Notations pour le calcul réseau

Marc Boyer [*] — Laurent Jouhet [**] — Anne Bouillard [***]

[*] *ONERA, 2 av E. Belin, 31055 Toulouse Cedex 4*
[**] *ENS Lyon / IXXI, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07*
[***] *ENS Cachan / IRISA, Campus de Ker Lann, 35170 Bruz*

RÉSUMÉ. *Le calcul réseau manipule de nombreuses notions propres à la fois à son domaine de travail (flux, serveur, délai...), et à la modélisation (courbe d'arrivée, de service...). Il utilise le dioïde* $(\min, +)$ *comme support mathématique. Cet article se propose de définir un ensemble de notations associé à ces notions. L'objectif des notations est double: non seulement de simplifier la manipulation (modélisation, preuves) et l'appropriation (diffusion, enseignement) du calcul réseau, mais aussi de redéfinir formellement certaines notions, et ce faisant, de les clarifier.*

ABSTRACT. *Network calculus involves many notions that are both due to the applications concerned (flow, server, delay...) and to the model (arrival curves, service curves...). The mathematical framework is based on the (min,plus) algebra. This article attempts to provide some notations associated to these notions. The aim is two-fold: on the one hand, simplification of the manipulation (model, proofs) and appropriation (diffusion, teaching) of network calculus and in the second hand, formalization and clarification of some notions (notion of server for example).*

MOTS-CLÉS : *calcul réseau, notations*

KEYWORDS: *Network calculus, notations*

[e] soumission à *MSR'09*, le 13 juillet 2009.

1. Introduction

Les systèmes embarqués sont désormais composés calculateurs de plus en plus nombreux, de plus en plus communiquants, et des fonctions critiques sont de nos jours réalisées par des applications distribuées. De plus, afin de réduire coût, poids, maintenance et consommation électrique, le réseau est souvent une ressource partagée par les différentes fonctions. Le réseau de communication devient donc une ressource hautement critique, et de même qu'il est nécessaire de prouver l'ordonnançabilité et le respect des échéances (*dead-line*) des applications sur les calculateurs partagés, il est nécessaire de pouvoir borner le temps de traversée du réseau par un message.

Le calcul réseau est une théorie qui a été développée pour calculer des bornes sur les délais dans les réseaux de communications, initialement pour aider à l'ingénierie de trafic et la maîtrise de la qualité de service dans des réseaux de type IP et/ou ATM [CRU 91a, CRU 91b]. Elle s'avère particulièrement adaptée aux besoins émergeant des réseaux embarqués. Elle a par exemple servi à garantir les délais dans le réseau avionique AFDX [GRI 03, GRI 04].

Bien sûr, pour garantir des délais sur un réseau partagé, il faut avoir des garanties sur le pire trafic entrant dans le réseau (contrat de trafic), et sur un service fournit minimal (contrat de service). Le principe du calcul réseau est de modéliser les contrats de trafic et de service dans le dioïde (min,+), et d'en déduire des bornes, comme ce sera présenté dans les paragraphes 3 et 4.

Mais, alors que la recherche sur le calcul réseau s'active et que le besoin industriel est pressant, sa pénétration dans la communauté reste assez faible. Côtoyant le calcul réseau depuis plusieurs années, en recherche comme en enseignement, les auteurs pensent que certaines notions « passent mal », et que proposer des notations pour les principales notions aideraient à sa diffusion et sa manipulation.

Le paragraphe 2 approfondit les enjeux liées aux notations, et présente quelques notations mathématiques nécessaires pour cet article. Le paragraphe 3 présente les notations que nous utilisons dans cet article pour manipuler les principaux opérateurs du dioïde $(\min, +)$. C'est le paragraphe 4 qui présente le cœur de notre contribution, en présentant simultanément les principales notions de calcul réseau (courbe d'arrivée, de service) et les notations que nous proposons pour les désigner. Le paragraphe 5 donne des précisions par rapport à l'exactitude des bornes. Enfin, le paragraphe 6 conclut et présente les perspectives ouvertes par ces travaux.

2. Enjeux des notations

Définir des notations doit permettre d'aider à identifier et à manipuler les concepts. Cela se fait dans un contexte de notations déjà existantes en mathématiques, et il faut, autant que faire ce peut, rester cohérent avec l'existant.

Ainsi les notations de base utilisées en calcul réseau viennent de plusieurs domaines : certaines notions purement mathématiques sont largement utilisées en dehors du champ du calcul réseau, et viennent de domaines comme la physique ou l'algèbre. D'autres ont été introduites spécifiquement pour le calcul réseau, principalement dans [CRU 91a, CRU 91b, LEB 01, CHA 00]. L'objectif des notations est donc de clarifier les choses, pour simplifier d'une part la manipulation formelle des différents objets mathématiques utilisés en calcul réseau, et d'autre part la diffusion du calcul réseau lui-même.

De plus, plusieurs notions de calcul réseau (les courbes de service minimum ou strict par exemple) sont très proches les unes des autres, mais néanmoins distinctes ; et il n'existe pas, pour certaines d'entre elles, de notation qui permettrait de les identifier de manière univoque, ou de les manipuler plus formellement.

