Modèles de Whittaker des représentations admissibles des groupes réductifs p-adiques quasi-déployés

François Rodier
U.E.R. de Mathématiques, Université Paris VII, 2, Place Jussieu, 75251
Paris Cedex 05

Les modèles de Whittaker ont été utilisés par H. Jacquet et R.P. Langlands pour étudier les formes automorphes sur GL(2) [10] . Ils fournissent un unique modèle pour chaque représentation admissible de dimension infinie de GL(2,K) où K est un corps p-adique.

Une généralisation naturelle pour un groupe réductif G quelconque consiste à étudier la représentation de G induite par un caractère "principal" d'un sous-groupe unipotent maximal. Cette situation a été étudiée, dans le cas du groupe SL(n) sur un corps *fini*, par I.M. Gelfand et M.I. Graev [6] , et pour les groupes algébriques sur un corps fini, par R. Steinberg [12] . On obtient alors que les composants irréductibles de cette représentation sont de multiplicité égale à 1, et donc qu'une représentation irréductible admet au plus un modèle de Whittaker. Dans le cas des groupes p-adiques, I.M. Gelfand et D.A. Kajdan ont démontré, sous certaines conditions, remplies par le groupe GL(n), l'unicité du modèle de Whittaker d'une représentation admissible irréductible [7] . Ce résultat a été étendu aux représentations unitaires des groupes de Chevalley réels, complexes et p-adiques par J.A. Shalika [18] .

On s'intéresse ici au cas des représentations admissibles d'un groupe algébrique réductif quasi-déployé sur un corps p-adique. On rappelle un résultat de I.M. Gelfand et D.A. Kajdan (Proposition 11). On montre ensuite une propriété d'"hérédité" des modèles de Whittaker (Théorème 4) montrant qu'en induisant à G une représentation admissible d'un sous-groupe parabolique, on conserve le modèle de Whittaker. Cela permet d'étendre le résultat de I.M. Gelfand et D.A. Kajdan à toutes les représentations admissibles irréductibles. Il permet également de montrer l'existence du modèle de Whittaker pour les représentations irréductibles induites par une représentation admissible d'un sous-groupe parabolique et admettant elle-même un modèle de Whittaker (Théorème 6).

La démonstration de la proposition 11 est essentiellement inspirée de la démonstration du théorème analogue dans le cas des corps finis donnée par R. Steinberg ([12] , Théorème 45). La technique utilisée ici est celle déja développée par F. Bruhat ([4] et [5]) permettant de calculer les formes d'entrelacement de deux représentations induites à l'aide des distributions sur le groupe. La même technique est utilisée dans la démonstration du théorème 4.

L'organisation de cet article est la suivante. Dans le premier chapitre, on étudie les relations entre les représentations d'un groupe et les distributions sur celui-là. Dans le chapitre 2 on énonce le théorème d'unicité qui sera démontré dans les chapitres suivants. Dans le chapitre 3, on étend aux groupes quasi-déployés un résultat de I.M. Gelfand et D.A. Kajdan. Cela permet alors de démontrer le théorème 2 dans le cas des représentations paraboliques (chapitre 4). Le théorème d'"hérédité" du chapitre 5 pour les représentations induites permet alors de démontrer le théorème 2 dans le cas général. Le chapitre 6 présente une nouvelle formulation du théorème 2 en termes de modèle de Whittaker, ainsi que quelques résultats d'existence.

Les résultats de ce travail ont été annoncés au Congrès de Williamstown (1972) [17] dans le cas des groupes déployés.

Enfin ce travail doit beaucoup à R. Godement, qui m'en a inspiré la plupart des idées, et à P. Deligne, dont les indications m'ont aidé à améliorer la rédaction originale.

I. Représentations induites et distributions

I. 1-Représentations

Dans toute la suite, G désigne un groupe localement compact et totalement discontinu (l.c.t.d.). On note dg une mesure de Haar à droite sur G, et $\underline{\delta}_G$ le module de G: c'est un homomorphisme continu de G dans $\mathbb{R}^+$, tel que $\underline{\delta}_G(g)dg$ soit une mesure de Haar à gauche sur G.

Une <u>représentation</u> $\underline{\pi}$ de G dans l'espace vectoriel complexe E est un homomorphisme de G dans le groupe linéaire de E. Nous sommes principalement intéressés par les représentations qui vérifient la propriété suivante: le stabilisateur de tout élément de E est un sous groupe ouvert de G. Une telle représentation sera dite <u>algébrique</u>. Elle sera dite <u>admissible</u> si, de plus, elle vérifie la propriété: pour tout sous groupe ouvert G_1 de G, le sous espace de E formé des éléments stables par G_1 est de dimension finie.

I. 2- Exemple de représentations: les représentations induites

Soit H un sous groupe fermé de G et soit π une représentation algébrique de H dans l'espace vectoriel E. On considère l'espace $\underline{\underline{S}}(G;E;\pi)$ des fonctions f sur G à valeurs dans E vérifiant:

(i) $f(hg) = \delta_H(h)^{-\frac{1}{2}}\pi(h)(f(g))$ si $h \in H$ et $g \in G$.

(ii) f est localement constante sur G et à support compact modulo H.

Alors G opère par translations à droite dans cet espace vectoriel et cette opération définit une représentation algébrique de G, que l'on appellera <u>représentation induite par π</u> et que l'on notera $\mathrm{Ind}_H^G \pi$.

Une représentation induite apparaît comme quotient de la représentation régulière droite de G. Soit $\underline{\underline{S}}(G;E)$ l'espace des fonctions sur G à valeurs dans E, localement constantes et à support compact et soit p l'application $\underline{\underline{S}}(G;E) \to \underline{\underline{S}}(G;E;\pi)$ définie par

$$p(f)(g) = \int_H \delta_H(h)^{\frac{1}{2}}\pi(h)^{-1}f(hg)dh$$ où $g \in G$ et dh est une mesure de Haar à droite sur H.

<u>Proposition 1.- L'application p est un homomorphisme de $\underline{\underline{S}}(G;E)$ sur $\underline{\underline{S}}(G;E;\pi)$ commutant avec l'action de G par translations à droite.</u>

<u>Démonstration</u>.- Il est clair que $p(f) \in \underline{\underline{S}}(G;E;\pi)$ et que p commute avec les translations de G à droite. Si $f \in \underline{\underline{S}}(G;E;\pi)$, soit G_1 un compact ouvert de G tel que le support de f soit contenu dans HG_1 . Alors f est l'image par p de la fonction sur G définie par:

$$g \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } g \notin G_1 \\ f(g)\left(\int_{H \cap G_1 g^{-1}} dh\right)^{-1} & \text{si } g \in G_1 \end{cases}$$

I. 3- Représentation contragrédiente

Si π est une représentation algébrique de G dans l'espace E, on définit une représentation π^* de G dans le dual E^* de E par:

$$\langle \pi(g)x, x^* \rangle = \langle x, \pi^*(g^{-1})x^* \rangle \quad \text{si } x \in E,\ x^* \in E^*, \text{ et } g \in G.$$

Le sous espace $\check{E}$ des éléments de E^* invariants par un sous groupe ouvert de G est invariant par π^*. On note $\check{\pi}$ la représentation algébrique de G dans $\check{E}$ ainsi obtenue, qui est dite représentation contragrédiente de π.

Du fait que le groupe G admet des petits sous groupes ([11], théorème p. 159), on peut appliquer les raisonnements de ([10], §2) pour montrer que, si π est admissible, il en est de même de $\check{\pi}$, et de plus, l'injection canonique de E dans $\check{\check{E}}$ est un isomorphisme.

I. 4- Opérateurs d'entrelacement

Si π_1 et π_2 sont des représentations de G dans les espaces E_1 et E_2 respectivement, un opérateur d'entrelacement de π_1 dans π_2 est une application linéaire f de E_1 dans E_2 telle que:

$$f \circ \pi_1(g) = \pi_2(g) \circ f \quad \text{pour tout élément } g \text{ de } G.$$

L'espace des opérateurs d'entrelacement de π_1 dans π_2 est noté $\mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_2)$. Le lemme de Schur est valable pour les représentations admissibles [10]: si π est une représentation admissible irréductible dans un espace E non nul, alors la dimension de $\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi)$ est égale à 1.

I. 5- Formes d'entrelacement

La notion de forme d'entrelacement, que nos utiliserons plutôt que celle d'opérateur d'entrelacement, permet de comparer deux représentations de manière symétrique.

Définition.- Soit π_1 et π_2 deux représentations de G dans E_1 et E_2 respectivement. On appelle forme d'entrelacement de π_1 et π_2 toute forme bilinéaire I sur $E_1 \times E_2$ stable par l'action de G, c'est à dire telle que:

$$I(x_1, x_2) = I(\pi_1(g)x_1, \pi_2(g)x_2) \quad \text{si } x_i \in E_i \text{ et } g \in G.$$

La proposition suivante permet de relier les opérateurs d'entrelacement et les formes d'entrelacement.

Proposition 2.- Soit π_1 et π_2 des représentations algébriques de G dans les espaces E_1 et E_2 respectivement.

(i) Si $a \in \mathrm{Hom}_G(\pi_1, \check{\pi}_2)$, la forme bilinéaire I_a suivante est une forme d'entrelacement de π_1 et π_2 :

$$I_a(x_1, x_2) = \langle x_2, a(x_1)\rangle \text{ si } x_i \in E_i .$$

(ii) L'application $a \to I_a$ est un isomorphisme de $\mathrm{Hom}_G(\pi_1, \check{\pi}_2)$ sur l'espace des formes d'entrelacement de π_1 et π_2.

(iii) Si π_2 est admissible, alors a est un isomorphisme si et seulement si la forme bilinéaire I_a est non dégénérée.

Démonstration.-

(i) est clair.

(ii) Il est clair que si $I_a = 0$, alors $a = 0$, donc il reste à voir pour démontrer (ii) que tout forme d'entrelacement I de π_1 et π_2 est de la forme I_a. Si I est une forme d'entrelacement de π_1 et π_2 et si $x_1 \in E_1$, l'application:

$$x_2 \to I(x_1, x_2) \quad \text{où } x_2 \in E_2$$

est un élément de $\check{E}_2$. Notons le $a(x_1)$. On a donc: $I(x_1, x_2) = \langle x_2, a(x_1)\rangle$. Comme I est invariante par G, on a:

$$\langle x_2, a(\pi_1(g)x_1)\rangle = \langle \pi_2(g^{-1})x_2, a(x_1)\rangle = \langle x_2, \check{\pi}_2(g)a(x_1)\rangle$$

Par conséquent $a \in \mathrm{Hom}_G(\pi_1, \check{\pi}_2)$ et $I = I_a$.

(iii) Il est clair que a est injectif si et seulement si:

$$(\text{Pour tout } x_2 \in E_2, \ I_a(x_1, x_2) = 0) \Rightarrow x_1 = 0.$$

Il reste donc à montrer que pour que a soit surjectif, il faut et il suffit que:

$$(\text{Pour tout } x_1 \in E_1, \ I_a(x_1, x_2) = 0) \Rightarrow x_2 = 0,$$

c'est à dirè que:

(I.4.1.) $$(\text{Pour tout } x_1 \in E_1, \langle x_2, a(x_1)\rangle = 0) \Rightarrow x_2 = 0.$$

Si a est surjectif, $a(x_1)$ décrit tout l'espace $\check{E}_2$. Mais si x_2 est annulé par tout élément de $\check{E}_2$, il est nul, d'où la nécessité de (I.4.1). Inversement, si la relation (I. 4.1) est vérifiée, elle exprime, puisque E_2 s'identifie à $\check{\check{E}}_2$, que tout élément de $\check{\check{E}}_2$ qui s'annule sur l'image Im(a) de a dans $\check{E}_2$ est nul. Comme Im(a) est invariant par $\check{\pi}_2$, on en déduit une représentation naturelle de G dans $\check{E}_2/\mathrm{Im}(a)$ qui est algébrique. Si $\check{E}_2/\mathrm{Im}(a) \neq 0$, il existe une forme linéaire non nulle sur cet espace, et on peut la choisir invariante par un sous groupe ouvert de G. Elle se remonte en un élément non nul de $\check{\check{E}}_2$ qui s'annule sur Im(a), d'où une contradiction, donc a est surjectif.

