

CALCUL DIFFÉRENTIEL

1 Différentielles

DÉFINITION : (DIFFÉRENTIELLE) Soit E et F deux $\mathbb{R}$ -evn, U un ouvert de E et $a \in U$. Une application $f : U \rightarrow F$ est dite *différentiable en a* si il existe $\varphi \in \mathcal{L}_c(E, F)$ telle que :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|)$$

Si une telle application existe, elle est unique et est notée df_a et s'appelle différentielle de f en a . Si df est continue, f est dite $\mathcal{C}^1$.

DÉFINITION : (GRADIENT) Soit E un espace euclidien et $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable en $a \in U$. Alors $df_a \in (E, \mathbb{R}) = E^*$, et il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que $df_a(h) = v \cdot h$ pour tout $h \in E$. Ce vecteur est le *gradient* de f en a et est noté : $\nabla f(a)$ ou $\text{grad}_a f$
Remarque : Le gradient dépend de la structure euclidienne choisie.

PROPOSITION : Le gradient en a est normal à l'isosurface en a . $\nabla f(a)$ est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

PROPOSITION : En base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$, pour f différentiable en $a \in U$, les dérivées partielles de f en a existent et :

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$$

2 Propriétés

PROPOSITION : Soient f et g deux applications différentiables, sous réserve de bonnes hypothèses,

- $d(f+g)_a = df_a + dg_a$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad d(\lambda f)_a = \lambda df_a$
- $d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$

Remarque : Dans le cas où g est une fonction à valeurs réelles, la dernière formule se réécrit : $(g \circ f)'(a) = dg_{f(a)}(f'(a))$.

PROPOSITION : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, F, G, H trois evn de dimension finie, et $\mathcal{B} : F \times G \rightarrow H$ une application bilinéaire. Soit $f : U \rightarrow F$ et $g : U \rightarrow G$ différentiables en $a \in U$, alors $\mathcal{B}(f, g)$ l'est aussi, et :

$$d(\mathcal{B}(f, g))_a(h) = \mathcal{B}(df_a(h), g(a)) + \mathcal{B}(f(a), dg_a(h))$$

PROPOSITION : Une fonction différentiable en un point est continue en ce point.

PROPOSITION : Soit $f : V \rightarrow E_1 \times E_2$ une application, où V est le voisinage d'un point a de H et H, E_1, E_2 sont des evn. f est différentiable ssi ses composantes f_1, f_2 le sont.

3 Dérivées partielles

PROPOSITION : Si f est différentiable en un point a , alors f admet une dérivée selon tout vecteur en a et on a $f'_v(a) = df_a(v)$ pour tout $v \in E$.

DÉFINITION : Soit $f : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow E$ où E est un evn. On appelle *dérivée partielle* d'indice i au point a la dérivée (si elle existe) de $\varphi_i : x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ au point a_i . Cette dérivée est notée : $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $f'_{x_i}(a)$, $D_i f(a)$.

THÉORÈME : Pour qu'une fonction f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$ soit différentiable au point a , **il faut** que les n dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existent en ce point. Si f est différentiable, sa différentielle est :

$$df_a : (u_1, \dots, u_n) \mapsto \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

THÉORÈME : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F$ une application, où U est ouvert et F un evn. Si toutes les dérivées partielles de f sur U existent et si elles sont continues en un point a de U , alors f est différentiable en a et on a :

$$df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$$

Remarque : dx_i est la base duale dans $(\mathbb{R}^n)^*$ de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

THÉORÈME : (SCHWARZ) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ où U est ouvert, de classe $\mathcal{C}^2$,

$$\forall i, j \in \mathbb{N}_n^*, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Remarque : ce théorème se généralise aisément au cas de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

4 Matrice jacobienne

DÉFINITION : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ où U est ouvert, différentiable en $a \in U$, en notant $(e_1, \dots, e_n), (e'_1, \dots, e'_m)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. En écrivant $f = \sum_{i=1}^m f_i e'_i$, la matrice de df_a dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ est :

$$J_a = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right]_{ij} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

C'est la *matrice jacobienne* de f en a . Lorsque $m = n$, son déterminant est le *jacobien* de f en a .

