cases},$$

où α est un paramètre fixé et $k = (\alpha - 1)\#Max(t_n) + 2\#\Sigma$ est la constante de normalisation. Remarquons que pour $\alpha = 1$, on a $\lim_n n^{-1}\mathbb{E}[h \circ \pi(t_n)] = \lambda_{\mathbb{G}(\Sigma,D)^*}$. Sous réserve d'existence, soit $\alpha_* \in \mathbb{R}_+$ le seuil tel que presque sûrement,

$$\begin{cases} \lim_n n^{-1}\mathbb{E}[h \circ \pi(t_n)] > 0 & \text{if } \alpha < \alpha_* \\ \lim_n n^{-1}\mathbb{E}[h \circ \pi(t_n)] = 0 & \text{if } \alpha > \alpha_* \end{cases}.$$

Le paramètre α représente l'intensité des ordre d'annulation, et α_* l'intensité au dessus de laquelle la fabrique ne produit plus rien.

Adapté à notre contexte, le resultat de Lyons [8] montre l'existence de α_* et que $\alpha_* = \rho_{L_{\mathbb{G}(\Sigma,D)}}$. D'où une interprétation inattendue : le degré de résistance aux annulations dans un système tâches-ressources peut être paramétré par $\rho_{L_{\mathbb{G}(\Sigma,D)}}$.

7 Conclusion

L'étude faite ici montre que les groupes de traces ont les mêmes propriétés que les monoïdes de traces : la hauteur moyenne des traces converge asymptotiquement lorsqu'on met une probabilité uniforme sur les mots ou sur les traces. De plus, on sait calculer de manière simple la série génératrice des traces pour le groupe. Par contre, les calculs déjà difficiles pour les monoïdes le sont encore plus pour les groupes, en particulier pour la hauteur asymptotique des tas de pièces.
Je tiens à remercier Jean Mairesse mon directeur de stage pour sa disponibilité et ses conseils avisés, ainsi que l'UMS Médicis qui a mis a ma disposition un compte et les logiciels de calcul formel dont j'ai eu besoin au cours de ces quatre mois.

A Preuves

On donne la preuve pour $\lambda_{\mathbb{M}}$, la preuve pour $\gamma_{\mathbb{M}}$ étant identique. Une démonstration directe a déjà donnée été concernant la singularité dominante de L, mais nous allons en donner une autre, beaucoup plus longue, mais plus précise : elle montre égalité entre la singularité dominante de L et l'inverse du rayon spectral de A. De plus, il aurait quand même fallu faire le même raisonnement pour H.

$L(y) = F(1, y) = \sum_{t\in\mathbb{M}} y^{|t|}$ est la série génératrice des longueurs des traces. Soit

$$G = \frac{\partial F}{\partial x}(1, y) = \sum_{t\in\mathbb{M}} h(t)y^{|t|}.$$

Sous réserve d'existence, on a donc

$$\lambda_{\mathbb{M}} = \lim_n (G|n)/(n(L|n)). \tag{2}$$

A.1 Sur les singularités de L et G et le rayon spectral de A

Les séries G et L sont à coefficients positifs (puisqu'on compte des objets), donc ils ont une singularité dominante réelle positive (théorème de Pringsheim). Notons les respectivement ρ_L et ρ_G. On a les inégalités $n(L|n)C^{-1} \leq (G|n) \leq n(L|n)$ puisque $|t|/C \leq h(t) \leq |t|$ (C est la taille maximale d'une clique). Donc $\rho_L = \rho_G$. Soit k_L l'ordre de cette singularité dans L.

Hypothèses :

1. ρ_L est l'unique singularité dominante dans L,
2. l'ordre de ρ_L dans G est $k_L + 1$ et cet ordre est strictement plus grand que les ordres des autres autres singularités dominantes de G de module ρ_L,

alors $\lambda_{\mathbb{M}}$ existe et on déduit aisément de l'équation(2) que :

$$\lambda_{\mathbb{M}} = \frac{[G(y)(\rho_L - y)^{k_L+1}]_{|y=\rho_L}}{k_L\rho_L.[L(y)(\rho_L - y)^{k_L}]_{|y=\rho_L}}.$$