I. 6- Distributions sur un espace totalement discontinu

Définition.- Soit X un espace topologique l.c.t.d. et E un espace vectoriel complexe. On note $\underline{\underline{S}}(X;E)$ l'espace des fonctions sur X à valeurs dans E localement constantes à support compact. On appelle E-distribution sur X (ou, par abus de language, quand il n'y a pas d'ambiguïté, distribution) une forme linéaire sur l'espace $\underline{\underline{S}}(X;E)$. On note $\underline{\underline{S}}'(X;E)$ l'espace des E-distributions sur X. Si $E = \mathbb{C}$, on note: $\underline{\underline{S}}(X;\mathbb{C}) = \underline{\underline{S}}(X)$ et $\underline{\underline{S}}'(X;\mathbb{C}) = \underline{\underline{S}}'(X)$ et on appelle distribution une $\mathbb{C}$-distribution sur X. Si T est une E-distribution sur X et f un élément de $\underline{\underline{S}}(X;E)$, on note ainsi la valeur de T en f:

$$\int_X f(x)dT(x) .$$

Il est clair qu'une mesure sur X définit une distribution sur X. Si $x \in X$, on notera $\varepsilon(x)$ la mesure de Dirac en x. On définit de manière évidente la restriction d'une E-distribution à un ouvert de X et le support d'une E-distribution.

Produit tensoriel.- Si X_1 et X_2 sont deux espaces topologiques l.c.t.d. et E_1 et E_2 deux espaces vectoriels, l'application de $\underline{\underline{S}}(X_1 ; E_1)\otimes \underline{\underline{S}}(X_2 ; E_2)$ dans $\underline{\underline{S}}(X_1 x X_2 ; E_1\otimes E_2)$ définie sur les éléments décomposés par:

$$f_1\otimes f_2(x_1 , x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2) \quad \text{où } f_i\in \underline{\underline{S}}(X_i ; E_i) \text{ et } x_i\in X_i$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On définit le produit tensoriel $T_1\otimes T_2$ de deux distributions $T_i\in \underline{\underline{S}}'(X_i ; E_i)$ en transposant l'application inverse:

$$\int_{X_1 x X_2} f_1\otimes f_2(x_1 , x_2)d(T_1\otimes T_2)(x_1 , x_2) = \left(\int_{X_1} f_1(x)dT_1(x)\right)\left(\int_{X_2} f_2(x)dT_2(x)\right) .$$

On vérifie facilement la théorème de Fubini:

$$\int_{X_1 x X_2} f(x_1 , x_2)d(T_1\otimes T_2)(x_1 , x_2) = \int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x_1 , x_2)dT_2(x_2)\right)dT_1(x_1)$$

si $f\in \underline{\underline{S}}(X_1 x X_2 ; E_1\otimes E_2)$ et $T_i\in \underline{\underline{S}}'(X_i ; E_i)$.

Produit de convolution.- Soit G un groupe l.c.t.d. et E_1 et E_2 deux espaces vectoriels. Si $T_i\in \underline{\underline{S}}'(G;E_i)$, le produit de convolution de T_1 et T_2 est une $E_1\otimes E_2$ -distribution $T_1 * T_2$ sur G définie par:

$$\int_G f(g)d(T_1 * T_2)(g) = \int_{GxG} f(g_1 g_2)d(T_1\otimes T_2)(g_1 , g_2) \quad \text{où } f\in \underline{\underline{S}}(G;E_1\otimes E_2),$$

pourvu que cette formule ait un sens, c'est à dire que l'ensemble

$$\left\{(g_1 , g_2) \mid g_1 g_2\in \operatorname{Supp} f\right\}\cap (\operatorname{Supp} T_1 \times \operatorname{Supp} T_2)$$

soit compact.

Opérations sur les distributions.- Si A est un endomorphisme de l'espace vectoriel E, A opère sur $\underline{\underline{S}}(X;E)$ par:

$$[A] : f \to A_\circ f \quad \text{où } f \in \underline{\underline{S}}(X;E).$$

On peut faire opérer A sur $\underline{\underline{S}}'(X;E)$ en transposant l'application précédente. On note $T_\circ[A]$ l'image de la distribution T:

$$\int_X A_\circ f(x)dT(x) = \int_X f(x)dT_\circ[A](x) \quad \text{où } f \in \underline{\underline{S}}(X;E).$$

Distributions sur un groupe.- Soit G un groupe l.c.t.d., H un sous groupe fermé de G et π une représentation de H dans l'espace E. On note p l'application de $\underline{\underline{S}}(G;E)$ dans $\underline{\underline{S}}(G;E;\pi)$ définie en (I. 2) et δ le module de H.

Proposition 3.- *Soit T une E-distribution sur G telle que*

(I.6.1) $$\varepsilon(h) * T = \delta(h)^{\frac{1}{2}} T_\circ[\pi(h)] \quad \text{pour tout } h \in H.$$

Soit $f \in \underline{\underline{S}}(G;E)$ et supposons $p(f) = 0$. Alors on a:

$$\int_G f(g)\, dT(g) = 0.$$

Démonstration.- Soit $\underline{\underline{S}}(G;\mathbb{C};\delta^{\frac{1}{2}})$ l'espace de la représentation de G induite par le caractère $\delta^{\frac{1}{2}}$ de H et soit p' l'application de $\underline{\underline{S}}(G)$ dans $\underline{\underline{S}}(G;\mathbb{C};\delta^{\frac{1}{2}})$ définie en (I. 2). Si $\varphi \in \underline{\underline{S}}(G)$:

$$p'(\varphi) : g \to \int_H \varphi(hg)dh \quad \text{où dh est une mesure de Haar à droite.}$$

C'est une application surjective d'après la proposition 1. On a alors:

$$\begin{aligned}
\int_G p(f)(g)\varphi(g)dT(g) &= \int_G \int_H \varphi(g)\delta(h)^{\frac{1}{2}}\pi(h)^{-1}f(hg)dT(g)dh \\
&= \int_H \delta(h)dh \int_G \varphi(g)f(hg)\delta(h)^{-\frac{1}{2}}dT_\circ[\pi(h)^{-1}] \\
&= \int_H \delta(h)dh \int_G \varphi(h^{-1}g)f(g)dT(g) \quad \text{d'après (I.6.1)} \\
&= \int_G p'(\varphi)(g)f(g)dT(g)\ .
\end{aligned}$$

Comme p' est surjective et que $\underline{\underline{S}}(G;\mathbb{C};\delta^{\frac{1}{2}})$ est formé des fonctions invariantes à gauche par H, et à support compact modulo H, on peut choisir φ telle que $p'(\varphi)$ soit la fonction caractéristique de H.Supp f. On a alors, si $p(f) = 0$:

$$\begin{aligned}
\int_G f(g)dT(g) &= \int_G p'(\varphi)(g)f(g)dT(g) \\
&= \int_G p(f)(g)\varphi(g)dT(g) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Si on prend en particulier H = G, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 1.- Soit T une E-distribution sur G vérifiant:

(I.6.2) $$\underline{\varepsilon}(g) * T = T_o[\pi(g)] \quad \text{pour tout } g \in G.$$

Alors il existe une unique forme linéaire a sur E telle que:

(I.6.3) $\int_G f(g)dT(g) = \langle \int_G \pi(g)^{-1} f(g)d_1g,\ a \rangle$ si $f \in \underline{\underline{S}}(G;E)$, où d_1g est une mesure de Haar à gauche sur G.

Démonstration.- Soit π_1 la représentation de G dans E telle que

$$\pi_1(g) = \delta_G^{-\frac{1}{2}}(g)\pi(g) \quad \text{si } g \in G$$

Alors T vérifie: $\underline{\varepsilon}(g) * T = \delta_G^{\frac{1}{2}}(g)T_o[\pi_1(g)]$. D'après la proposition, T annule donc le noyau de l'homomorphisme p_1 de $\underline{\underline{S}}(G;E)$ dans $\underline{\underline{S}}(G;E;\pi_1)$ construit en (I.2). La forme linéaire T sur $\underline{\underline{S}}(G;E)$ se factorise donc par $\underline{\underline{S}}(G;E;\pi_1)$. Comme l'application $f \to f(e)$, où e est l'élément unité de G, est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\underline{\underline{S}}(G;E;\pi_1)$ sur E, il existe donc une forme linéaire a unique sur E telle que:

$$\int_G f(g)dT(g) = \langle p_1(f)(e),\ a\rangle \quad \text{pour tout } f \in \underline{\underline{S}}(G;E).$$

Et on a: $$p_1(f)(e) = \int_G \delta_G(g)^{\frac{1}{2}}\pi_1(g^{-1})f(g)dg \quad (\text{par définition de } p_1)$$
$$= \int_G \pi(g^{-1})f(g)\delta_G(g)dg$$
$$= \int_G \pi(g^{-1})f(g)d_1g \quad \text{où } d_1g \text{ est une mesure de Haar à gauche.}$$

Réciproquement, il est clair que la relation (I.6.3) définit bien une E-distribution sur G vérifiant (I.6.2).

En passant de G au groupe opposé, on obtient:

Corollaire 2.- Soit T une E-distribution sur G vérifiant:

$$T * \underline{\varepsilon}(g^{-1}) = T_o[\pi(g)] \quad \text{pour tout } g \in G.$$

Alors, il existe une unique forme linéaire a sur E telle que:

$\int_G f(g)dT(g) = \langle \int_G \pi(g)f(g)dg,\ a\rangle$ si $f \in \underline{\underline{S}}(G;E)$ et où dg est une mesure de Haar à droite sur G.

On peut en particulier appliquer le corollaire précédent en considérant, si X est un espace l.c.t.d., la représentation $\tilde{\pi}$ de G dans $\underline{\underline{S}}(X;E)$ définie par:

$$\tilde{\pi}(g).f = \pi(g)_o f \quad \text{si } f \in \underline{\underline{S}}(X;E)$$

En remarquant que $\underline{\underline{S}}(G;\underline{\underline{S}}(X;E))$ est isomorphe à $\underline{\underline{S}}(G) \otimes \underline{\underline{S}}(X) \otimes E$, donc à $\underline{\underline{S}}(G \times X;E)$, on obtient:

Corollaire 3.- Soit T une E-distribution sur $G\times X$ vérifiant:

$$\int_{G\times X} f(g,x)\,dT(g,x) = \int_{G\times X} \pi(g_1)f(gg_1, x)\,dT(g,x) \quad \text{pour tout } g\in G \text{ et } f\in \underline{\underline{S}}(G\times X;E)$$

Alors il existe une E-distribution $\tilde{T}$ unique sur X telle que:

$$\int_{G\times X} f(g,x)\,dT(g,x) = \int_{G\times X} \pi(g)f(g,x)\,dg\otimes d\tilde{T}(x) \quad \text{pour tout } f\in \underline{\underline{S}}(G\times X;E)$$

Cas d'un groupe G opérant proprement et librement sur un espace l.c.t.d. X.

Si E est un espace vectoriel, on définit l'application $f \to f^\flat$ de $\underline{\underline{S}}(X;E)$ dans $\underline{\underline{S}}(X/G;E)$ par:

$$f^\flat(\dot{x}) = \int_G f(g.x)\,dg \quad \text{si } \dot{x} \text{ est l'image de } x\in X \text{ dans } X/G.$$

On montre comme dans la proposition 1 que c'est une application surjective. Par transposition, on obtient une application injective de $\underline{\underline{S}}'(X/G;E)$ dans $\underline{\underline{S}}'(X;E)$, notée $T \to T^\#$.

