

PROBABILITÉS

1 Définitions générales

DÉFINITION : Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, on dit que $\mathcal{T}$ est une tribu si :

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$
2. $A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}$
3. $\mathcal{T}$ est stable par réunion dénombrable

Un couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace probabilisable.

PROPOSITION :

- Une intersection quelconque de tribus est une tribu
- On peut définir la notion de tribu engendrée (par induction)
- Une tribu est stable par intersection au plus dénombrable

DÉFINITION : Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable, on appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $P : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

1. $P(\Omega) = 1$
2. (axiome de σ -additivité) : $\forall (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints,

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$$

3. (axiome de continuité) qui est équivalent à 2. : pour toute suite monotone (A_k) ,

$$P(\lim A_k) = \lim P(A_k)$$

Remarque : l'axiome de σ -additivité est aussi appelé *axiome des probabilités totales*.

Remarque : Un triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est appelé **espace probabilisé**

DÉFINITION :

Événement : élément de $\mathcal{T}$

Événement élémentaire : élément de Ω

Système complet d'événements : famille d'événements 2à2 disjoints de réunion égale à Ω

Événement presque-sûr : événement de probabilité 1

Événement négligeable : événement de probabilité 0

Système quasi-complet : famille d'événements telle que :

$$\forall i \neq j \quad P(A_i \cap A_j) = 0 \text{ (négligeable)} \quad P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 1 \text{ (quasi-certain)}$$

PROPOSITION : (CRIBLE DE POINCARÉ) Pour n événements d'une tribu $\mathcal{T}$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{S \subset \llbracket 1, n \rrbracket, S \neq \emptyset} (-1)^{|S|-1} P\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right)$$

PROPOSITION : Soit Ω un ensemble au plus dénombrable, les probabilités sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ sont les applications de la forme :

$$P : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ A & \mapsto \sum_{\omega \in A} p_\omega \end{cases}$$

où $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une application vérifiant $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$

2 Probabilités conditionnelles & indépendance

2.1 Indépendance

DÉFINITION : On dit que des événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Pour de tels événements, on a :

$$P(A|B) = P(A) \quad P(B|A) = P(B)$$

DÉFINITION : Soit $(A_k)_{k \in I} \in \mathcal{T}^I$, on dit que les événements (A_k) sont indépendants (mutuellement) si :

$$\forall J \subset I, J \text{ fini}, \quad P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

2.2 Probabilités conditionnelles

PROPOSITION : (PROBABILITÉ CONDITIONNELLE)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

PROPOSITION : (PRODUIT DES PROBABILITÉS)

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P\left(A_n \left| \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k \right.\right)$$

PROPOSITION : (PROBABILITÉS TOTALES) Pour $E_1, \dots, E_n$ un système complet d'événements, et tout événement A ,

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A|E_k)P(E_k)$$

PROPOSITION : (FORMULE DE BAYES) (FORMULE DES PROBABILITÉS DES CAUSES)

Pour $E_1, \dots, E_n$ un système complet d'événements, et tout événement A ,

$$P(E_k|A) = \frac{P(A|E_k)P(E_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|E_i)P(E_i)}$$

3 Variables aléatoires

DÉFINITION : Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probablisable. Une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application $X : \Omega \rightarrow E$ où E est un ensemble et $X(\Omega)$ est une partie au plus dénombrable de E , telle que $\forall a \in X(\Omega), \quad X^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{T}$

DÉFINITION : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probablisé et $X : \Omega \rightarrow E$ une VAD, on appelle loi de X la probabilité P_X définie sur $(E, \mathcal{P}(E))$ par $P_X(A) = P(X^{-1}(A))$. Si Q est une probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$, et $P_X = Q$ s'écrit $X \sim Q$.

DÉFINITION : La loi (X, Y) est la loi conjointe de X et Y , et X et Y sont les lois marginales de (X, Y) . On peut obtenir les lois marginales à partir de la loi conjointe, mais la réciproque est fausse.

DÉFINITION : Soit $X : (\Omega, \mathcal{T}, P) \rightarrow E$ et $Y : (\Omega, \mathcal{T}, P) \rightarrow F$ deux VAD. On dit qu'elles sont indépendantes si : $\forall a \in E, \forall b \in F$, les événements $(X = a)$ et $(Y = b)$ sont indépendants.

DÉFINITION : Soient $X_1, \dots, X_p$ des VAD définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et à valeurs dans $E_1, \dots, E_p$. On dit qu'elles sont mutuellement indépendantes si :

$\forall a_1 \in E_1, \dots, a_p \in E_p \quad (X_1 = a_1), \dots, (X_p = a_p)$ sont mutuellement indépendantes.

Remarque : une famille infinie de VA sont mutuellement indépendantes si toute sous-famille finie l'est.