Remarque : On retrouve la différentielle d'une composée : $J(g \circ f)_x = Jg_{f(x)} \times Jf_x$. On a de plus, naturellement le résultat : $df_a(h) = J_a f \times H$

PROPOSITION : (RÈGLE DE LA CHAÎNE) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F$: evn. Où U et V sont ouverts, $f(U) \subset V$, $f = (f_1, \dots, f_n)$. Soit $a \in U$ tel que f différentiable en a et g différentiable en $f(a)$; Alors $g \circ f$ est différentiable en a et :

$$\forall k \in \mathbb{N}_m^*, \quad \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_k}(a) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(a))$$

5 Formules de Taylor

Notation de la puissance symbolique n -ième :

$$\left[\sum_{i=1}^q h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right]^{[n]} = \sum_{i_1 + \dots + i_q = n} \frac{n!}{i_1! \dots i_q!} h_1^{i_1} \dots h_q^{i_q} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_q^{i_q}}(a)$$

THÉORÈME : (INÉGALITÉ TAYLOR-LAGRANGE) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ où U est ouvert, une application de classe $\mathcal{C}^p$ sur U . Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que le segment $[x, x+h] \subset U$. Alors, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x+h) = f(x) + \left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right] + \frac{1}{2!} \left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right]^{[2]} + \dots + \frac{1}{p!} \left[\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta h) \right]^{[p]}$$

THÉORÈME : (ÉGALITÉ TAYLOR-LAPLACE) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ où U est ouvert, une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur U . Soit $x \in \mathbb{R}^q$ et $h = (h_1, \dots, h_q) \in \mathbb{R}^q$ tels que $[x, x+h] \subset U$. Alors,

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \left[\sum_{i=1}^q h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right] + \frac{1}{2!} \left[\sum_{i=1}^q h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right]^{[2]} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{(k-1)!} \left[\sum_{i=1}^q h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right]^{[k-1]} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \left[\sum_{i=1}^q h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th) \right]^{[k]} dt \end{aligned}$$

THÉORÈME : (ÉGALITÉ TAYLOR-YOUNG) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ où U est ouvert, une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur U . Soit $x \in \mathbb{R}^q$ et $h = (h_1, \dots, h_q) \in \mathbb{R}^q$ tels que $[x, x+h] \subset U$. Alors,

$$f(x+h) = f(x) + \left[\sum_{i=1}^q h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right] + \frac{1}{2!} \left[\sum_{i=1}^q h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right]^{[2]} + \dots + \frac{1}{k!} \left[\sum_{i=1}^q h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right]^{[k]} + o(\|h\|^k)$$

6 Extremas

DÉFINITION : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ où U est ouvert, f de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $a \in U$, on dit que a est un point critique de f si $df_a = 0$.

Remarque : Le gradient est donc nul en un point critique.

PROPOSITION : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ où U est ouvert, soit $a \in U$, si f est différentiable en a . Si a est un extremum local de f , alors $df_a = 0$.

Remarque : si f est $\mathcal{C}^1$, les extrema locaux sont tous des points critiques

PROPOSITION : (INÉG. ACCROISSEMENTS FINIS) Soit U un ouvert d'un evn E , et $f : U \rightarrow F$ où F est un evn. Telle que pour tout $x \in U$, $\|df(a)\| \leq k$ (où $k = \text{Cte}$). Alors, pour tout $x, y \in U$ tels que $[x, y] \subset U$,

$$\|f(y) - f(x)\| \leq k\|y - x\|$$

PROPOSITION : Pour qu'une fonction f définie et différentiable sur un *ouvert connexe* D de E soit constante, **il faut et il suffit** que $df = 0$.

PROPOSITION : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $df_a = 0$ pour $a \in U$, posons :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$$

- si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, f admet un *minimum* relatif en a
- si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, f admet un *maximum* relatif en a
- si $rt - s^2 < 0$, f n'a pas d'extremum en a
- si $rt - s^2 = 0$ et $r > 0$, on ne peut pas conclure