Proposition 4.- Soit $R\in \underline{\underline{S}}'(X;E)$. Pour que R soit de la forme $T^\#$, il faut et il suffit que:

$$\text{(I.6.4)} \quad \int_X f(g.x)\,dR(x) = \int_X \delta_G(g^{-1})f(x)\,dR(x) \quad \text{pour tout } g\in G \text{ et tout } f\in \underline{\underline{S}}(X;E).$$

Démonstration.- Pour que la forme linéaire R sur $\underline{\underline{S}}(X;E)$ soit de la forme $T^\#$, il faut et il suffit que R se factorise par $\underline{\underline{S}}(X/G;E)$, c'est à dire que:

$$f^\flat = \underline{0} \Rightarrow \int_G f(x)\,dR(x) = \underline{0} \quad \text{pour tout } f\in \underline{\underline{S}}(X;E).$$

Si $f\in \underline{\underline{S}}(X;E)$ et $\varphi\in \underline{\underline{S}}(X)$, et si R vérifie (I.6.4), on a:

$$\begin{aligned}\int_X f(x)\varphi^\flat(x)\,dR(x) &= \int_X\int_G f(x)\varphi(g.x)\,dR(x)\,dg\\ &= \int_X\int_G \delta_G(g)f(g^{-1}.x)\varphi(x)\,dR(x)\,dg\\ &= \int_X f^\flat(x)\varphi(x)\,dR(x)\end{aligned}$$

On peut prendre φ telle que $\varphi^\flat$ soit la fonction caractéristique de l'image du support de f dans X/G. On a alors:

$$\begin{aligned}\int_X f(x)\,dR(x) &= \int_X f(x)\varphi^\flat(x)\,dR(x)\\ &= \int_X f^\flat(x)\varphi(x)\,dR(x)\\ &= \underline{0} \quad \text{si} \quad f^\flat = \underline{0}.\end{aligned}$$

Inversement, il est clair que $T^\#$ vérifie (I.6.4).

I. 7- Formes d'entrelacement et distributions

Nous supposerons dans tout le paragraphe (I.7) que G est unimodulaire.

On peut déterminer les formes d'entrelacement de deux représentations induites à l'aide des distributions sur G. L'indice i prenant les valeurs 1 et 2, on se donne deux sous groupes fermés H_i de G, de module $\underline{\delta}_i$ et $\underline{\pi}_i$ deux représentations algébriques de H_i dans les espaces vectoriels E_i . On note $\underline{\lambda}_i$ la représentation induite $\mathrm{Ind}_{H_i}^{G}\,\underline{\pi}_i$ dans l'espace $V_i = \underline{\underline{S}}(G;E_i\,;\underline{\pi}_i)$ et p_i l'application de $\underline{\underline{S}}(G;E_i)$ dans V_i définie en (I.2).

Théorème 1.- Si le groupe G est unimodulaire, l'espace des formes d'entrelacement I de $\underline{\lambda}_1$ et $\underline{\lambda}_2$ est isomorphe à l'espace des $E_1\otimes E_2$-distributions T sur G vérifiant:

(I.7.1) $$\underline{\varepsilon}(h_1) * T * \underline{\varepsilon}(h_2^{-1}) = (\underline{\delta}_1(\underline{h}_1)\,\underline{\delta}_2(\underline{h}_2))^{\frac{1}{2}}\,\underline{T}_a[\underline{\pi}_1(\underline{h}_1)\otimes \underline{\pi}_2(\underline{h}_2)] \quad \text{pour } \underline{h}_i \in \underline{H}_i\ .$$

La correspondance entre I et T est définie par:

(I.7.2) $$I(p_1(f_1),\ p_2(f_2)) = \int_G dg_2 \int_G f_1(g_1 g_2)\otimes f_2(g_2)\,dT(g_1) \quad \text{pour } f_i \in \underline{\underline{S}}(G;E_i).$$

Démonstration.- Si I est une forme d'entrelacement de $\underline{\lambda}_1$ et $\underline{\lambda}_2$, on définit une forme bilinéaire sur $\underline{\underline{S}}(G;E_1)\times \underline{\underline{S}}(G;E_2)$ par:

$$(f_1\ ,\ f_2) \longrightarrow I(p_1(f_1),\ p_2(f_2)) \quad \text{où } f_i \in \underline{\underline{S}}(G;E_i).$$

Cette forme bilinéaire définit une forme linéaire sur $\underline{\underline{S}}(G;E_1)\otimes\underline{\underline{S}}(G;E_2)$. Comme cet espace s'identifie à $\underline{\underline{S}}(G\times G;E_1\otimes E_2)$, il existe donc une $E_1\otimes E_2$-distribution $\tilde{T}$ sur $G\times G$ telle que:

$$I(p_1(f_1),\ p_2(f_2)) = \int_{G\times G} f_1(g_1)\otimes f_2(g_2)\,d\tilde{T}(g_1\ ,g_2) \quad \text{pour } f_i \in \underline{\underline{S}}(G;E_i).$$

Il est clair que cette distribution est invariante par G. On a symboliquement:

$$d\tilde{T}(g_1 g,\ g_2 g) = d\tilde{T}(g_1\ ,\ g_2) \quad \text{si } g\in G.$$

Par conséquent, d'après le corollaire 3 de la proposition 3, il existe une $E_1\otimes E_2$-distribution T unique sur G telle que:

$$\int_{G\times G} f_1(g_1)\otimes f_2(g_2)\,d\tilde{T}(g_1\ ,\ g_2) = \int_G dg_2 \int_G f_1(g_1 g_2)\otimes f_2(g_2)\,dT(g_1) \quad \text{pour } f_i \in \underline{\underline{S}}(G;E_i).$$

Déterminons l'action des H_i sur T. Si $h\in H_i$ et $f\in \underline{\underline{S}}(G;E_i)$, notons f^h l'élément de $\underline{\underline{S}}(G;E_i)$ donné par: $f^h(g) = f(hg)$ si $g\in G$. On vérifie que l'on a:

(I.7.3) $$p_i(f^h) = \delta_i(h)^{\frac{1}{2}}\,p_i(\pi_i(h)f).$$

On peut donc calculer $\underline{\varepsilon}(h_1) * T * \underline{\varepsilon}(h_2^{-1})$. Si $f_i \in \underline{\underline{S}}(G;E_i)$, on a, par définition de la convolution:

$$\int_G dg_2 \int_G f_1(g_1g_2) \otimes f_2(g_2) d(\underline{\varepsilon}(h_1) * T * \underline{\varepsilon}(h_2^{-1}))(g_1)$$

$$= \int_G dg_2 \int_G f_1(h_1 g_1 h_2^{-1} g_2) \otimes f_2(g_2) dT(g_1)$$

$$= \int_G dg_2 \int_G f_1(h_1 g_1 g_2) \otimes f_2(h_2 g_2) dT(g_1) \quad \text{après changement de variable}$$

$$= I(p_1(f_1^{h_1}),\ p_2(f_2^{h_2}))$$

$$= (\underline{\delta}_1(h_1)\underline{\delta}_2(h_2))^{\frac{1}{2}} I(p_1(\underline{\pi}_1(f_1),\ p_2(\underline{\pi}_2(f_2))) \quad \text{d'après (I.7.3)}$$

$$= (\underline{\delta}_1(h_1)\underline{\delta}_2(h_2))^{\frac{1}{2}} \int_G dg_2 \int_G \underline{\pi}_1(h_1) f_1(g_1g_2) \otimes \underline{\pi}_2(h_2) f_2(g_2) dT(g_1)$$

$$= (\underline{\delta}_1(h_1)\underline{\delta}_2(h_2))^{\frac{1}{2}} \int_G dg_2 \int_G f_1(g_1g_2) \otimes f_2(g_2) d(T\circ[\underline{\pi}_1(h_1) \otimes \underline{\pi}_2(h_2)])(g_1)$$

Ce calcul étant vrai quels que soient f_1 et f_2, on en tire:

$$\underline{\varepsilon}(h_1) * T * \underline{\varepsilon}(h_2^{-1}) = (\underline{\delta}_1(h_1)\underline{\delta}_2(h_2))^{\frac{1}{2}}\ T\circ[\underline{\pi}_1(h_1) \otimes \underline{\pi}_2(h_2)].$$

Donc T vérifie bien (I.7.1).

On a donc démontré que la relation (I.7.2) définit une application de l'espace des formes d'entrelacement de $\underline{\lambda}_1$ et $\underline{\lambda}_2$ dans l'espace des $E_1 \otimes E_2$-distributions T vérifiant (I.7.1). Il est clair que cette application est linéaire. Si $T = \underline{0}$, on obtient $I(p_1(f_1), p_2(f_2)) = \underline{0}$ et comme les p_i sont surjectives, on a $I = \underline{0}$. Par conséquent cette application est injective. Il reste à montrer qu'elle est surjective. Soit T une $E_1 \otimes E_2$-distribution sur G vérifiant (I.7.1). Pour qu'il existe une forme bilinéaire I sur $V_1 \times V_2$ telle que (I.7.2) soit vérifié, il suffit que le deuxième membre de cette égalité soit nul dès que $p_1(f_1) = \underline{0}$ ou $p_2(f_2) = \underline{0}$. Or cette condition est vérifiée d'après la proposition 3. Il est clair alors que la forme bilinéaire I est une forme d'entrelacement de $\underline{\lambda}_1$ et $\underline{\lambda}_2$.

Corollaire 1.- <u>Soit H un sous groupe fermé de G et π une représentation admissible de H dans E. Supposons que la représentation $\mathrm{Ind}_{\underline{H}}^{G}\pi$ soit admissible. Alors la contragrédiente de $\mathrm{Ind}_{\underline{H}}^{G}\pi$ est isomorphe à $\mathrm{Ind}_{\underline{H}}^{G}\check{\pi}$.</u>

<u>Démonstration</u>.- D'après la proposition 2, il suffit de trouver une forme d'entrelacement non dégénérée de $\mathrm{Ind}_{\underline{H}}^{G}\pi$ et de $\mathrm{Ind}_{\underline{H}}^{G}\check{\pi}$. D'après le théorème, une forme d'entrelacement de ces deux représentations est définie par une $E \otimes \check{E}$-distribution sur G vérifiant:

$$\text{(I.7.4)} \qquad \underline{\varepsilon}(h_1) * T * \underline{\varepsilon}(h_2^{-1}) = \underline{\delta}_H(h_1h_2)^{\frac{1}{2}} T\circ[\underline{\pi}(h_1) \otimes \underline{\check{\pi}}(h_2)].$$

Les fonctions $g \to f(g)x \otimes \check{x}$ (avec $g \in G$, $f \in \underline{\underline{S}}(G)$, $x \in E$, $\check{x} \in \check{E}$) engendrent l'espace vectoriel $\underline{\underline{S}}(G;E\otimes\check{E})$. Notons $\langle\ ,\ \rangle$ la dualité canonique entre E et $\check{E}$. Alors on peut définir la $E\otimes\check{E}$-distribution T sur G par ses valeurs sur de tels éléments:

$$\int_G f(g)x\otimes\check{x}dT(g) = \int_H f(h)\langle\underline{\pi}(h^{-1})x,\ \check{x}\rangle\underline{\delta}_H(h)^{\frac{1}{2}}dh.$$

Montrons que T vérifie (I.7.4).

$$\int_G f(g)x\otimes\check{x}d(\underline{\varepsilon}(h_1)* T* \underline{\varepsilon}(h_2^{-1}))(g)$$

$$= \int_G f(h_1gh_2^{-1})x\otimes\check{x}\ dT(g)$$

$$= \int_H f(h_1hh_2^{-1})\langle\underline{\pi}(h^{-1})x,\ \check{x}\rangle\underline{\delta}_H(h)^{\frac{1}{2}}dh \quad \text{par définition de } T,$$

$$= \underline{\delta}_H(h_1h_2)^{\frac{1}{2}}\int_H f(h)\langle\underline{\pi}(h_1^{-1}hh_2)^{-1}x,\ \check{x}\rangle\underline{\delta}_H(h)^{\frac{1}{2}}dh \quad \text{après changement de variable,}$$

$$=\underline{\delta}_H(h_1h_2)^{\frac{1}{2}}\int_H f(h)\langle\underline{\pi}(h)^{-1}\underline{\pi}(h_1)x,\ \check{\underline{\pi}}(h_2)\check{x}\rangle\underline{\delta}_H(h)^{\frac{1}{2}}dh$$

$$= \int_G f(g)(\underline{\pi}(h_1)x\otimes\check{\underline{\pi}}(h_2)\check{x})\underline{\delta}_H(h_1h_2)^{\frac{1}{2}}dT(g) \quad \text{donc } T \text{ vérifie bien (I.7.4).}$$

Notons p (resp. $\check{p}$) l'application canonique de $\underline{\underline{S}}(G;E)$ dans $V = \underline{\underline{S}}(G;E;\underline{\pi})$ (resp. de $\underline{\underline{S}}(G;E)$ dans $V' = \underline{\underline{S}}(G;E;\check{\underline{\pi}})$). La forme d'entrelacement I est alors donnée par:

(I.7.5) $\quad I(p(f),\ p(f')) = \int_G dg\int_H \langle\underline{\pi}(h)^{-1}f(hg),\ f'(g)\rangle\underline{\delta}_H(h)^{\frac{1}{2}}dh$ où $f\in\underline{\underline{S}}(G;E)$ et $f'\in\underline{\underline{S}}(G;E)$.