En particulier $\lambda_{\mathbb{M}}$ est algébrique. En outre, on a une expression explicite pour cette limite. Reste maintenant à prouver que les suppositions faites sont vraies. On sait que $F(x, y) = 1 + u(I - A(x, y))^{-1}v(x, y)$, mais on va plutôt travailler sur une partition équitable des cliques $\pi = \{\mathfrak{C}_1, ..., \mathfrak{C}_m\}$ où toutes les cliques chaque élément $\mathfrak{C}_i$ de la partition π ont la même longueur l_i. On précisera quelle est cette partition par la suite. Alors,

$$F(x, y) = 1 + u_\pi(I - A_\pi(x, y))^{-1}v_\pi(x, y) = 1 + \frac{u_\pi Adj(I - A_\pi(x, y))v_\pi(x, y)}{\det(I - A_\pi(x, y)}.$$

On note $F(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$ avec $Q(x, y) = \det(I - A_\pi(x, y))$. Par conséquent, avec cette écriture L et G deviennent :

$$L(y) = P(1, y)/Q(1, y) \qquad \text{et} \qquad G(y) = \frac{1}{Q(1, y)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(1, y) - L\frac{\partial Q}{\partial x}(1, y)\right). \tag{3}$$

Les singularités de L et G sont donc comprises dans celles de $1/Q(1, y)$, donc ρ_L est plus grand que le module de la singularité dominante de $1/Q(1, y)$. Montrons que les modules des singularités dominantes de L, G et $1/Q(1, y)$ sont égaux.

A.1.1 Une transformation d'écriture

On va maintenant transformer la représentation $(u_\pi, A_\pi(1,y), v_\pi(1,y))$ en une représentation $(\tilde{u}_\pi, y\tilde{A}_\pi, y\tilde{v}_\pi)$ de telle sorte que les vecteurs et la matrice $\tilde{u}_\pi$, $\tilde{A}_\pi$ $\tilde{v}_\pi$ aient tous leurs coefficients dans $\mathbb{N}$. L'idée est d'éclater les lignes représentant des cliques à k éléments en k lignes. On a alors la représentation suivante :

$E = \{(\mathfrak{C}_i, 1)...(\mathfrak{C}_i, l_i),\ i \in \mathbb{N}_m\}$, $\tilde{u}_\pi \in \mathbb{N}^{1\times E}$, $\tilde{A}_\pi \in \mathbb{N}^{E\times E}$ et $\tilde{v}_\pi \in \mathbb{N}^{E\times 1}$.

$$\tilde{u}_{\pi i} = \begin{cases} |\mathfrak{C}_p| & \text{si } i = (\mathfrak{C}_p, 1),\ p \in \mathbb{N}_m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\tilde{A}_{\pi i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = (\mathfrak{C}_p, k),\ j = (\mathfrak{C}_p, k+1) \text{ et } p \in \mathbb{N}_m \\ n_{p,p} & \text{si } i = (\mathfrak{C}_p, l_p),\ j = (\mathfrak{C}_p, 1) \text{ et } p \in \mathbb{N}_m \\ n_{p,q} & \text{si } i = (\mathfrak{C}_p, l_p),\ j = (\mathfrak{C}_q, 1) \text{ et } A_{p,q} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\tilde{v}_{\pi i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = (\mathfrak{C}_p, l_p),\ p \in \mathbb{N}_m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle que l_i est la taille commune des cliques de $\mathfrak{C}_i$ et que $n_{p,q}$ est le nombre commun d'empilements CF-admissibles des cliques de $\mathfrak{C}_q$ sur un élément de $\mathfrak{C}_p$.

Il y a une bijection entre les chemins réussis de l'automate $(u_\pi, A_\pi(1,y), v_\pi(1,y))$ et ceux de $(\tilde{u}_\pi, y\tilde{A}_\pi, y\tilde{v}_\pi)$. On a donc :

$$L = 1 + u_\pi(I - A_\pi(1,y))^{-1} v_\pi(1,y) = 1 + \tilde{u}_\pi(I - y\tilde{A}_\pi)^{-1} y\tilde{v}_\pi^T.$$

On a aussi l'égalité suivante (une preuve est donnée dans [7]) :

$$Q(1,y) = \det(I - A_\pi(1,y)) = \det(I - y\tilde{A}_\pi).$$

A.1.2 Étude des valeurs propres de $\tilde{A}_\pi$.

