

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

1 Généralités

PROPOSITION : (CRIT. CAUCHY UNIFORME) Pour de fonctions de X dans E complet :

$$f_n \xrightarrow[+\infty]{u} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall x \in X, \quad d(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon$$

PROPOSITION : Soit (f_n) suite d'applications continues en $x_0 \in E$ de $E \rightarrow F$, telles que $f_n \xrightarrow[+\infty]{u} f$.

Alors f est continue en x_0 .

THÉORÈME : (DOUBLE LIMITE) Pour des fonctions de $A \rightarrow E$, où E est un Banach, $a \in \overline{A}$, si $f_n \xrightarrow[+\infty]{u} f$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ existe alors : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right]$

2 Séries de fonctions

DÉFINITION : Pour des applications bornées à valeurs dans un Banach,

$$\sum g_n \text{ converge normalement} \Leftrightarrow \sum \|g_n\|_\infty \text{ converge}$$

THÉORÈME : *convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme*

3 Intégration

THÉORÈME : Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans un Banach E , si $f_n \xrightarrow[+\infty]{u} f$. Alors f est continue et

$$\left(F_n : x \rightarrow \int_a^x f_n(t) dt \right) \xrightarrow[+\infty]{u} \left(F : x \rightarrow \int_a^x f(t) dt \right)$$

THÉORÈME : (INVERSION SÉRIE-INTÉGRALE) Si $\sum g_n$ CVU sur $[a, b]$ est une série de fonctions continues d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans un Banach E , alors :

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b g_n \right)$$

4 Dérivation

THÉORÈME : Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace de Banach E . Si

- il existe $x_0 \in I$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge
- $f'_n \xrightarrow[+\infty]{u} g$ sur tout segment de I

Alors, $f_n \xrightarrow[+\infty]{u} f$ sur tout segment de I , f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$.

Remarque : Ce théorème se généralise simplement par récurrence.

THÉORÈME : (INVERSION SÉRIE-DÉRIVÉE) Soient les g_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur I intervalle de $\mathbb{R}$, si

- il existe $x_0 \in I$ tel que $\sum g_n(x_0)$ converge
- $\sum g'_n$ CVU sur tout segment de I

Alors, $\sum g_n$ CVU sur tout segment de I , $\sum g_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $(\sum g_n)' = \sum g'_n$

5 Théorèmes d'approximation uniformes

THÉORÈME : $\mathcal{E}^{\text{sc}}([a, b], F)$ est dense dans $(\mathcal{C}_m([a, b], F), \|\cdot\|_\infty)$

THÉORÈME : $\mathcal{A}^{\text{fc}}_m([a, b], F)$ est dense dans $(\mathcal{C}([a, b], F), \|\cdot\|_\infty)$

THÉORÈME : (WEIERSTRASS) $\widetilde{\mathbb{R}[X]_{[a, b]}}$ est dense dans $(\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

Remarque : ce théorème est admis