PROPOSITION : Soient $X_1, \dots, X_n$ des VAD mutuellement indépendantes à valeurs dans $E_1, \dots, E_n$ respectivement. Soit $\begin{cases} f : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow E \\ g : E_{m+1} \times \dots \times E_n \rightarrow F \end{cases}$
Alors, $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont des VAD indépendantes.

THÉORÈME : (FONDAMENTAL) Il existe une suite d'espaces probablisés et de variables aléatoires sur ces espaces, mutuellement indépendantes, telles qu'elles suivent une suite de lois discrètes données.

4 Espérance mathématique

DÉFINITION : Soit X une VAD à valeurs dans un EVN, on définit l'espérance de X par :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

On dit que X admet une *espérance mathématique* si $E(|X|)$ est fini et c'est alors cette valeur.

PROPOSITION :

- L'espérance est linéaire
- Si X admet une espérance mathématique, $|E(X)| \leq E(|X|)$
- Si X et Y sont indépendantes, $E(XY) = E(X)E(Y)$
- Si $X \leq Y$ alors, $E(X) \leq E(Y)$

Remarque : L'espérance est aussi notée $|\cdot|$

THÉORÈME : (DE TRANSFERT) Soit X une VARD à valeurs dans E EVN et $f : E \rightarrow F$, où F EVN, alors $f(X)$ est VARD et admet une espérance mathématique ssi $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.

DÉFINITION : Soit X une VARD et $m \in \mathbb{N}^*$, on dit que X admet un *moment d'ordre m* si X^m admet une espérance mathématique (i.e. $E(|X|^m) < +\infty$). On appelle alors $E(X^m)$ moment d'ordre m de X .

PROPOSITION : Si X admet un moment d'ordre $m + 1$ alors X admet un moment d'ordre m .

DÉFINITION : Pour X et Y admettant un moment d'ordre 2,

$$\text{COV}(X, Y) = E(X - E(X)E(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

C'est une forme bilinéaire symétrique positive.

PROPOSITION :

- $\text{COV}(X, Y) = E(X, Y) - E(X)E(Y)$
- $\text{COV}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X$ et Y non corrélés
- $\text{COV}(X, Y) = \frac{1}{2}(V(X + Y) - V(X) - V(Y))$
- X et Y indépendantes $\Rightarrow \text{COV}(X, Y) = 0$

DÉFINITION : Soit X une VARD admettant un moment d'ordre 2, on appelle *variance* de X :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \text{COV}(X, X)$$

PROPOSITION : (KOENIG-HUYGENS) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

PROPOSITION : Si $X_1, \dots, X_p$ sont VARD deux à deux indépendantes et admettent un moment d'ordre 2,

$$V(X_1 + \dots + X_p) = V(X_1) + \dots + V(X_p)$$

DÉFINITION : Le *coefficient de corrélation* de X et Y , VARD ayant un moment d'ordre 2 est :

$$\frac{\text{COV}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \in [-1, 1]$$

PROPOSITION : (INÉGALITÉ MARKOV) Pour X une VARD positive possédant une espérance mathématique finie,

$$\forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

PROPOSITION : (INÉGALITÉ BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV) Soit X une VARD admettant un moment d'ordre 2 (i.e. de variance finie) :

$$\forall a > 0, \quad P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

THÉORÈME : (LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES) Soit (X_k) une suite de VARD 2à2 indépendantes, suivant la même loi X (i.e. identiquement distribuées) admettant un moment d'ordre 2.

On pose $m = E(X)$, $\sigma = \sqrt{V(X)}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Soit $a > 0$, alors $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq a\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

5 Fonctions génératrices

DÉFINITION : Soit X une VAD à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle fonction génératrice de X la fonction :

$$G_X : \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)t^k \end{cases}$$

PROPOSITION :

- $G_X(t) = E(t^X)$
- Si X et Y sont VAD $\mathbb{N}$ indépendantes, $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$

PROPOSITION : Pour X VAD $\mathbb{N}$, $(E(X) < +\infty) \Leftrightarrow (G_X \text{ dérivable en } 1)$.

si $E(X) < +\infty$ alors $E(X) = G'_X(1)$

si $E(X) = +\infty$ alors $G'_X(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1-]{} +\infty$

PROPOSITION : G_X est 2 fois dérivable en 1 ssi X admet un moment d'ordre 2. Dans ce cas,

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$$

6 Loix classiques

X	$P(X = k)$	$E(X)$	$V(X)$	$G_X(t)$
Bernoulli	$\begin{cases} \text{si } k = 1 \text{ alors } p \\ \text{si } k = 0 \text{ alors } (1 - p) \end{cases}$	p	$p(1 - p)$	$(1 - p) + pt$
Binomiale	$C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$	$((1 - p) + pt)^n$
Géométrique	$p(1 - p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pt}{1 - (1 - p)t}$
Poisson	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$

7 Combinatoire

Quelques raisonnements fréquents :

1. arrangements avec répétition
2. raisonnement boules-bâtons
3. combinaisons avec répétition : $\Gamma_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$