Pour montrer que les singularités dominantes de L et G sont égales à celles de $1/Q(1,y)$, il suffit de montrer que la valeur propre maximale de $\tilde{A}_\pi$ est l'inverse de la singularité dominante de L. Pour ce faire, décomposons le graphe $(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ en ses composantes fortement connexes maximales (Σ_i, D_i), $i \in \mathfrak{U}$ (en particulier pour les composantes à un élément. On donne une première condition sur la partition π :

Condition 1 : $\forall i \in \{1,...,m\}$, $\mathfrak{C}_i$ est composé de cliques qui ont leurs éléments dans le même nombre de composantes fortement connexes maximales de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$.

Cette condition peut toujours être vérifiée : il suffit de prendre la partition triviale (une clique par élément de la partition). On va maintenant ordonner les éléments de la partition de façon à obtenir une matrice A triangulaire supérieure par blocs. On regroupe dans le même bloc les éléments de π selon les composantes de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$: si $\mathfrak{C}_i$ contient des cliques sur $(D\tilde{\Sigma}_j)_{j\in J}$, alors on la groupe avec les $\mathfrak{C}_k$ qui contiennent des cliques sur $(\tilde{\Sigma}_j)_{j\in J}$. On obtient alors une nouvelle partition de π, $\mathcal{U} = \{U_1, ..., U_r\}$ et on note d_i le nombre commun de composantes fortement connexes qui composent les cliques des éléments de U_i. De plus, si on ordonne les lignes et les colonnes de A_π selon ces ensembles et $d_i \leq d_j \Rightarrow i \geq j$. Alors la matrice A_π est triangulaire supérieure par blocs, avec $A_{\pi U_1}, ..., A_{\pi U_k}$ en diagonale, où les $A_{\pi U_i}$ sont les restrictions de A_π à U_i. De plus, ces blocs sont irréductibles.

On a donc :

$$\begin{aligned}\det(I - A_\pi(1,y)) &= \prod_{i\in\{1,\dots,r\}} \det(I - A_{\pi U_i}(1,y))\\ \det(I - y\tilde{A}_\pi) &= \prod_{i\in\{1,\dots,r\}} \det(I - y\tilde{A}_{\pi U_i})\end{aligned}$$

Soit e_i un vecteur ligne nul sauf en position i, où le coefficient est égal à 1. Pour $i, j \in \mathbb{N}_m$, définissons $L_{i,j} = |\mathfrak{C}_i| e_i (I - A_\pi)(1,y))^{-1} y^{|j|} e_j^T$.

Le coefficient $(L_{i,j}|n)$ s'interprète comme le nombre de chemins de $\mathfrak{C}_i$ à $\mathfrak{C}_j$ de poids y^n dans l'automate de représentation $(u_\pi, A_\pi(1,y), v_\pi(1,y))$. On a de plus $L = 1 + \sum_{i,j} L_{i,j}$. Comme précédemment, on a :

$$L_{ij} = |\mathfrak{C}_i| e_i (I - A_\pi(1,y))^{-1} y^{|j|} e_j^T = e_{(i,1)} (I - y\tilde{A}_\pi)^{-1} y e^T_{(j,|j|)}$$

Considérons une ligne u. On note $A_{\pi[u]}$ la matrice obtenue à partir de A_π en remplaçant la ligne et la colonne u par une ligne et une colonne de zéros. On a alors :

$$\begin{aligned}L_{uu} &= |\mathfrak{C}_u| e_u (I - A_\pi(1,y))^{-1} y^{|u|} e_u^t = |\mathfrak{C}_u| y^{|u|} (I - A_\pi(1,y))^{-1}_{uu}\\ &= |\mathfrak{C}_u| y^{|u|} \frac{Adj(I - A_\pi(1,y))_{uu}}{\det(I - A_\pi(1,y))} = |\mathfrak{C}_u| y^{|u|} \frac{\det(I - A_\pi(1,y)_{[u]})}{\det(I - A_\pi(1,y)}.\end{aligned}$$

Notons maintenant $\tilde{A}_{\pi[u]}$ la matrice obtenue à partir de $\tilde{A}_\pi$ en remplaçant la ligne $(u,1)$ et la colonne $(u,|u|)$ par une ligne et une colonne de zéros. On obtient :

$$y^{|u|} \det(I - A_\pi(1,y)_{[u]}) = y \det(I - y\tilde{A}_{\pi[u]}).$$

Si u appartient à $U \in \mathcal{U}$, alors on note $\tilde{A}_{\pi U,[u]}$ la restriction de $\tilde{A}_{\pi[u]}$ à U. Les expressions ci-dessus ensemble donnent la formule suivante :

$$L_{uu} = |\mathfrak{C}_u| \frac{y \det(I - \tilde{A}_{\pi[u]})}{\det(I - y\tilde{A}_\pi)} = |\mathfrak{C}_u| \frac{y \det(I - \tilde{A}_{\pi U,[u]})}{\det(I - y\tilde{A}_{\pi U})}$$