Le calcul réseau manipulant des objets mathématiques qui lui sont propres (courbes de traffic, d'arrivée, de service), il est aussi nécessaire de pouvoir les distinguer les uns des autres, tout en utilisant des notations qui restent proches des propriétés des opérateurs qui leur sont associés (transitivité, isotonicité...)

Enfin, il nous semble nécessaire de disposer de notations formelles pour exprimer la topologie d'un réseau de flux et de serveurs. Dans une partie sur les serveurs partagés nous abordons donc les problèmes de notations liées à la traversée d'un serveur par plusieurs flux. Nous traitons aussi le cas d'un flux traversant plusieurs serveurs.

Notations mathématiques

$\mathbb{R}_{\geq 0}$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls. L'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ est noté $\mathcal{I}_{\geq 0}$. La fonction de test sur un intervalle $A \subset \mathbb{R}$ est définie par $1_A(t) = 1$ si $t \in A$, 0 sinon. Par exemple, $1_{[0,2]}(t)$ vaut 1 si $t \leq 2$ et 0 sinon. La fonction $\delta_T(t)$ vaut 0 si $t \leq T$, $+\infty$ sinon. On note $[x]^+ = \max(x, 0)$. Si $v \in V$ désigne un élément d'un ensemble, nous noterons $\mathbf{v}$ un vecteur de V^n, et v_i la ième composante du vecteur ($\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$). Nous utiliserons la norme 1 d'un vecteur : $||\mathbf{v}|| = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$.

3. Dioïde (min,plus)

Un des intérêt du calcul réseau est que les notions qu'il manipulent s'expriment très bien dans le dioïde dont la première loi est le minimum, et la seconde loi la somme. Il nous faut donc des notations pour les opérateurs qui y sont utilisés. Nous notons $\wedge$ le minimum et $\vee$ le maximum, suivant les notations de [LEB 01] et, plus classiquement, $+$ pour la somme.

Les flux de données sont représentés par leur fonction de cumul. Nous manipulons donc des fonctions croissantes ($\mathcal{G}$), nulles sur les négatifs ($\mathcal{F}$) et nulles en 0 ($\mathcal{F}_0$).

$$\mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \,|\, x < y \implies f(x) \leq f(y) \}$$

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \in \mathcal{G} \,|\, x < 0 \implies f(x) = 0 \} \qquad \mathcal{F}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \in \mathcal{F} \,|\, f(0) = 0 \}$$

Trois opérateurs sur les fonctions sont utilisés, la convolution ($*$), la déconvolution ($\oslash$) et la clôture sous-additive ($\cdot^*$).

$$(f * g)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{0 \le s \le t} f(t-s) + g(s) \qquad (f \oslash g)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0 \le s} f(t+s) - g(s)$$

$$f^* \stackrel{\text{def}}{=} \delta_0 \wedge f \wedge (f * f) \wedge (f * f * f) \wedge \cdots$$

Comparaisons avec d'autres auteurs

Nous avons repris à la fois des notations de [LEB 01] (pour le déconvolution $\oslash$) et de [CHA 00] (pour la convolution $*$ et la clôture sous-additive $\cdot^*$). La notation de [CHA 00] nous a semblé plus pertinente pour la convolution, car c'est la notation de la convolution dans l'algèbre usuelle. La notation $\otimes$ utilisée dans [LEB 01] met plus l'accent sur le dioïde utilisé. De même pour la clôture sous-additive (notée $\bar{f}$ dans [LEB 01]), nous avons préféré mettre en évidence l'aspect auto-convolution. En ce qui concerne la déconvolution nous avons cette fois préféré la notation de [LEB 01] plutôt que celle de [CHA 00] ($\div$), en la rapprochant plutôt de la thérie de la résiduation ([BAC 92]) utilisée dans l'algèbre (max,plus) et qui peut être définie à droite ou à gauche. Notre notation pourra facilement s'y adapter.

4. Calcul réseau

L'objectif du calcul réseau est de permettre de calculer des bornes supérieures garanties pour les délais subis par des flux dans des réseaux, ainsi que pour les quantités de mémoire utilisées par ces flux dans les éléments de réseau. Pour ce faire, il modélise un contrat de trafic par des « courbes d'arrivée », et modélise le serveur par une « courbe de service » [CRU 91a, CRU 91b, LEB 01, CHA 00].

4.1. *Courbe d'arrivée*

Commençons par regarder comment noter les courbes d'arrivée. Soulignons pour commencer que le vocabulaire abonde pour désigner cette relation. On trouvera « R admet α comme courbe d'arrivée », « R est contrainte par α » ou « R est α-lisse »[1]. La définition formelle d'une courbe d'arrivée $\alpha \in \mathcal{F}$ pour un flux $R \in \mathcal{F}_0$ est :

$$\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2_{\ge 0} : R(t+s) - R(t) \le \alpha(s). \tag{1}$$

Intuitivement, le contrat de trafic stipule qu'il y aura au plus $\alpha(s)$ données produites sur tout intervalle de longueur s. On pourrait dire qu'une courbe R a pour courbe d'arrivée α si R est plus petite qu'α quelle que soit l'origine du temps. On peut en

1. En anglais *has arrival curve*, *is contrained by* ou *is α-shaped*.