

INTÉGRATION

1 Rappels

PROPOSITION : (SOMMES DE RIEMANN) Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

PROPOSITION : (PREMIÈRE FORMULE DE LA MOYENNE) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_a^b g(t)dt$$

PROPOSITION : (DEUXIÈME FORMULE DE LA MOYENNE) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ positive décroissante de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a) \int_a^c g(t)dt$$

2 Intégrale généralisée

PROPOSITION : (INTÉGRATION PAR PARTIES) Soient $f, g \in \mathcal{C}^1([a, b[, \mathbb{C})$ si deux des expressions : $\int_a^b f'g$, $[fg]_a^b$, $\int_a^b fg'$ convergent, alors la troisième aussi et :

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

PROPOSITION : (CHANG. VARIABLE) Soit $f \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{C})$, Soient $\alpha < \beta$ et $\varphi : [\alpha, \beta[\rightarrow [a, b[$. Si φ est $\mathcal{C}^1$ et *strictement croissante* et *bijective* (donc $\varphi(\alpha) = a$). Alors :

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \varphi' \quad (\text{elles sont de même nature (DV, CV, ACV)})$$

THÉORÈME : (RÈGLE D'ABEL) Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant :

— f décroissante et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 0$

— Il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b[$, $\left| \int_a^x g(t)dt \right| \leq M$

Alors $\int_a^b f(t)g(t)dt$ CV.

Remarque : Ce théorème est hors programme : le redémontrer à partir de la deuxième formule de la moyenne (qu'il faut aussi savoir redémontrer).

3 Intégrabilité

PROPOSITION : (CRITÈRES D'INTÉGRABILITÉ) Soit $I = [a, b[$ et $f : I \rightarrow E$ une fonction continue par morceaux sur I . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est intégrable sur $[a, b[$
- $x \mapsto \int_a^x \|f(t)\| dt$ est bornée sur $[a, b[$
- $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x \|f(t)\| dt$ existe
- $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_x^b \|f(t)\| dt = 0$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in I$ tel que $\forall x, y \in [A, b[$ ($x < y$), $\int_x^y \|f(t)\| dt < \varepsilon$ (Critère de Cauchy)

Et si $\|f\| \leq \varphi$ sur I et si φ intégrable, alors f est intégrable. Et alors, $\|\int_I f\| \leq \int_I \varphi$

PROPOSITION : (INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ) Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ continues par morceaux de carré intégrable sur I , alors fg est intégrable sur I :

$$\left| \int_I \bar{f}g \right|^2 \leq \left(\int_I |f|^2 \right) \cdot \left(\int_I |g|^2 \right)$$

PROPOSITION : (INTÉGRALES DE BERTRAND) Soit α et β des nombres réels :

$$\left(t \mapsto \frac{1}{t^\alpha \log^\beta t} \text{ est intégrable sur } [a > 1, +\infty[\right) \Leftrightarrow ((\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1))$$

$$\left(t \mapsto \frac{1}{t^\alpha |\log|^\beta t} \text{ est intégrable sur }]0, b < 1[\right) \Leftrightarrow ((\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1))$$

PROPOSITION : (INTÉGRATION DES RELATIONS DE COMPARAISON)

	$f \underset{b^-}{=} o(g)$	$f \underset{b^-}{=} O(g)$	$f \underset{b^-}{\sim} g$
$\int_a^b g$ CV	f intégrable $\int_x^b f \underset{b^-}{=} o\left(\int_x^b g\right)$	f intégrable $\int_x^b f \underset{b^-}{=} O\left(\int_x^b g\right)$	$\int_a^x f \underset{b^-}{\sim} \int_a^x g$
$\int_a^b g$ DV	$\int_a^x f \underset{b^-}{=} o\left(\int_a^x g\right)$	$\int_a^x f \underset{b^-}{=} O\left(\int_a^x g\right)$	$\int_x^b f \underset{b^-}{\sim} \int_x^b g$

4 Fonction Gamma

DÉFINITION : La fonction gamma est une fonction classique définie par :

$$\Gamma :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

PROPOSITION :

- La fonction Γ est *convexe*, *logarithmiquement convexe* et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\log t)^n e^{-t} t^{x-1} dt$$

- $\forall x > 0 \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- Comme $\Gamma(1) = 1$ on déduit $\forall n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(n+1) = n!$
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

5 Intégrales dépendant d'un paramètre

THÉORÈME : (DE CONVERGENCE DOMINÉE) Soit (f_n) continues par morceaux telles que :

- $f_n \xrightarrow{+\infty} f$ et $f \in \mathcal{C}_m$
- Il existe $\varphi \in \mathcal{C}_m$ positive et intégrable sur I telle que $\forall n \|f_n\| \leq \varphi$ (Hypothèse de domination)

Alors les f_n et f sont intégrables sur I et on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f$

Remarque : La preuve est admise et est par ailleurs très difficile. Ce théorème s'exprime pareillement avec une limite finie à la place de $n \rightarrow +\infty$.

THÉORÈME : (CONTINUITÉ SOUS SIGNE INTÉGRAL) Soit X un espace métrique, $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et une application $f : X \times I \rightarrow E \quad (x, t) \mapsto f(x, t)$

- $\forall x \in X$, l'application $f(x, \cdot) : t \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}_m$ sur I
- $\forall t \in I$, l'application $f(\cdot, t) : x \mapsto f(x, t)$ est continue sur X
- $\exists \varphi \in \mathcal{C}_m$ positive et intégrable sur I telle que $\forall x \in X \|f(x, t)\| \leq \varphi(t)$ (Hyp. de domination)

Alors l'application $\Phi : A \rightarrow E \quad x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ est bien définie et est *continue* sur X .

THÉORÈME : (DÉRIVATION SOUS SIGNE INTÉGRAL) Soit $J, I = [a, b]$ intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \rightarrow E \quad (x, t) \mapsto f(x, t)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall x \in J$, l'application $f(x, \cdot) : t \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}_m$ et intégrable sur I
- f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ variant les hypothèses du **théorème de continuité sous signe intégral**.

Alors : $\Phi : J \rightarrow E \quad x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ est $\mathcal{C}^1$ sur J et $\forall x \in J, \quad \Phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Remarque : la continuité de $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est superflue pour avoir la dérivabilité de Φ .

COROLLAIRE : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Soit une application $f : I \times [a, b] \rightarrow E \quad (x, t) \mapsto f(x, t)$ continue sur $I \times [a, b]$. Alors :

$$\Phi : I \rightarrow E \quad x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt \quad \text{est continue sur } I$$

Si de plus f est dérivable par rapport à x et si $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times [a, b]$, alors Φ est $\mathcal{C}^1$ sur I et on a :

$$\Phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

THÉORÈME : (CV DOMINÉE POUR LES SÉRIES DE FONCTIONS) Soit (u_k) suite de fonctions $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{C})$ on suppose que $\sum u_k$ CVS vers une fonction $\mathcal{C}_m$.

$$\text{Si } \sum_{k=0}^{\infty} \int_I |u_k| \text{ CV alors } \sum_{k=0}^{\infty} u_k \text{ est intégrable et } \int_I \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_I u_k$$