Or $\tilde{A}_{\pi U,[u]} \le \tilde{A}_{\pi U}$, et ces deux matrices sont différentes. De plus $\tilde{A}_{\pi U}$ est irréductible. Donc on peut appliquer le théorème de Perron-Frobenius pour les matrices irréductibles : le rayon spectral de $\tilde{A}_{\pi U,[u]}$ est strictement plus petit que celui de $\tilde{A}_{\pi U}$. Pour toute matrice M, les racines du polynôme $\det(I - yM)$ sont les inverses des valeurs propres non nulles de M. Donc il n'y a pas de simplification possible entre le numérateur et le dénominateur de l'équation précédente concernant une singularité dominante : les singularités dominantes de L_{uu} sont exactement les singularités dominantes de $1/\det(I - y\tilde{A}_{\pi U})$.

Or $(L|n) \ge (L_{uu}|n)$ pour tout n, donc la singularité dominante de L est plus petite que celle de L_{uu}. Nous en déduisons donc que la singularité dominante de L est de module plus petit que $1/\det(I - y\tilde{A}_{\pi U})$, et ce pour tout U. Donc elle est plus petite que celle de $1/Q(1,y)$. Comme $(G|n) \ge (L|n)$, on a le même résultat pour G.

Ceci montre donc que les singularités dominantes de L, G et $1/Q(1,y)$ sont égales en module : c'est aussi l'inverse du rayon spectral de $\tilde{A}_\pi$.

Si $(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ est fortement connexe, la matrice $\tilde{A}_\pi$ est irréductible et primitive (pour tout $a \in \tilde{\Sigma}$, $\tilde{A}_{\pi(a,1)(a,1)} > 0$). Donc d'après le théorème de Perron Frobenius, la matrice $\tilde{A}_\pi$ a une unique valeur propre de module maximal, d'ordre 1 et réelle positive. On en conclut donc que ρ_L est l'unique singularité dominante de L et G, puisque $nC^{-1}(L|n) < (G|n) < n(L|n)$, alors l'ordre de ρ_L dans G est 2. L'hypothèse 1 est donc vérifiée dans ce cas. Dans le cas de H, on a prouvé que l'ordre de la singularité dominante de H est 1.

Revenons au cas général.

A.2 Cas général

Nous savons maintenant que L a une unique singularité dominante. En effet, La proposition 9 vient d'être démontrée, et on peut donc appliquer la proposition 10. Étudions les singularités dominantes de G, et donc les valeurs propres de module maximal de $\tilde{A}_\pi$. $\tilde{A}_\pi$ est triangulaire supérieure par blocs, donc il suffit d'étudier ces blocs. Fixons une partie V de la partition $\mathcal{U}$, et considérons le bloc diagonal $\tilde{A}_V$. Distinguons deux cas :

Cas 1 Supposons qu'une des composantes $(\tilde{\Sigma}_s, \tilde{D}_s)$ de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ qui apparaît dans V est différente du graphe complet. Alors il existe deux ensembles de cliques $\mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_j \in V$ tels que $l_i = l_j + 1$. Donc $\tilde{A}_{\pi V}$ est acyclique (à $\mathfrak{C}_i$ correspond un cycle de longueur l_i dans la matrice $\tilde{A}_\pi$ et à $\mathfrak{C}_j$ un cycle de longueur l_j.) Comme $\tilde{A}_{\pi V}$ est irréductible, elle est primitive. D'après le théorème de Perron Frobenius, la matrice $\tilde{A}_{\pi V}$ a une unique valeur propre de module maximal, qui de plus est réelle, positive et de multiplicité 1.

Cas 2 Supposons maintenant que toutes les composantes $(\tilde{\Sigma}_i, \tilde{D}_i)$ de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ qui apparaissent dans V sont des graphes complets. On peut trouver une partition π qui regroupe toutes les cliques de ces graphes, et plus précisément, on donne une deuxième condition sur π :

Construction d'une partition particulière : Considérons toutes les composantes fortement connexes maximales de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ qui sont des graphes complets. Soit W l'ensemble des parties non vides de l'ensemble de ces composantes. On regroupe tous les éléments de W qui sont isomorphes : soit $(n_1, ..., n_k) \in \mathbb{N}^k$ une suite d'entiers tels que $n_1 \leq ... \leq n_k$. On met dans le même élément de π toutes les parties (caractérisées par leurs alphabet) $(\tilde{\Sigma}_{i_1}, ..., \tilde{\Sigma}_{i_k})$ qui vérifient $|\tilde{\Sigma}_{i_1}| = n_1, ..., |\tilde{\Sigma}_{i_k}| = n_k$.

