

SÉRIES ENTIÈRES

1 Généralités

PROPOSITION : Il y a égalité, et on note R le rayon de convergence :

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R} : a_n r^n \text{ bornée}\} = \sup\{r \in \mathbb{R} : a_n r^n \xrightarrow{+\infty} 0\}$$

$$= \sup\{r \in \mathbb{R} : \sum a_n r^n \text{ CV}\} = \sup\{r \in \mathbb{R} : \sum |a_n| r^n \text{ CV}\}$$

PROPOSITION : (LEMME D'ABEL)

— la série $\sum a_n z^n$ est *normalement convergente* sur tout compact $K \subset B(0, R)$

PROPOSITION : (COMPLÉMENT) Si $R > 0$ et il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = R$ et $\sum a_n z^n$ converge, alors : la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est *uniforme* pour $z \in [0, z_0]$ (en tant que segment de $\mathbb{C}$)

PROPOSITION : (RÈGLE DE D'ALEMBERT) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda \in [0, +\infty]$,

alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $R = 1/\lambda$.

PROPOSITION : (SOMME & PRODUIT) Le rayon de convergence R'' de la somme ou du produit de Cauchy de deux séries entières de rayon de convergence R et R' vérifie : $R'' \geq \inf\{R, R'\}$

2 Propriétés

THÉORÈME : (CONTINUITÉ) $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $\{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ (le disque de CV)

THÉORÈME : (FRACTIONS RATIONNELLES) Pour toute fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X) \setminus \{0\}$, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum F(n) a_n z^n$ (bien définie à partir d'un certain rang) ont même rayon de convergence.

THÉORÈME : (SÉRIE DÉRIVÉE) L'application $f :]-R, R[\rightarrow \mathbb{C} \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$. La série entière $\sum n a_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$, et on a :

$$\forall x \in]-R, R[\quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

THÉORÈME : (SÉRIE PRIMITIVE) L'application $f :]-R, R[\rightarrow \mathbb{C} \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue. La série entière $\sum \frac{1}{n} a_{n-1} z^n$ de somme F a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$, et $F' = f$:

$$\forall x \in]-R, R[\quad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} z^n$$

COROLLAIRE : La somme f de la série entière $\sum a_n z^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$. De plus pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence R . En outre,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \quad \text{donc } \forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p$$

THÉORÈME : (ZÉROS ISOLÉS) Soit f la somme de la série entière $\sum a_n z^n$ sur son disque de convergence. Si il existe une suite (z_p) de complexes non nuls tendant vers 0 telle que $f(z_p) = 0$ pour tout p alors $a_n = 0$ pour tout n .

Remarque : deux séries entières dont les sommes coïncident sur un voisinage de 0 sont égales.

THÉORÈME : (FORMULE DE CAUCHY) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de CV $R > 0$, et f la somme de cette série entière sur son disque de convergence. Alors,

$$\forall r \in]0, R[, \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta$$

3 Développement en série entière

PROPOSITION : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de 0. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière sur un voisinage de 0 si et seulement si il existe $\alpha > 0$ tel que la suite de fonctions (R_n) définie par

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

de plus, par égalités de Taylor :

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \quad \theta \in]0, 1[$$

tende simplement vers 0 sur $] -\alpha, \alpha[$. La série entière

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

a alors un rayon de convergence $\geq \alpha$ et f est égale à la somme de cette série entière sur $] -\alpha, \alpha[$.

THÉORÈME : (DE RÉALISATION DE BOREL) Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, il existe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$$

Remarque : ce théorème est hors programme

PROPOSITION : Il y a unicité du développement en série entière d'une fonction