On peut donc écrire:

$$I(p(f),\ p(f')) = \int_G\langle p(f)(g),\ f'(g)\rangle\ dg\ .$$

En faisant le changement de variable $g \to h^{-1}g$ dans (I.7.5), on a de même:

$$I(p(f),\ p(f')) = \int_G\langle f(g),\ p(f')(g)\rangle\ dg.$$

Montrons que I est non dégénérée. Supposons que f soit telle que, pour toute f' dans $\underline{\underline{S}}(G;E)$, on ait: $I(p(f),\ p(f')) = \underline{0}$. Si $p(f) \neq \underline{0}$, il existe un ouvert compact non vide C de G sur lequel $p(f)$ est constant et prend la valeur x. Soit $\check{x}$ un élément de $\check{E}$ tel que $\langle x,\ \check{x}\rangle \neq \underline{0}$ et prenons pour f' la fonction prenant la valeur $\check{x}$ sur C et 0 ailleurs. On a:

$$\underline{0} = I(p(f),\ p(f')) = \int_G\langle p(f)(g),\ f'(g)\rangle\ dg = \langle x,\ \check{x}\rangle\int_C dg \neq \underline{0}.$$

D'où une contradiction. On fait le même raisonnement en intervertissant f et f'. Donc I est non dégénérée.

On peut déduire comme autre corollaire du théorème une généralisation de la réciprocité de Frobenius. Soit H un sous groupe fermé de G et soit $\underline{\tau}$ (resp. $\underline{\pi}$) une représentation algébrique de H (resp. G) dans l'espace F (resp. E). On note $\underline{\delta}_H^{\frac{1}{2}} \otimes \underline{\tau}$ la représentation de H dans F donnée par:

$$(\underline{\delta}_H^{\frac{1}{2}} \otimes \underline{\tau})(h) = \underline{\delta}_H(h)^{\frac{1}{2}} \underline{\tau}(h) \quad \text{si } h \in H.$$

On note $\underline{\pi}|_H$ la représentation $\underline{\pi}$ restreinte à H.

Corollaire 2.- <u>L'espace des formes d'entrelacement de $\mathrm{Ind}_H^G \underline{\tau}$ et de $\underline{\pi}$ est isomorphe à l'espace des formes d'entrelacement de $\underline{\delta}_H^{\frac{1}{2}} \otimes \underline{\tau}$ et de $\underline{\pi}|_H$</u>.

<u>Démonstration</u>.- Remarquons que $\underline{\pi}$ est isomorphe à $\mathrm{Ind}_G^G \underline{\pi}$. D'après le théorème 1 l'espace des formes d'entrelacement de $\mathrm{Ind}_H^G \underline{\tau}$ et de $\underline{\pi}$ est donc isomorphe à l'espace des $F \otimes E$-distributions T sur G vérifiant:

$$\underline{\varepsilon}(h) * T * \underline{\varepsilon}(g^{-1}) = \underline{\delta}_H(h)^{\frac{1}{2}} T \circ [\underline{\tau}(h) \otimes \underline{\pi}(g)] \quad \text{si } h \in H \text{ et } g \in G.$$

D'après le comportement de T par translations à droite et le corollaire 2 de la proposition 3, il existe une forme linéaire unique a sur $F \otimes E$ telle que:

$$\int_G f(g)\,dT(g) = \left\langle \int_G (1 \otimes \underline{\pi}(g)) f(g)\,dg,\ a \right\rangle \quad \text{pour tout } f \in \underline{\underline{S}}(G; F \otimes E).$$

et réciproquement pour toute forme linéaire a sur $F \otimes E$ cette expression définit une $F \otimes E$-distribution T sur G vérifiant:

$$T * \underline{\varepsilon}(g^{-1}) = T \circ [1 \otimes \underline{\pi}(g)] \quad \text{si } g \in G.$$

Il reste à voir quelle condition doit vérifier a pour que T vérifie

$$\underline{\varepsilon}(h) * T = \underline{\delta}_H(h)^{\frac{1}{2}} T \circ [\underline{\tau}(h) \otimes 1] \quad \text{pour } h \in H.$$

On a, si $f \in \underline{\underline{S}}(G; F \otimes E)$:

$$\begin{aligned}\int_G f(g)\,d(\underline{\varepsilon}(h) * T)(g) &= \int_G f(hg)\,dT(g) \\ &= \left\langle \int_G (1 \otimes \underline{\pi}(g)) f(hg)\,dg,\ a \right\rangle \\ &= \left\langle \int_G (1 \otimes \underline{\pi}(g)) f(g)\,dg,\ a \circ (1 \otimes \underline{\pi}(h^{-1})) \right\rangle\end{aligned}$$

aprés changement de variable. On a d'autre part:

$$\begin{aligned}\int_G \underline{\delta}_H(h)^{\frac{1}{2}} (\underline{\tau}(h) \otimes 1) f(g)\,dT(g) &= \left\langle \int_G \underline{\delta}_H(h)^{\frac{1}{2}} (\underline{\tau}(h) \otimes \underline{\pi}(g)) f(g)\,dg,\ a \right\rangle \\ &= \left\langle \int_G (1 \otimes \underline{\pi}(g)) f(g)\,dg,\ a \circ (\underline{\delta}_H(h)^{\frac{1}{2}} (\underline{\tau}(h) \otimes 1)) \right\rangle\end{aligned}$$

La condition sur a est par conséquent:

$$a \circ (1 \otimes \underline{\pi}(h^{-1})) = a \circ (\underline{\delta}_H(h)^{\frac{1}{2}} (\underline{\tau}(h) \otimes 1)) \quad \text{pour tout } h \in H.$$

Ou encore:

$$a_{\wp}(\delta_H(h)^{\frac{1}{2}}\underline{\tau}(h)\otimes\underline{\pi}(h)) = a \text{ pour tout } h\in H.$$

Si nous considérons la forme bilinéaire sur $F\times E$ associée à la forme linéaire a sur $F\otimes E$, cette dernière condition exprime que cette forme bilinéaire est en fait une forme d'entrelacement de $\underline{\delta}_H^{\frac{1}{2}}\otimes\underline{\tau}$ et de $\underline{\pi}|_H$. D'où l'isomorphisme annoncé.

II. Un théorème d'unicité

II.1. Le groupe G

Soit K un corps localement compact non discret et non archimédien et soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Soit $\underline{\underline{G}}$ un groupe algébrique connexe réductif quasi-déployé sur K. Soit G l'ensemble des points de $\underline{\underline{G}}$ rationnels sur K. Par plongement dans un groupe $GL(n,K)$, G est muni d'une topologie qui en fait un groupe l.c.t.d. et qui est indépendante du plongement choisi.

II.2. Les représentations $\underline{\lambda}_\theta$

Soient $\underline{\underline{B}}$ un sous groupe de Borel de $\underline{\underline{G}}$ défini sur K, $\underline{\underline{H}}$ un tore maximal de $\underline{\underline{B}}$ défini sur K et $\underline{\underline{U}}$ le radical unipotent de $\underline{\underline{B}}$. Soit $\underline{\underline{R}}$ l'ensemble des racines de $\underline{\underline{G}}$ par rapport à $\underline{\underline{H}}$, muni de l'ordre qui rend positives toutes les racines de $\underline{\underline{H}}$ dans $\underline{\underline{B}}$, et S l'ensemble des racines simples correspondantes. On notera $h^{\underline{\alpha}}$ la valeur sur un élément h de $\underline{\underline{H}}$ d'une racine $\underline{\alpha}$. Pour chaque racine $\underline{\alpha}$ dans $\underline{\underline{R}}$, soit $x_{\underline{\alpha}}$ un homomorphisme non trivial de $\overline{K}$ dans $\underline{\underline{G}}$ tel que

$$hx_{\underline{\alpha}}(t)h^{-1} = x_{\underline{\alpha}}(h^{\underline{\alpha}}t) \quad \text{pour} \quad h\in\underline{\underline{H}} \quad \text{et} \quad t\in\overline{K}.$$

Un caractère rationnel $\underline{\underline{\Theta}}$ de $\underline{\underline{U}}$ (à valeurs dans $\overline{K}$) est dit <u>principal</u> s'il est de la forme

$$\underline{\underline{\Theta}}\Big(\prod_{\underline{\alpha}>0} x_{\underline{\alpha}}(t_{\underline{\alpha}})\Big) = \sum_{\underline{\alpha}\in S} \lambda_{\underline{\alpha}} t_{\underline{\alpha}} \qquad (t_{\underline{\alpha}}\in\overline{K})$$

où les $\underline{\lambda}_{\underline{\alpha}}$ sont des éléments de $\overline{K}^{\times}$. Remarquons qu'en modifiant au besoin le choix des $x_{\underline{\alpha}}$, on peut supposer tous les $\underline{\lambda}_{\underline{\alpha}}$ égaux à 1. C'est ce qu'on fera dans la suite.

On note respectivement H, B, U, l'intersection de $\underline{\underline{H}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{U}}$ avec G. Soit $\underline{\eta}$ un caractère non trivial de K (à valeurs dans le groupe des nombres complexes de module 1). Un caractère principal de U est un caractère de la forme $\eta \circ \underline{\underline{\Theta}}$ où $\underline{\underline{\Theta}}$ est un caractère rationnel principal défini sur K de $\underline{\underline{U}}$.

Si θ est un caractère principal de U, on note $\lambda_\theta = \mathrm{Ind}_U^G \theta$ la représentation de G induite par θ et on note L_θ l'espace de cette représentation.

II.3. Le théorème d'unicité

Théorème 2.- Soit π une représentation admissible irréductible de G dans l'espace E. Soit θ un caractère principal de U. Alors

$$\dim \mathrm{Hom}_G(\lambda_\theta, \pi) \leqslant 1.$$

III. Démonstration du théorème d'unicité: formes d'entrelacement sur $L \times \bar{L}$

On garde dans ce chapitre et les suivants les notations du chapitre précédent. En particulier, θ et $\underline{\underline{\Theta}}$ sont des caractères principaux fixés de U et $\underline{\underline{U}}$ respectivement vérifiant $\theta = \eta \circ \underline{\underline{\Theta}}$.

III.1. Compléments sur la structure de G

Soit $\underline{\underline{W}}$ le groupe de Weyl du système de racines $\underline{\underline{R}}$: $\underline{\underline{W}}$ est isomorphe au quotient $N(\underline{\underline{H}})/\underline{\underline{H}}$ où $N(\underline{\underline{H}})$ désigne le normalisateur de $\underline{\underline{H}}$ dans $\underline{\underline{G}}$. Pour chaque racine α dans S, il existe un unique élément t de $\bar{K}$ tel que

$$x_\alpha(1)x_{-\alpha}(t)x_\alpha(1) \in N(\underline{\underline{H}})$$

(cf. [20] proposition 1). On note $\bar{w}_\alpha$ cet élément de $N(\underline{\underline{H}})$. Son image dans $\underline{\underline{W}}$ est la symétrie w_α associée à la racine α. Si maintenant w est un élément de $\underline{\underline{W}}$, soit $w = w_\alpha w_\beta \ldots w_\gamma$ une expression minimale de w en produit de symétries associées à des racines simples. Alors $\bar{w} = \bar{w}_\alpha \bar{w}_\beta \ldots \bar{w}_\gamma$ est un représentant de w dans $N(\underline{\underline{H}})$ indépendant de l'expression minimale choisie pour w (cf. [12] lemme 83 b). On note w_0 l'unique élément de W de plus grande longueur. Il est tel que $\bar{w}_0 \underline{\underline{B}} \bar{w}_0^{-1} \cap \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{H}}$.