Cette partition est compatible avec la condition 1, puisque on ne regroupe dans le même eélément de π que des cliques qui ont le même nombre de lettres, et on choisit toujours une et une seule lettre par composante fortement connexe.

Avec une telle décomposition, les blocs diagonaux de A_π correspondant à des sous-graphes complets maximaux de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{D})$ sont de dimension 1, et correspondent donc à un unique élément $\mathfrak{C}_i$ de π. Soit $n_1, ..., n_k$ la suite des tailles des alphabets de taille au moins 2 dont est issue chaque lettre d'une clique quelconque de $\mathfrak{C}_i$. Le coefficient de $A_{\pi\{\mathfrak{C}_i\}}$ est $y^k \prod_{j=1}^{k}(n_j - 1)$: chaque clique peut avoir pour successeur CF-admissible une clique qui ne contient pas de lettre inverse à celles de la clique. Notons $K = \prod_{j=1}^{k}(n_j - 1)$. Alors, on a :

$$\det(I - y^k A_{\pi\{\mathfrak{C}_i\}}(1,1)) = (1 - Ky^k)$$

Pour revenir à l'étude de $\tilde{A}_{\pi\{\mathfrak{C}_i\}}$, les valeurs propres sont

$$K^{1/k} \exp\left(\frac{2i\pi j}{k}\right),$$

avec multiplicité 1 pour tous, et $\rho(\tilde{A}_{\pi\{\mathfrak{C}_i\}}) = K^{1/k}$.

Le rayon spectral de $\tilde{A}_\pi$ est $\rho(\tilde{A}_\pi) = \max_{V \in \mathcal{U}} \rho(\tilde{A}_{\pi V})$. Définissons les deux ensembles suivants : $\mathcal{V} = \{V \subset \mathcal{U} : \forall v \in V, I_v = \emptyset\}$ et $\mathcal{S} = \{V \in \mathcal{U} : \rho(\tilde{A}_{\pi V}) = \rho(\tilde{A}_\pi)\}$. Selon les deux cas étudiés, nous pouvons de nouveau distinguer deux cas :

$\mathcal{V} \cap \mathcal{S} = \emptyset$: le premier cas s'applique : $\tilde{A}_\pi$ n'a qu'une valeur propre de module maximal. $\rho(\tilde{A}_\pi)^{-1} = \rho_L = \rho_G$ est l'unique singularité dominante de G.

Supposons maintenant qu'il existe $U \in \mathcal{V} \cap \mathcal{S}$. le deuxième cas implique que $U = \{\mathfrak{C}_i\}$ et $\rho(\tilde{A}_\pi) = \rho(\tilde{A}_{\pi U}) = (\prod_{i \in \mathbb{N}_k}(n_k - 1))^{1/k}$,où les n_i sont les taille des alphabets des composantes qui interviennent pour une clique quelconque de $\mathfrak{C}_i$. Pour être maximal, tous les n_i doivent être égaux, et cette valeur commune doit être maximale : soit

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{S} = \mathcal{P}(V), \text{ avec } V = \{v \in \mathcal{V} : |\tilde{\Sigma}_v| = \max_{x \in \mathcal{V}} |\tilde{\Sigma}_x|\}$$

L'ensemble des valeurs propres maximales de $\tilde{A}_\pi$ est donc donné précisément donné par :

$$\bigcup_{L=1}^{|V|} \left\{ (\max_{x \in \mathcal{V}} |\tilde{\Sigma}_x| - 1) \exp(2i\pi l/L),\ l = 0...L-1 \right\}. \tag{4}$$

Soit $K = \max_{x \in \mathcal{V}}(|\Sigma_x| - 1)$. D'après la construction, toutes les valeurs propres maximales apparaissent avec une multiplicité égale au nombre de fois où elles apparaissent dans l'équation (4). On remarque alors que K apparaît avec une multiplicité $|V|$, Ensuite, la valeur propre maximale qui apparaît avec la seconde plus grande multiplicité est $-K$, qui apparaît avec multiplicité $\lfloor |V|/2 \rfloor$. Il s'ensuit que la singularité dominante non positive réelle de plus grande multiplicité de $1/Q(1,y)$ a pour multiplicité $\lfloor |V|/2 \rfloor$. Or d'après l'équation (3), on en déduit que l'ordre maximal d'une singularité dominante non réelle positive de G est au plus $\lfloor |V|/2 \rfloor$.

