

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1 Généralités

THÉORÈME : (CAUCHY-LIPSCHITZ) Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (où Ω est ouvert) une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors $\forall (t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un intervalle $I \in \nu_{\mathbb{R}}(t_0)$ et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ solution de $y' = F(t, y)$ telle que $\varphi(t_0) = x_0$. De plus, il y a unicité pour le problème de Cauchy de cette ED en (t_0, x_0) .

Remarque :

- l'existence de la solution au problème de Cauchy reste vraie si on suppose seulement F continue.
- Si F est $\mathcal{C}^1$, F est localement lipschitzienne en la seconde variable.

DÉFINITION : (SOLUTION MAXIMALE) Une fonction $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ (I intervalle) est dite *solution maximale* de l'ED $y^{(n)} = F(t, y, \dots, y^{(n-1)})$ si il n'existe pas d'autre solution $\psi : J \rightarrow E$ de cette ED telle que $I \subset J, I \neq J$ et $\psi = \varphi$ sur I où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

COROLLAIRE : Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (où Ω est ouvert) une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors $\forall (t_0, x_0) \in \Omega$ il existe une unique solution maximale φ de l'ED $y' = F(t, y)$ prenant la valeur x_0 en t_0 ; cette solution maximale est définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

2 Équations différentielles linéaires

Une équation différentielle sur $\mathbb{K}^n$ d'ordre p est du type :

$$(L) : Y^{(p)} = A_{p-1}(t)Y^{(p-1)} + \dots + A_0(t)Y + B(t)$$

où les A_i et B sont continues.

L'ED (L) d'ordre p peut s'écrire sous la forme d'une ED d'ordre 1 :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & I_n \\ A_0(t) & \dots & \dots & A_{p-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}$$

- Si $B = 0$ l'équation est dite *homogène*
- Si $n = 1$ l'équation est dite *scalaire*.
- Si $n \geq 2$ elle est désignée par *système différentiel linéaire*

THÉORÈME : Soit une équation différentielle linéaire

$$(L_1) : Y' = A(t)Y + B(t)$$

où $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ sont des fonctions continues. Alors pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $X_0 \in \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution V de (L_1) définie sur I tout entier, telle que $V(t_0) = X_0$.

Remarque : preuve admise

THÉORÈME : Soit $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une fonction continue. L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions maximales de l'équation homogène

$$(H) : \quad Y' = A(t)Y$$

est un sev de dimension n du $\mathbb{K}$ -ev $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$.

Remarque :

- On déduit que l'espace des solutions de (L_1) est un espace affine de dimension n
- L'espace des solutions d'une ED homogène sur $\mathbb{K}^n$ d'ordre p est de dimension np

3 Wronskien

Les matrices sont écrites dans une base B posée au préalable.

DÉFINITION : Soient $V_1, \dots, V_n$ n solutions de (H) , on appelle *Wronskien* de $V_1, \dots, V_n$ l'application

$$W_B : t \mapsto \det(V_1(t), \dots, V_n(t))$$

En appliquant la transformation de (H_p) en (H_1) d'ordre 1, on appelle wronskien de p solutions $v_1, \dots, v_p$ de (H_p) le wronskien de l'ED (H_1) des solutions de (H_1) :

$$\begin{pmatrix} v_i \\ \vdots \\ v_i^{(p-1)} \end{pmatrix} (1 \leq i \leq p) \quad W_B(v_1, \dots, v_p)(t) = \begin{vmatrix} v_1(t) & v_2(t) & \dots & v_p(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1^{(p-1)}(t) & v_2^{(p-1)}(t) & \dots & v_p^{(p-1)}(t) \end{vmatrix}$$

PROPOSITION : W_B est de classe $\mathcal{C}^1$ et $W'_B(x) = \text{Tr}(a(x))W_B(x)$

COROLLAIRE : Le Wronskien $W_B = 0$ ou ne s'annule jamais.

PROPOSITION : Soient $V_1, \dots, V_n$ n solutions de (H) . Le rang des vecteurs $V_1(t), \dots, V_n(t)$ est indépendant de $t \in I$

COROLLAIRE : Des solutions $V_1, \dots, V_n$ de (H) forment une base des solutions de (H) ssi il existe $t_0 \in I$ tel que $W_B(V_1, \dots, V_n)(t_0) \neq 0$, et dans ce cas on a $\forall t \in I \quad W_B(V_1, \dots, V_n)(t) \neq 0$

4 Méthodes usuelles

1. variation de la constante (une ou plusieurs)
2. abaissement de l'ordre
3. se ramener à un système d'ordre 1
4. changement de variable