Proposition 5.- Il existe un unique antiautomorphisme σ de $\underline{\underline{G}}$ tel que

$$\underline{\sigma}(\underline{\underline{U}}) = \underline{\underline{U}} ,$$
$$\underline{\underline{\Theta}}\circ\underline{\sigma} = \underline{\underline{\Theta}} ,$$
$$\underline{\sigma}(\underline{h}) = \underline{\bar{w}_0 h \bar{w}_0^{-1}} \quad \underline{\text{pour tout}}\ \underline{h} \in \underline{\underline{H}}.$$

On a, de plus, $\underline{\sigma}^2 = 1$.

Démonstration.- Posant $\underline{\sigma}(g) = \underline{\varphi}(g^{-1})$ pour $g \in G$, cela revient à montrer qu'il existe un unique automorphisme $\underline{\varphi}$ de G tel que

$$\underline{\varphi}(\underline{\underline{U}}) = \underline{\underline{U}},$$
$$\underline{\underline{\Theta}}\circ\underline{\varphi} = -\underline{\underline{\Theta}}$$
$$\underline{\varphi}(h) = \bar{w}_0 h^{-1} \bar{w}_0^{-1} \quad \text{pour tout } h \in \underline{\underline{H}}.$$

La troisième condition entraîne que $\underline{\varphi}$ opère sur $\underline{\underline{R}}$ par $\underline{\varphi}(\underline{\alpha}) = -w_0(\underline{\alpha})$.
La deuxième condition s'écrit alors

$$\underline{\varphi}(x_{\underline{\alpha}}(t)) = x_{-w_0(\underline{\alpha})}(-t) \quad \text{si } \underline{\alpha} \in S.$$

On sait que ces conditions déterminent un unique automorphisme de $\underline{\underline{G}}$ ([16], exposé 23). Enfin $\underline{\sigma}^2$ est un automorphisme de $\underline{\underline{G}}$ qui vérifie

$$\underline{\sigma}^2(x_{\underline{\alpha}}(t)) = x_{\underline{\alpha}}(t) \quad \text{si } \underline{\alpha} \in S,$$
$$\underline{\sigma}^2(h) = h \quad \text{si } h \in \underline{\underline{H}},$$

c'est donc l'identité (loc. cit.).

Si $Q \subset S$, et si $\underline{\underline{W}}_Q$ est le groupe de Weyl du système de racines engendré par Q, on note w_Q l'élément de $\underline{\underline{W}}_Q$ qui transforme toutes les racines dans Q en racines négatives.

Lemme 1.- Soit $w \in \underline{\underline{W}}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Pour tout $\underline{\alpha} \in S$, si $w(\underline{\alpha}) > \underline{0}$, alors $w(\underline{\alpha})$ est simple;

(ii) Si $\underline{\alpha} > \underline{0}$ et $w(\underline{\alpha}) > \underline{0}$ et si l'une d'elles est simple, l'autre l'est aussi;

(iii) Il existe une partie Q de S telle que $w = \underline{w_0 w_Q}$.

Démonstration.- Voir [12], lemme 89.

Lemme 2.- Soit $Q \subset S$ et $\underline{\alpha} \in Q$. On a

(i) $\underline{\bar{w}_Q} \bar{w}_{\underline{\alpha}} \underline{\bar{w}_Q^{-1}} = \underline{\bar{w}_{-w_Q(\underline{\alpha})}}$,

(ii) $\underline{\bar{w}_Q} x_{\underline{\alpha}}(t) \underline{\bar{w}_Q^{-1}} = \underline{x_{-w_Q(\underline{\alpha})}}(t)$ si $t \in \bar{K}$.

Démonstration.- Soit $w_1 = w_Q \, w_{\underline{\alpha}}$. On a clairement

$$w_Q \, w_{\underline{\alpha}} = w_{-w_Q(\underline{\alpha})} \, w_Q \, .$$

D'où

$$w_Q = w_1 \, w_{\underline{\alpha}} = w_{-w_Q(\underline{\alpha})} \, w_1 \, .$$

Ainsi on obtient une décomposition minimale de w_Q en ajoutant $w_{\underline{\alpha}}$ à droite (ou bien $w_{-w_Q(\underline{\alpha})}$ à gauche) d'une décomposition minimale de w_1 . On a donc

$$\bar{w}_Q = \bar{w}_1 \, \bar{w}_{\underline{\alpha}} = \bar{w}_{-w_Q(\underline{\alpha})} \, \bar{w}_1 \, .$$

D'où

$$\bar{w}_Q \, \bar{w}_{\underline{\alpha}} \, \bar{w}_Q^{-1} \, \bar{w}^{-1}_{-w_Q(\underline{\alpha})} = \bar{w}_1 \, \bar{w}^{2}_{\underline{\alpha}} \, \bar{w}_1^{-1} \, \bar{w}^{-2}_{-w_Q(\underline{\alpha})} \, .$$

On a $w_{\underline{\alpha}}^2 = w^2_{-w_Q(\underline{\alpha})} = 1$, donc $\bar{w}^2_{\underline{\alpha}} \in H$ et $\bar{w}^2_{-w_Q(\underline{\alpha})} \in H$. Plus précisément, l'élément $\bar{w}^2_{\underline{\alpha}}$ est l'image de la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ par un homomorphisme quelconque de $SL(2, \bar{K})$ sur le sous-groupe de $\underline{\underline{G}}$ engendré par les éléments $x_{\underline{\alpha}}(t)$ et $x_{-\underline{\alpha}}(t)$ où $t \in \bar{K}$, et le même résultat vaut pour $-w_Q(\underline{\alpha})$ au lieu de $\underline{\alpha}$. Comme l'automorphisme de $\underline{\underline{H}}$ défini par w_1 envoie la racine $\underline{\alpha}$ sur la racine $w_1(\underline{\alpha}) = -w_Q(\underline{\alpha})$, on en déduit que

$$\bar{w}_1 \, \bar{w}^{2}_{\underline{\alpha}} \, \bar{w}_1^{-1} = \bar{w}^2_{-w_Q(\underline{\alpha})} \, ,$$

d'où

$$\bar{w}_Q \, \bar{w}_{\underline{\alpha}} \, \bar{w}_Q^{-1} = \bar{w}_{-w_Q(\underline{\alpha})} \, .$$

D'après [10], proposition 1; la formule (ii) est une conséquence de la formule (i).

Lemme 3.- $\underline{\text{Soit } w \in \underline{\underline{W}}. \text{ On a }} \underline{\sigma(\bar{w}) = \bar{w}_{\delta} \, \overline{(w^{-1})} \, \bar{w}_{\delta}^{-1}}$.

Démonstration.- Soit $\underline{\alpha} \in S$. On a défini $\bar{w}_{\underline{\alpha}}$ comme l'unique élément de $N(\underline{\underline{H}})$ de la forme $x_{\underline{\alpha}}(1) x_{-\underline{\alpha}}(t) x_{\underline{\alpha}}(1)$. D'après la démonstration de la proposition 5, on a $\underline{\sigma}(x_{\underline{\alpha}}(1)) = x_{-w_{\delta}(\underline{\alpha})}(1)$ et $\underline{\sigma}(x_{-\underline{\alpha}}(t)) = x_{w_{\delta}(\underline{\alpha})}(t')$, on en déduit que $\sigma(\bar{w}_\alpha)$ est un élément de $N(H)$ de la forme $x_{-w_0(\alpha)}(1)\, x_{w_0(\alpha)}(t')\, x_{-w_0(\alpha)}(1$

On a donc

$$\sigma(\bar{w}_\alpha) = \bar{w}_{-w_0(\alpha)} = \bar{w}_0 \bar{w}_\alpha \bar{w}_0^{-1}.$$

Soit maintenant $w = w_\alpha \dots w_\beta$ une décomposition minimale de w. On a $\bar{w} = \bar{w}_\alpha \dots \bar{w}_\beta$, d'où

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{w}) &= \sigma(\bar{w}_\beta)\dots \quad (\bar{w}_\alpha) \\ &= \bar{w}_0 \bar{w}_\beta \dots \bar{w}_\alpha \bar{w}_0^{-1} \\ &= \bar{w}_0\ \overline{(w^{-1})}\ \bar{w}_0 . \end{aligned}$$

Si $w \in W$, notons $U_w = U \cap \bar{w} U \bar{w}^{-1}$.

Proposition 6.- <u>Soient $w \in W$ et $h \in H$ tels que</u>
$\Theta(h^{-1}\bar{w}^{-1}u\bar{w}h) = \Theta(u)$ <u>pour tout</u> $u \in U_w$.

<u>Alors</u>

(i) <u>il existe une partie Q de S telle que</u> $w = w_0\, w_Q$,

(ii) $\bar{w}_Q h = h\bar{w}_Q$ <u>et</u> $h^\alpha = 1$ <u>si</u> $\alpha \in Q$,

(iii) $\sigma(\bar{w}h) = \bar{w}h.$

Démonstration .- (i) Soit α une racine dans S telle que $w(\alpha) > 0$. Il existe un élément a de $\bar{K}^{\times}$ tel que

$$h^{-1}\bar{w}^{-1} x_{w(\alpha)}(t)\bar{w}h = x_\alpha(at) \quad \text{pour } t \in \bar{K}.$$

On a donc

$$\Theta(x_{w(\alpha)}(t)) = \Theta(x_\alpha(at)) = at,$$

ce qui implique que $w(\alpha) \in S$. La partie (i) de la proposition provient alors du lemme 1.

(ii) On a donc $w_0 = ww_Q^{-1} = ww_Q$ et, comme on obtient une décomposition minimale de w_0 en juxtaposant une décomposition minimale de w et une décomposition minimale de w_Q , on a $\bar{w}_0 = \bar{w}\bar{w}_Q$. Soit α une racine dans Q. En utilisant deux fois le lemme 2, on a, si $t \in \bar{K}$,

$$\begin{aligned} \bar{w}^{-1} x_{w(\alpha)}(t)\, \bar{w} &= \bar{w}_Q\, \bar{w}_0^{-1} x_{w(\alpha)}(t)\, \bar{w}_0\, \bar{w}_Q^{-1} \\ &= \bar{w}_Q\, x_{-w_Q(\alpha)}(t)\, \bar{w}_Q^{-1} \\ &= x_\alpha(t). \end{aligned}$$

On a donc $c_{\underline{\gamma}} = 1$, d'où $\underline{\gamma}(x_{\underline{\alpha}}(t)) = x_{\underline{\gamma}(\underline{\alpha})}(\underline{\gamma}(t))$. D'après le choix des $\bar{w}_{\underline{\alpha}}$, on a donc $\underline{\gamma}(\bar{w}_{\underline{\alpha}}) = \bar{w}_{\underline{\gamma}(\underline{\alpha})}$. Soit w un élément de $\underline{\underline{W}}$ défini sur K et soit $w = w_{\underline{\alpha}} \dots w_{\underline{\beta}}$ une décomposition minimale de w. On a

$$w_{\underline{\gamma}(\underline{\alpha})} \dots w_{\underline{\gamma}(\underline{\beta})} = \underline{\gamma}(w) = w = w_{\underline{\alpha}} \dots w_{\underline{\beta}} .$$

On a donc

$$\underline{\gamma}(\bar{w}) = \underline{\gamma}(\bar{w}_{\underline{\alpha}}) \dots \underline{\gamma}(\bar{w}_{\underline{\beta}}) = \bar{w}_{\underline{\gamma}(\underline{\alpha})} \dots \bar{w}_{\underline{\gamma}(\underline{\beta})} = \bar{w}.$$

Notation.- On note W l'ensemble des éléments de $\underline{\underline{W}}$ définis sur K. C'est un sous-groupe de $\underline{\underline{W}}$ (groupe de Weyl relatif).

Corollaire.- Soit θ un caractère principal de U. Si w est un élément de W et h un élément de H tels que $\theta(h^{-1}\bar{w}^{-1}u\bar{w}h) = \theta(u)$ pour tout u dans U_w ($U_w = \underline{\underline{U}}_w \cap G$), alors

(i) il existe une partie Ω de S telle que $w = w_0 \setminus w_\Omega$,

(ii) $\bar{w}_\Omega h = h\bar{w}_\Omega$ et $h^{\alpha} = 1$ si $\alpha \in \Omega$,

(iii) $\sigma(\bar{w}h) = \bar{w}h$.