De plus, on peut écrire $L = \prod_{v \in V} L_v \prod_{v \notin V} L_v$. La fonction de Möbius de $(\tilde{\Sigma}_v, I_v), v \in V$ est $(1 - Ky)$, et donc :

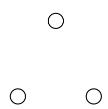
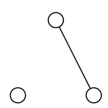
$$L = \frac{1}{(1 - Ky)^{|V|}} \prod_{v \notin V} L_v$$

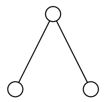
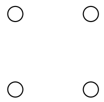
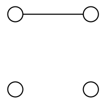
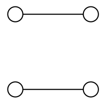
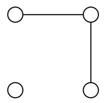
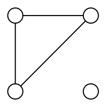
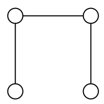
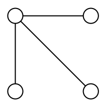
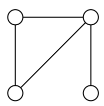
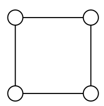
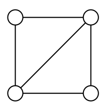
L'ordre de la singularité $1/K$ dans L est alors au moins $|V|$. Puisque $n(L|n)/C \leq (G|n) \leq n(L|n)$, on déduit que l'ordre de la singularité dominante de G est $k_L + 1 \geq |V| + 1$. L'ordre maximal d'une singularité dominante non réelle positive de $\mathbb{G}$ est $\lfloor |V|/2 \rfloor$

Les hypothèses faites en début de preuve sont donc vérifiées, et ceci achève la preuve.

B Tableaux

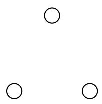
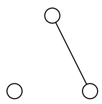
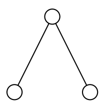
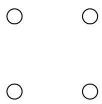
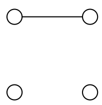
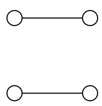
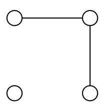
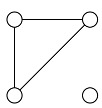
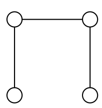
B.1 Fonctions de Möbius

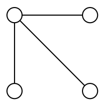
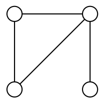
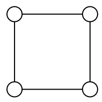
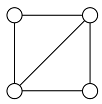
(Σ, D)	$\mu_{\mathbb{M}}$	$\mu_{\mathbb{G}}$
K_n	$(1 - nx)$	$\frac{1-(2n-1)x}{1+x}$
	$(1-x)^2$	$\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}$
	$(1-x)^3$	$\frac{(1-x)^3}{(1+x)^3}$
	$(1-x)(1-2x)$	$\frac{(1-x)(1-3x)}{(1+x)^2}$

(Σ, D)	$\mu_{\mathbb{M}}$	$\mu_{\mathbb{G}}$
	$1-3x+x^2$	$\frac{1-4x-x^2}{(1+x)^2}$
	$(1-x)^4$	$\frac{(1-x)^4}{(1+x)^4}$
	$(1-x)^2(1-2x)$	$\frac{(1-x)^2(1-3x)}{(1+x)^3}$
	$(1-2x)^2$	$\frac{(1-3x)^2}{(1+x)^2}$
	$(1-x)(1-3x-x^2)$	$\frac{(1-x)(1-4x-x^2)}{(1+x)^3}$
	$(1-x)(1-3x)$	$\frac{(1-x)(1-5x)}{(1+x)^2}$
	$(1-x)(1-3x)$	$\frac{(1-x)(1-5x)}{(1+x)^2}$
	$1-4x+3x^2-x^3$	$\frac{1-5x-x^2-3x^3}{(1+x)^3}$
	$1-4x+2x^2$	$\frac{1-6x+x^2}{(1+x)^2}$
	$1-4x+2x^2$	$\frac{1-6x+x^2}{(1+x)^2}$
	$1-4x+x^2$	$\frac{1-6x-3x^2}{(1+x)^2}$

B.2 Taux de croissance de $L_{\mathbb{M}}$ et $L_{\mathbb{G}}$, hauteur asymptotique