Démonstration.- La condition s'écrit $\eta(\underline{\underline{\Theta}}(h^{-1}\bar{w}^{-1}u\bar{w}h) - \underline{\underline{\Theta}}(u)) = 1$. Le groupe $\underline{\underline{U}}_w$ est un groupe unipotent déployé sur K ([13], corollaire 3. 18), donc la variété algébrique sous-jacente à $\underline{\underline{U}}_w$ est K-isomorphe à un espace vectoriel. De plus, il est facile de voir que le morphisme de $\underline{\underline{U}}_w$ dans $\bar{K}$ donné par

$$u \longrightarrow \underline{\underline{\Theta}}(h^{-1}\bar{w}^{-1}u\bar{w}h) - \underline{\underline{\Theta}}(u)$$

est défini par un polynôme de degré au plus 1 en chaque variable. On en déduit que l'ensemble des éléments de K de la forme $\underline{\underline{\Theta}}(h^{-1}\bar{w}^{-1}u\bar{w}h) - \underline{\underline{\Theta}}(u)$ pour $u \in U_w$ est égal soit à $\{\underline{0}\}$, soit à K. Par hypothèse, cet ensemble est contenu dans le noyau de η: il est donc nul. On peut donc appliquer la proposition 6.

III.2. Distributions associées aux formes d'entrelacement sur $L \times \bar{L}$

On adopte à partir de maintenant les notations suivantes: $\lambda_\theta = \lambda$, $\lambda_{\bar{\theta}} = \bar{\lambda}$, $L = L_\theta$, $\bar{L} = L_{\bar{\theta}}$, et on note p (resp. $\bar{p}$) l'application $\underline{\underline{S}}(G) \to L$ (resp. $\underline{\underline{S}}(G) \to \bar{L}$) définie en (I.2).

D'après le théorème 1, la relation :

(III.2.1) $$I(p(f_1), \overline{p}(f_2)) = \int_G dg_2 \int_G f_1(g_1g_2)f_2(g_2)dT(g_1) \quad \text{pour } f_i \in \underline{\underline{S}}(G),$$

définit un isomorphisme entre l'espace des formes d'entrelacement I de $\underline{\lambda}$ et $\overline{\underline{\lambda}}$ et l'espace des distributions T sur G vérifiant:

(III.2.2) $$\underline{\varepsilon}(u_1) * T * \underline{\varepsilon}(u_2) = \underline{\theta}(u_1u_2)T \quad \text{pour } u_i \in U.$$

La décomposition de Bruhat de G s'écrit

$$G = \bigcup_{w \in W} B\overline{w}B \ .$$

Il nous suffira pour la suite, d'étudier les distributions T sur $B\overline{w}B$ vérifiant la relation (III. 2.2). Avant d'énoncer les résultats, nous avons besoin du lemme suivant .

Lemme 4 .- <u>Soit $w \in W$ et soit $U_w = U \cap \overline{w}U\overline{w}^{-1}$.</u>

a) <u>Le groupe U_w opère à droite proprement et librement sur l'espace $U \times H \times U$ par:</u>

$(u_1, h, u_2).u = (u_1u, h, h^{-1}\overline{w}^{-1}u^{-1}\overline{w}hu_2)$ <u>où</u> $(u_1, h, u_2) \in U \times H \times U$ <u>et</u> $u \in U_w$.

b) <u>L'application de $U \times H \times U$ dans $B\overline{w}B$ définie par:</u>

$$(u_1, h, u_2) \rightarrow u_1\overline{w}hu_2$$

<u>est constante sur les orbites de U_w et définit par passage au quotient un homéomorphisme du quotient de $U \times H \times U$ par U_w sur $B\overline{w}B$.</u>

<u>Démonstration</u>.- Le groupe $U \times B$ opère transitivement à gauche sur $B\overline{w}B$ par: $(u, b).g = ugb^{-1}$ si $(u, b) \in U \times B$ et $g \in B\overline{w}B$. Le stabilisateur de $\overline{w}$ est formé des éléments de la forme $(u, \overline{w}^{-1}u\overline{w})$ avec $u \in U \cap \overline{w}U\overline{w}^{-1} = U_w$. Par conséquent l'application de $U \times B$ dans $B\overline{w}B$ définie par:

$$(u, b) \rightarrow (u, b).\overline{w} = u\overline{w}b^{-1}$$

induit par passage au quotient un homéomorphisme de $(U \times B)/U_w$ sur $B\bar{w}B$ ([2] Ch. 7, appendice 1, Lemme 2). L'application de $U \times H \times U$ dans $U \times B$ qui envoie (u_1, h, u_2) sur $(u_1, u_2^{-1}h^{-1})$ est un homéomorphisme. En transportant à $U \times H \times U$ par cet homéomorphisme l'opération de U_w sur $U \times B$ par translations à gauche, on obtient immédiatement les résultats du lemme.

Cette opération de U_w permet de remonter à $U \times H \times U$ les distributions sur $B\bar{w}B$. Si $f \in \underline{\underline{S}}(U \times H \times U)$, on note f^b l'élément de $\underline{\underline{S}}(B\bar{w}B)$ donné par:

$$f^b(\dot{x}) = \int_{U_w} f(x.u)du \quad \text{si } x \in U \times H \times U \text{ et } \dot{x} \text{ est l'image de } x \text{ dans } B\bar{w}B.$$

On démontre comme dans la proposition 1 que l'application $f \longrightarrow f^b$ est surjective. Par transposition, on obtient une application injective, notée $T \longrightarrow T^{\#}$ de $\underline{\underline{S}}'(B\bar{w}B)$ dans $\underline{\underline{S}}'(U \times H \times U)$. Cette application est telle que:

$$\int_{U \times H \times U} f(x)dT^{\#}(x) = \int_{B\bar{w}B} dT(\dot{x}) \int_{U_w} f(x.u)du \quad \text{si } f \in \underline{\underline{S}}(U \times H \times U).$$

Proposition 8.- Soit T une distribution sur $B\bar{w}B$ vérifiant (III.2.2.).

(i) Si $T \neq 0$, alors il existe une partie Q de S telle que $w = w_0 w_Q$.

(ii) Dans ce cas, il existe une distribution unique $\tilde{T}$ sur H telle que

(III.2.3) $$T^{\#} = \overline{\theta(u_1)du_1} \otimes \tilde{T} \otimes \overline{\theta(u_2)du_2}$$

où $du = du_i$ est une mesure de Haar fixée sur U.

(iii) Si $h \in \operatorname{Supp} \tilde{T}$, alors $\bar{w}_Q h \bar{w}_Q^{-1} = h$.

Démonstration.- 1- T vérifie (III.2.2) si et seulement s'il existe $\tilde{T}$ dans $\underline{S}'(H)$ vérifiant (III.2.3). Le groupe $U \times U$ opère à gauche:

sur $U \times H \times U$ par: $(u_1 , u_2).(u'_1 , h, u'_2) = (u_1 u'_1 , h, u'_2 u_2^{-1})$

et sur $B\bar{w}B$ par: $(u_1 , u_2).g \qquad = u_1 g u_2^{-1}$ si $g \in B\bar{w}B$.

Ces deux opérations sont compatibles avec:

- l'opération à droite de U_w sur $U \times H \times U$;
- l'application: $U \times H \times U \to B\bar{w}B$ définie dans le lemme 4 b).

Par conséquent, pour que T vérifie (III.2.2), qu'on peut aussi écrire symboliquement: $dT((u_1 , u_2).g) = \underline{\theta}(u_1^{-1}u_2)dT(g)$, il faut et il suffit que $T^{\#}$ vérifie:

$$dT^{\#}((u_1 , u_2).x) = \underline{\theta}(u_1^{-1}u_2)dT^{\#}(x) \quad \text{pour } x \in U \times H \times U \quad \text{et} \quad u_i \in U.$$

D'après le corollaire 3 de la proposition 3, ceci équivaut à:

$$T^{\#} = \overline{\underline{\theta}(u_1)}du_1 \otimes \tilde{T} \otimes \overline{\underline{\theta}(u_2)}du_2$$

où $\tilde{T}$ est une distribution sur H.

2- **Soit $T' \in \underline{S}'(H)$. Pour qu'il existe $T \in \underline{S}'(B\bar{w}B)$ telle que:**

$$T^{\#} = \overline{\underline{\theta}(u_1)}du_1 \otimes T' \otimes \overline{\underline{\theta}(u_2)}du_2 ,$$

il faut et il suffit que T' vérifie

$$\text{(III.2.4)} \qquad \int_H f(h)(1 - \underline{\theta}(h^{-1}\bar{w}^{-1}u^{-1}\bar{w}hu))dT'(h) = 0$$

pour tout $u \in U_w$ et tout $f \in \underline{S}(H)$.

En effet, soit $T_1 = \overline{\underline{\theta}(u_1)}du_1 \otimes T' \otimes \overline{\underline{\theta}(u_2)}du_2$. Pour qu'il existe T telle que $T_1 = T^{\#}$, il faut et il suffit, d'après la proposition 4, que T_1 soit invariante à droite par U_w , c'est à dire que:

$$dT_1(x.u) = dT_1(x) \text{ pour tout } u \in U_w .$$

Il suffit d'appliquer cette égalité à des fonctions $f \in \underline{S}(U \times H \times U)$ décomposées, c'est à dire de la forme: $f(u_1 , h, u_2) = f_1(u_1)f'(h)f_2(u_2)$ pour $u_i \in U$ et $h \in H$.

On vérifie alors que:

$$\int_{U \times H \times U} f(x)dT_1(x) = \left(\int_U f_1(u_1)\overline{\underline{\theta}(u_1)}du_1\right)\left(\int_U f_2(u_2)\overline{\underline{\theta}(u_2)}du_2\right)\left(\int_H f'(h)dT'(h)\right).$$

Et d'autre part, si $u \in U_w$:

$$\int_{U \times H \times U} f(x) dT_1(x.u^{-1}) =$$

$$= \int_{U \times H \times U} f(x.u) dT_1(x)$$

$$= \int_{U \times H \times U} f_1(u_1 u) f'(h) f_2(h^{-1}\bar{w}^{-1}u^{-1}\bar{w}hu_2)\overline{\underline{\theta}(u_1)}\,\overline{\underline{\theta}(u_2)}\, du_1 \otimes dT'(h) \otimes du_2$$

$$= \left(\int_U f_1(u_1 u)\overline{\underline{\theta}(u_1)}\, du_1\right) \int_H f'(h) \int_U f_2(h^{-1}\bar{w}^{-1}u^{-1}\bar{w}hu_2)\overline{\underline{\theta}(u_2)}\, du_2\, dT'(h)$$

$$= \underline{\theta}(u)\left(\int_U f_1(u_1)\overline{\underline{\theta}(u_1)}\, du_1\right)\left(\int_U f_2(u_2)\overline{\underline{\theta}(u_2)}\, du_2\right)\left(\int_H f'(h)\underline{\theta}(h^{-1}\bar{w}^{-1}u^{-1}\bar{w}h)\, dT'(h)\right)$$

après un changement de la variable u_2. Comme f_1 et f_2 sont quelconques, la condition $dT_1(x.u^{-1}) = dT_1(x)$ s'écrit donc:

$$\int_H f'(h) dT'(h) = \int_H f'(h)\underline{\theta}(h^{-1}\bar{w}^{-1}u^{-1}\bar{w}hu) dT'(h), \text{ pour tout } f' \in \underline{S}(H),$$

ce qui est bien la condition (III.2.4).

3- D'après (III.2.4), si $h \in \operatorname{Supp} T'$, alors on a $\underline{\theta}(h^{-1}\bar{w}^{-1}u\bar{w}h) = \underline{\theta}(u)$ pour tout $u \in U_w$. D'après le corollaire aux propositions 6 et 7, on en déduit $w = w_Q$ et $\bar{w}_Q h \bar{w}_Q^{-1} = h$ pour une certaine partie Q de S.

III. 3- Invariance de T par σ.

Comme σ est un homéomorphisme continu de G sur lui-même, il opère sur les distributions sur G.