B.2.1 Valeurs exactes

(Σ, D)	$\rho_{L_{\mathbb{M}}}^{-1}$	$\lambda_{\mathbb{M}}$	$\rho_{L_{\mathbb{G}}}^{-1}$	$\lambda_{\mathbb{G}}$
K_n	n	1	2n-1	1
	1	$3/4$	1	$3/4$
	1	$11/18$	1	$11/18$
	2	1	3	1
	$(\sqrt{5}+3)/2$	$(7+\sqrt{5})/10$	$\sqrt{5}+2$	$(25-3\sqrt{5})/20$
	1	$25/48$	1	$25/48$
	2	1	3	1
	2	$3/4$	3	$3/4$
	$(\sqrt{5}+3)/2$	$(7+\sqrt{5})/10$	$\sqrt{5}+2$	$(25-3\sqrt{5})/20$
	3	1	5	1
	3	$19/22$	5	$379/444$

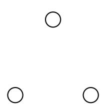
(Σ, D)	$\rho_{L_{\mathbb{M}}}^{-1}$	$\lambda_{\mathbb{M}}$	$\rho_{L_{\mathbb{G}}}^{-1}$	$\lambda_{\mathbb{G}}$
	3,155	0,873	5,291	0,860
	$2+\sqrt{2}$	$(6+\sqrt{2})/8$	$3+2\sqrt{2}$	$(41+\sqrt{2})/46$
	$2+\sqrt{2}$	$(11+\sqrt{2})/14$	$3+2\sqrt{2}$	$7/8$
	$2+\sqrt{3}$	$(4+\sqrt{3})/6$	$2\sqrt{3}+3$	$(9-3\sqrt{3})/4$

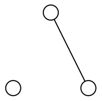
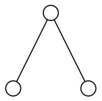
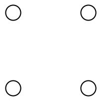
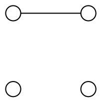
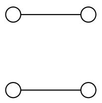
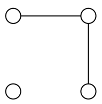
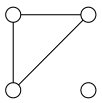
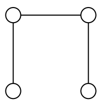
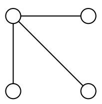
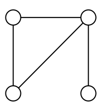
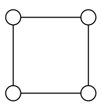
Remarque 3. *Pour un des graphes, les valeurs données dans le tableau sont approchées. En effet, les formules exactes seraient trop longues pour entrer dans le tablau. Les voici tout de même :*

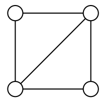
$$\begin{aligned}
\rho_{L_{\mathbb{M}}} &= \frac{1}{72}\left(72 - 12X - (9-\sqrt{93})X^2\right)\\
\lambda_{\mathbb{M}} &= \frac{1}{333}\left(193 + (4 + \frac{94}{93}\sqrt{93})X + (\frac{65}{6} - \frac{203}{186}\sqrt{93})X^2\right)\\
X &= (108 + 12\sqrt{93})^{1/3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{L_{\mathbb{G}}} &= -\frac{1}{9} + (\frac{1}{9} - \frac{1}{484}\sqrt{93})Y + \frac{47}{4356}Y^2\\
\lambda_{\mathbb{G}} &= \frac{6}{13} - (\frac{7}{104} - \frac{43}{9672}\sqrt{93})Y + (\frac{29}{25168} + \frac{1919}{2340624}\sqrt{93})Y^2\\
Y &= (188 + 36\sqrt{93})^{1/3}.
\end{aligned}$$

B.2.2 Valeurs approchées

(Σ, D)	$\rho_{L_{\mathbb{M}}}^{-1}$	$\lambda_{\mathbb{M}}$	$\rho_{L_{\mathbb{G}}}^{-1}$	$\lambda_{\mathbb{G}}$
	1	0,75	1	0,75
	1	0,611	1	0,611

(Σ, D)	$\rho^{-1}_{L_{\mathbb{M}}}$	$\lambda_{\mathbb{M}}$	$\rho^{-1}_{L_{\mathbb{G}}}$	$\lambda_{\mathbb{G}}$
	2	1	3	1
	2,618	0,924	4,23	0,915
	1	0,521	1	0,521
	2	1	3	1
	2	0,75	3	0,75
	2,618	0,924	4,23	0,915
	3	1	5	1
	3	0,864	5	0,854
	3,155	0,873	5,291	0,860
	3,414	0,927	5,828	0,922
	3.414	0,887	5,828	0,875

(Σ, D)	$\rho_{L_{\mathbb{M}}}^{-1}$	$\lambda_{\mathbb{M}}$	$\rho_{L_{\mathbb{G}}}^{-1}$	$\lambda_{\mathbb{G}}$
	3,732	0,955	6,464	0,951

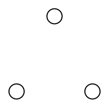
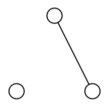
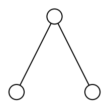
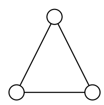
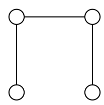
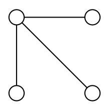
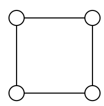
La table ci-dessus représente les singularités dominantes des séries génératrices des monoïdes de traces et des groupes de traces pour les groupes de traces les plus simples. On a donné le graphe D pour chaque, le graphe $\tilde{D}$ se déduisant de ce dernier. On a aussi calculé les hauteurs asymptotiques des mots pour a probabilité uniforme sur les traces. On remarque que l'on a toujours, du moins pour ces exemples $\lambda_{\mathbb{G}} \leq \lambda_{\mathbb{M}}$ et l'implication

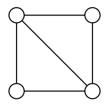
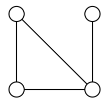
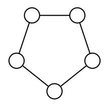
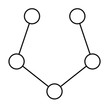
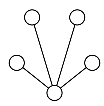
$$\lambda_{\mathbb{M}_1} \leq \lambda_{\mathbb{M}_2} \Rightarrow \lambda_{\mathbb{G}_1} \leq \lambda_{\mathbb{G}_2}.$$

On peut donc se demander si cette inégalité et cette implication sont toujours vraies.

B.3 Hauteur saymptotique avec probabilité sur les mots

Les valeurs étoilées sont les valeurs qu'on a pu calculer de façon exacte.

(Σ, D)	$\lambda_{\mathbb{M}}^*$	α	γ	$\lambda_{\mathbb{G}}^*$	$\lambda_{\mathbb{M}}^* - \lambda_{\mathbb{G}}^*$
	1/3*	0,019	0,552	0*	1/3*
	2/3*	0,341	0,98	1/3*	1/3*
	0,816	0,577	0,854	0,492	0,324
	1*	2/3*	1*	2/3*	1/3*
	0,691	0,604	0,745	0,450	0,241
	0,681	0,597	0,742	0,443	0,238
	0,789	0,678	0,806	0,546	0,243

(Σ, D)	$\lambda^*_{\mathbb{M}}$	α	γ	$\lambda^*_{\mathbb{G}}$	$\lambda^*_{\mathbb{M}} - \lambda^*_{\mathbb{G}}$
	0,894	0,714	0,907	0,648	0,246
	0,802	0,660	0,846	0,559	0,243
	0,671	0,688	0,699	0,481	0,190
	0,596	0,619	0,652	0,404	0,192
	0,584	0,603	0,655	0,395	0,189

Références

[1] J. Bétréma et J.G. Penaud. Modèles avec particules dures, animaux dirigés, et séries en variables partiellement commutatives. 1994.

[2] P. Cartier et D. Foata. *Problèmes combinatoires de commutation et réarrengements.* Lect. Notes in Mathematics, 85. Springer Verlag, 1969.

[3] V. Diekert. *Combinatorics on traces.* Lectures Notes in Computer Sciences, Springer-Verlag 1990.

[4] C. Droms. Subgraphs of graph groups. *Journal of Algebra*, (110) :519–522, 1987.

[5] P. Flajolet et R. Sedgewick. The average case analysis : complex asymptotics and generating functions. *Rapport de Recherche INRIA*, (2026), 1993.

[6] S. Gaubert et J. Mairesse. Task resourses models and (max,+) automata. In J. Gunawardena, editor, *Idempotency*, volume 11, pages 133–144. Cambridge University Press, 1998.

[7] D. Krob J. Mairesse and I. Michos. On the average parallelism in trace monoids. À paraître dans Discrete Mathematics.

[8] R. Lyons. Random walks and the growth of groups. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I*, 320(11) :1361–1366, 1995.

[9] A.M. Vershik S. Nechaev and R. Bikbov. Statistical properties of locally free groups with applications to braid groups and growth of random heaps. *Communications in Mathematical Physics, Springer-Verlag*, pages 469–501, 2000.

[10] G.-X. Viennot. Heaps of pieces, i : Basic definitions and combinatorial lemmas. In Labelle and Leroux, editors, *Combinatoire Énumérative*, number 1234 in Lect. Notes in Math., pages 321–350. Springer, 1986.