Nous utiliserons ici pour σ la notation exponentielle: si $g \in G$, on note:

$$\sigma(g) = g^{\sigma} \quad \text{et} \quad \sigma(g^{-1}) = (\sigma(g))^{-1} = g^{-\sigma}.$$

Alors σ agit sur $\underline{\underline{S}}(G)$ et sur $\underline{\underline{S}}'(G)$. Si $f \in \underline{\underline{S}}(G)$, on note:

$$f^{\sigma}(g) = f(g^{\sigma}) .$$

Si $T \in \underline{\underline{S}}'(G)$, son transfomé T^{σ} par σ est défini par:

$$\int_G f(g)dT^{\sigma}(g) = \int_G f^{\sigma}(g)dT(g) \quad \text{si } f \in \underline{\underline{S}}(G).$$

Proposition 9.- Soit T une distribution sur G vérifiant (III.2.2). Alors, on a: $T = T^{\sigma}$.

Démonstration .- 1er cas: nous étudions d'abord le cas où T est une distribution sur $B\bar{w}B$.

Alors, d'après la proposition 8, il existe une partie Q de S telle que $w = w_0 w_Q$. Soient u_i deux éléments de U et $g = u_1 \bar{w} h u_2$ un élément de $B\bar{w}B$. On a

$$\begin{aligned} g^{\sigma} &= u_2^{\sigma}\, h^{\sigma}\, \bar{w}^{\sigma} u_1^{\sigma} \\ &= u_2^{\sigma}\, \bar{w}_0\, h\, \bar{w}_0^{-1} \bar{w}\, u_1^{\sigma} \qquad \text{(cf. proposition 6.iii)} \\ &= u_2^{\sigma}\, \bar{w}\, (\bar{w}_Q\, h\, \bar{w}_Q^{-1})\, u_1^{\sigma} . \end{aligned}$$

En particulier, σ conserve la double classe $B\bar{w}B$.

Pour montrer que $T = T^{\sigma}$, il suffit de montrer que $T^{\#} = (T^{\sigma})^{\#}$ dans $\underline{\underline{S}}'(U \times H \times U)$.
On peut relever l'opération de $\underline{\sigma}$ sur $B\bar{w}B$ en une opération sur $U \times H \times U$ définie par:

$$(u_1 , h, u_2)^{\sigma} = (u_2^{\sigma}, \bar{w}_Q h \bar{w}_Q^{-1}, u_1^{\sigma})$$

On peut alors calculer $(T^{\sigma})^{\#}$. Si $f \in \underline{\underline{S}}(U \times H \times U)$, on a:

$$\int_{U \times H \times U} f(x) d(T^{\sigma})^{\#}(x) = \int_{B\bar{w}B} dT^{\sigma}(\dot{x}) \int_{U_w} f(x.u)du$$
$$= \int_{B\bar{w}B} dT(\dot{x}) \int_{U_w} f(x^{\sigma}.u)du$$

Si $x = (u_1 , h, u_2)$, on a, d'après la définition de l'opération de U_w sur $U \times H \times U$:

$$(u_1 , h, u_2)^{\sigma}.u = (u_2^{\sigma}u, \bar{w}_Q h \bar{w}_Q^{-1}, \bar{w}_Q h^{-1}\bar{w}^{-1}u^{-1}\bar{w}\bar{w}_Q h \bar{w}_Q^{-1}u_1^{\sigma})$$
$$= (u_2^{\sigma}u, \bar{w}_Q h \bar{w}_Q^{-1}, \bar{w}^{-\sigma}h^{-\sigma}u^{-1}h^{\sigma}\bar{w}^{\sigma}u_1^{\sigma}) .$$

Soit ρ_h l'automorphisme de U_w donné par:

$$\rho_h(u) = \bar{w}hu^{-\sigma}h^{-1}\bar{w}^{-1} .$$

On vérifie qu'on a inversement:

$$u = \rho_{\bar{w}_Q h \bar{w}_Q^{-1}} (\rho_h(u)) .$$

On peut écrire par conséquent:

$$(u_1 , h, u_2)^{\sigma}.u = (u_2^{\sigma}u, \bar{w}_Q h \bar{w}_Q^{-1}, (\rho_h(u))^{\sigma}u_1^{\sigma})$$
$$= (u_1(\rho_h(u)), h, u^{\sigma}u_2)^{\sigma}$$
$$= (u_1\rho_h(u), h, h^{-1}\bar{w}^{-1}\rho_h(u)\bar{w}hu_2)^{\sigma} \text{ en exprimant } u^{\sigma} \text{ en fonction de } \rho_h(u$$
$$= ((u_1 , h, u_2).\rho_h(u))^{\sigma} \text{ d'après la définition de l'opé-}$$

ration de U_w sur $U \times H \times U$. Si $f \in \underline{\underline{S}}(U \times H \times U)$, définissons f^{σ} par:

$$f^{\sigma}(u_1 , h, u_2) = f((u_1 , h, u_2)^{\sigma})$$

On a donc, si $x = (u_1 , h, u_2) \in U \times H \times U$:

$$\int_{U_w} f(x^{\sigma}.u)du = \int_{U_w} f^{\sigma}(x.u)d(\rho_h^{-1}(u))$$

La distribution T admet la décomposition (III.2.3). Si $u_1\bar{w}hu_2 \in \operatorname{Supp} T$, alors $(u_1, h, u_2) \in \operatorname{Supp} T^{\#}$, donc $h \in \operatorname{Supp} \tilde{T}$. D'après la proposition 8, on a donc $\bar{w}_Q\, h\, \bar{w}_Q^{-1} = h$, donc $\underline{\rho}_h^{-1} = \underline{\rho}_h$. Dans ce cas, l'automorphisme $\underline{\rho}_h$ de U_w est donc involutif et conserve la mesure de Haar de U_w. D'où

$$\int_{U_w} f(x^{\underline{\sigma}}.u)du = \int_{U_w} f^{\underline{\sigma}}(x.u)du .$$

On a donc

$$\int_{U\times H\times U} f(x)d(T^{\underline{\sigma}})^{\#}(x) = \int_{B\bar{w}B} dT(\dot{x}) \int_{U_w} f^{\underline{\sigma}}(x.u)du$$

$$= \int_{U\times H\times U} f^{\underline{\sigma}}(x)dT^{\#}(x) .$$

Supposons maintenant f décomposée: $f(u_1, h, u_2) = f_1(u_1)f'(h)f_2(u_2)$.

Comme la distribution $T^{\#}$ se décompose (cf. III.2.3), on a

$$\int_{U\times H\times U} f^{\underline{\sigma}}(x)dT^{\#}(x) =$$

$$\left(\int_U f_2(u_1)\, \overline{\underline{\theta}(u_1)}du_1\right)\left(\int_H f'(\bar{w}_Q h\bar{w}_Q^{-1})d\tilde{T}(h)\right)\left(\int_U f_1^{\underline{\sigma}}(u_2)\, \overline{\underline{\theta}(u_2)}du_2\right) .$$

Comme l'antiautomorphisme $\underline{\sigma}$ est involutif, il conserve la mesure de Haar de U. On a donc

$$\int_U f_i^{\underline{\sigma}}(u)\, \overline{\underline{\theta}(u)}du = \int_U f_i(u)\, \overline{\underline{\theta}(u)}du .$$

D'autre part, si $h \in \operatorname{Supp} \tilde{T}$, on a $\bar{w}_Q h\bar{w}_Q^{-1} = h$, donc

$$\int_H f'(\bar{w}_Q h\bar{w}_Q^{-1})d\tilde{T}(h) = \int_H f'(h)d\tilde{T}(h) .$$

Comme les fonctions f décomposées engendrent $\underline{\underline{S}}(U\times H\times U)$, on peut donc écrire:

$$\int_{U\times H\times U} f(x)d(T^{\sigma})^{\#}(x) = \int_{U\times H\times U} f(x)dT^{\#}(x)$$

Comme l'application $T \longrightarrow T^{\#}$ est injective, on a donc: $T = T^{\sigma}$.

<u>2e cas: Cas général</u>.- G admet la décomposition de Bruhat:

$$G = \bigcup_{w\in W} B\bar{w}B$$

Si $w\in W$, on note $l(w)$ la longueur de w, c'est à dire le nombre minimum de facteurs intervenant dans une décomposition de w en produit de symétries $\underline{w_\alpha}$.

Posons $F_i = \bigcup_{l(w)\leqslant i} B\bar{w}B$. Les F_i forment une suite croissante de fermés:

$$B = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_m = G \quad \text{si } m = l(w_0).$$

Remarquons que si $f \in \underline{\underline{S}}(F_{i+1})$ et si f est nulle sur F_i , alors le support de f est un compact contenu dans $F_{i+1} - F_i$. De plus, tout élément $f \in \underline{\underline{S}}(F_i)$ se prolonge à un élément de $\underline{\underline{S}}(F_{i+1})$. On a donc la suite exacte d'espaces vectoriels:

$$0 \to \underline{\underline{S}}(F_{i+1} - F_i) \to \underline{\underline{S}}(F_{i+1}) \to \underline{\underline{S}}(F_i) \to 0$$

Donc, par transposition:

$$0 \to \underline{\underline{S}}'(F_i) \to \underline{\underline{S}}'(F_{i+1}) \to \underline{\underline{S}}'(F_{i+1} - F_i) \to 0$$

On a donc dans $\underline{\underline{S}}'(G)$ la suite croissante de sous espaces:

$$\underline{\underline{S}}'(F_0) \subset \underline{\underline{S}}'(F_1) \subset \dots \subset \underline{\underline{S}}'(F_m) = \underline{\underline{S}}'(G)$$

et chaque quotient $\underline{\underline{S}}'(F_{i+1})/\underline{\underline{S}}'(F_i)$ est isomorphe à $\underline{\underline{S}}'(F_{i+1} - F_i)$ où l'isomorphisme est obtenu par restriction de la distribution sur F_{i+1} à l'ouvert $F_{i+1} - F_i$ dans F_{i+1} . Remarquons enfin que:

$$F_{i+1} - F_i = \bigcup_{l(w)=i+1} B\bar{w}B .$$

La réunion est disjointe et chaque $B\bar{w}B$ est ouvert dans $F_{i+1} - F_i$. On a donc:

$$\underline{\underline{S}}'(F_{i+1} - F_i) = \bigoplus_{l(w)=i+1} \underline{\underline{S}}'(B\bar{w}B) .$$

Soit T une distribution sur G vérifiant (III.2.2.). Il en est alors de même de T^{σ} et donc de $T - T^{\sigma}$. Posons $T' = T - T^{\sigma}$ et supposons que $T' \neq 0$. Soit i le plus petit indice tel que $T' \in \underline{\underline{S}}'(F_{i+1})$. Si w est un élément de W tel que $l(w) = i+1$, soit T'_w la restriction de T' à $B\bar{w}B$. La distribution T'_w vérifie encore (III.2.2.). Si w n'est pas de la forme $w = w_\Delta w_\Omega$, alors $T'_w = 0$. Si w est de la forme $w = w_\Delta w_\Omega$, alors $T'_w = T'^{\sigma}_w$ d'après ce qu'on a vu précédemment. Mais T' vérifie $T'^{\sigma} = T^{\sigma} - T = -T'$. On a donc $T'^{\sigma}_w = -T'_w$. On a par conséquent $T'_w = 0$. La même relation étant vraie pour tous les w de longueur i+1 , on a donc $T' \in \underline{\underline{S}}'(F_i)$, d'où une contradiction, ce qui montre que $T = T^{\sigma}$.

III. 4- Action de σ sur les formes d'entrelacement

Si f est une fonction sur G, on note $\check{f}^{\sigma}$ la fonction sur G telle que: $\check{f}^{\sigma}(g) = f(g^{-\sigma})$. Si $v \in L$ (resp. $\bar{L}$), on a: $\check{v}^{\sigma} \in \bar{L}$ (resp. L). Si f est un élément de $\underline{S}(G)$, on vérifie facilement que:

$$p(\check{f}^{\sigma}) = (\bar{p}(f))^{\check{}\sigma} \quad \text{et} \quad \bar{p}(\check{f}^{\sigma}) = (p(f))^{\check{}\sigma}$$

où p (resp. $\bar{p}$) est l'homomorphisme de $\underline{S}(G)$ dans L (resp. $\bar{L}$) défini au début de (III).

Proposition 10 - Soit I une forme d'entrelacement de λ et $\bar{\lambda}$. On a: $I(v_1, \check{v}_2^{\sigma}) = I(v_2, \check{v}_1^{\sigma})$ si $v_i \in L$.

Démonstration.- Il suffit de le vérifier en prenant $v_i = p(f_i)$ avec $f_i \in \underline{S}(G)$. Soit T la distribution sur G associée à I par le théorème 1. On a alors:

$$\begin{aligned}
I(v_1, \check{v}_2^{\sigma}) &= I(p(f_1), \bar{p}(\check{f}_2^{\sigma})) \\
&= \int_G dg_2 \int_G f_1(g_1 g_2) f_2(g_2^{-\sigma}) dT(g_1) \quad \text{d'après le théorème 1,} \\
&= \int_G dg_2 \int_G \check{f}_1^{\sigma}(g_1^{-\sigma} g_2) f_2(g_2) dT(g_1) \quad \text{car } d(g_2) = d(g_2^{-\sigma}) \\
&= \int_G dg_2 \int_G f_2(g_1^{\sigma} g_2) \check{f}_1^{\sigma}(g_2) dT(g_1) \quad \text{par changement de } g_2 \text{ en } g_1^{\sigma} g_2, \\
&= \int_G dg_2 \int_G f_2(g_1 g_2) \check{f}_1^{\sigma}(g_2) dT(g_1) \quad \text{car } T = T^{\sigma}, \\
&= I(p(f_2), \bar{p}(\check{f}_1^{\sigma})) = I(v_2, \check{v}_1^{\sigma})
\end{aligned}$$

III. 5- Une inégalité

Proposition 11 - Soit π une représentation admissible irréductible de G dans E, et $\check{\pi}$ sa contragrédiente, dans l'espace $\check{E}$. Soit θ un caractère principal de U. Alors on a:

$$\dim \mathrm{Hom}_G(\lambda_\theta, \pi) . \dim \mathrm{Hom}_G(\lambda_{\bar{\theta}}, \check{\pi}) \leq 1.$$

Démonstration.- On peut supposer que $\mathrm{Hom}_G(\lambda_\theta, \pi) \neq 0$ et $\mathrm{Hom}_G(\lambda_{\bar{\theta}}, \check{\pi}) \neq 0$. Soit a (resp. a') un élément non nul de $\mathrm{Hom}_G(\lambda_\theta, \pi)$ (resp. $\mathrm{Hom}_G(\lambda_{\bar{\theta}}, \check{\pi})$). On note $\langle\ ,\ \rangle$ la dualité canonique entre E et $\check{E}$. On définit une forme d'entrelacement I_1 de λ_θ et de $\lambda_{\bar{\theta}}$ par:

$$I_1(v_1, v_2) = \langle a(v_1), a'(v_2) \rangle \quad \text{si } v_1 \in L_\theta \text{ et } v_2 \in L_{\bar{\theta}}.$$

La proposition 10 montre que la forme bilinéaire $\check{I}$ sur $L_{\underline{\theta}} \times L_{\underline{\theta}}$ définie par:

$$I(v_1, v_2) = I_1(v_1, \check{v}_2^{\sigma}) \quad \text{si } v_i \in L_{\underline{\theta}},$$

est symétrique. On pose: $\hat{a}'(v) = a'(\check{v}^{\sigma})$. Alors $\hat{a}'$ est une application linéaire de $L_{\underline{\theta}}$ dans $\check{E}$, et on a:

$$I(v_1, v_2) = \langle a(v_1), \hat{a}'(v_2)\rangle \quad \text{si } v_i \in L_{\underline{\theta}}.$$

Comme $\underline{\pi}$ et $\check{\underline{\pi}}$ sont irréductibles, a et a' sont surjectifs; il en va de même de $\hat{a}'$. Comme, de plus, la forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur $E \times \check{E}$ est non dégénérée et que I est symétrique, on en déduit que Ker a = Ker $\hat{a}'$. Comme a et a' sont choisis indépendamment, le sous espace Ker a = Ker $\hat{a}'$ = $L^{o}_{\underline{\theta}}$ de $L_{\underline{\theta}}$ est indépendant de a et a'. Il est de plus invariant par G. Ainsi a se factorise de manière unique par un isomorphisme $\tilde{a}$ de $L_{\underline{\theta}}/L^{o}_{\underline{\theta}}$ sur E.

Notons $\lambda^1_{\underline{\theta}}$ la représentation de G dans $L_{\underline{\theta}}/L^{o}_{\underline{\theta}}$. L'application $a \to \tilde{a}$ est un isomorphisme de $\mathrm{Hom}_G(\lambda_{\underline{\theta}}, \underline{\pi})$ sur $\mathrm{Hom}_G(\lambda^1_{\underline{\theta}}, \underline{\pi})$. D'après le lemme de Schur, on a:

$$\dim \mathrm{Hom}_G(\lambda^1_{\underline{\theta}}, \underline{\pi}) = 1$$

puisque $\underline{\pi}$ est irréductible et que $\lambda^1_{\underline{\theta}}$ est équivalente à $\underline{\pi}$. On a donc:

$$\dim \mathrm{Hom}_G(\lambda_{\underline{\theta}}, \underline{\pi}) = 1.$$

On montre de même que $\dim \mathrm{Hom}_G(\lambda_{\underline{\bar{\theta}}}, \check{\underline{\pi}}) = 1$, d'où la proposition.

IV Représentations paraboliques

IV. 1- Sous groupes paraboliques

On dira qu'un sous-groupe P de G est un sous-groupe parabolique si c'est l'ensemble des points rationnels d'un sous-groupe parabolique $\underline{\underline{P}}$ de $\underline{\underline{G}}$ défini sur K. Le radical unipotent V de P est l'ensemble des points rationnels du radical unipotent $\underline{\underline{V}}$ de $\underline{\underline{P}}$. Si $\underline{\underline{M}}$ est un sous-groupe de Lévi de $\underline{\underline{P}}$ défini sur K (i.e. $\underline{\underline{M}}$ est un sous-groupe de $\underline{\underline{P}}$ vérifiant $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{M}}\underline{\underline{V}}$ et $\underline{\underline{M}} \cap \underline{\underline{V}} = \{e\}$), alors on a $P = MV$. On dira que M est un sous-groupe de Lévi de P.

IV. 2- Représentations paraboliques

Définition.- Une représentation admissible π de G dans E est dite parabolique si, pour tout sous groupe parabolique P de G distinct de G et pour tout $x \in E$, il existe un sous groupe ouvert compact V' du radical unipotent V de P tel que:

$$\int_{V'} \pi(v)x\,dv = 0.$$

Si π est une représentation admissible de G dans l'espace E, on appelle coefficient de π une fonction sur G de la forme

$$g \mapsto \langle \pi(g)x, \check{x} \rangle$$ où $g \in G$, et où x et $\check{x}$ sont des éléments de E et $\check{E}$.

Proposition 12.- Si π est une représentation parabolique de G, les coefficients de π sont à support compact modulo le centre de G. Si π est irréductible et si le centre Z de G opère par le caractère ω, alors, si f est un coefficient de π :

$$f(zg) = \omega(z)f(g) \quad \text{si } z \in Z, \text{ et } g \in G.$$

Démonstration.- Cf. [19], théorème 2.8.1. et corollaire 2.8.3. pour la première partie de la proposition. La deuxième est claire.

Lemme 5.- <u>Tout homomorphisme continu de Z dans $\mathbb{R}^+$ se prolonge en un homomorphisme continu de G dans $\mathbb{R}^+$.</u>

Démonstration.- Si $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ sont deux groupes commutatifs topologiques, notons $\mathrm{Hom}(\underline{X}, \underline{Y})$ le groupe des homomorphismes continus de $\underline{X}$ dans $\underline{Y}$. Si $\underline{\underline{A}}$ est un groupe algébrique, notons $X(\underline{\underline{A}})$ le groupe des caractères rationnels de $\underline{\underline{A}}$ (à valeurs dans $\bar{K}^\times$).

Soit $D\underline{\underline{G}}$ le groupe dérivé de $\underline{\underline{G}}$ et $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{G}}/D\underline{\underline{G}}$. La restriction à $\underline{\underline{Z}}$ de la projection canonique de $\underline{\underline{G}}$ sur $\underline{\underline{C}}$ est alors une isogénie ([16], exposé 22, théorème 6.2.1). Soit K' une extension galoisienne de K sur laquelle $\underline{\underline{Z}}$ et $\underline{\underline{C}}$ soient déployés. Soit Z' (resp. C') le groupe des points de $\underline{\underline{Z}}$ (resp. $\underline{\underline{C}}$) rationnels sur K'. On a $Z' = \mathrm{Hom}(X(\underline{\underline{Z}}), K'^\times)$. D'où

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(Z', \mathbb{R}^+) &= \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(X(\underline{\underline{Z}}), K'^\times), \mathbb{R}^+) \\ &= X(\underline{\underline{Z}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(K'^\times, \mathbb{R}^+) .\end{aligned}$$

L'ensemble des éléments de valeur absolue 1 est compact dans $K'^\times$, donc tout homomorphisme continu de $K'^\times$ dans $\mathbb{R}^+$ se factorise par la valeur absolue. Il est donc de la forme $x \to |x|_{K'}^s$ où $s \in \mathbb{R}$. Donc $\mathrm{Hom}(K'^\times, \mathbb{R}^+)$ est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathrm{Hom}(Z', \mathbb{R}^+)$ à $X(\underline{\underline{Z}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et de même $\mathrm{Hom}(C', \mathbb{R}^+)$ à $X(\underline{\underline{C}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

L'isogénie de $\underline{\underline{Z}}$ sur $\underline{\underline{C}}$ induit une injection de $X(\underline{\underline{C}})$ dans $X(\underline{\underline{Z}})$. Comme ce sont des modules libres sur $\mathbb{Z}$ de même rang, cette injection induit un isomorphisme d'espaces vectoriels réels de $X(\underline{\underline{C}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ sur $X(\underline{\underline{Z}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Par conséquent, l'application de $\mathrm{Hom}(C', \mathbb{R}^+)$ dans $\mathrm{Hom}(Z', \mathbb{R}^+)$ définie par composition à droite avec l'isogénie de Z' dans C' est un isomorphisme.

Les groupes Z et C sont les invariants dans Z' et C' respectivement du groupe de Galois de K' sur K. Ce sont donc des sous-groupes fermés de Z' et C'. Tout homomorphisme continu de Z dans $\mathbb{R}^+$ se prolonge donc à Z'. Il provient donc d'après ce qu'on vient de voir d'un homomorphisme continu de C' dans $\mathbb{R}^+$. Celui-ci, par restriction à C, donne l'homomorphisme continu de G dans $\mathbb{R}^+$ cherché.

<u>Contragrédiente d'une représentation parabolique</u>.- Si $\underline{\pi}$ est une représentation de G, on note $\overline{\pi}$ la représentation complexe conjuguée. Si $\underline{\chi}$ est un caractère de G, on note $\underline{\pi}\otimes\underline{\chi}$ la représentation de G telle que:

$$\underline{\pi}(g)\underline{\chi}(g) = \underline{\pi}\otimes\underline{\chi}(g) \text{ si } g\in G.$$

Il est clair que si $\underline{\pi}$ est parabolique, il en est de même de $\underline{\pi}\otimes\underline{\chi}$.

Proposition 13 - <u>Soit π une représentation parabolique irréductible de G dans E, telle que sa restriction à Z soit donnée par le caractère ω. Si $\underline{\chi}$ est un caractère réel de G prolongeant la valeur absolue $|\omega|$ de ω, alors $\check{\underline{\pi}}$ est équivalente à $\overline{\underline{\pi}}\otimes\underline{\chi}^{-2}$.</u>

<u>Démonstration</u>.- Il suffit, d'après la proposition 2, de construire une forme d'entrelacement non dégénérée de $\underline{\pi}$ et $\overline{\underline{\pi}}\otimes\underline{\chi}^{-2}$, c'est à dire une forme sesquilinéaire non dégénérée F sur $E\times E$ invariante par $\underline{\pi}$ et $\underline{\pi}\otimes\underline{\chi}^{-2}$. Soit $\check{v}$ un élément non nul de $\check{E}$. On définit la forme F par:

$$F(v_1 , v_2) = \int_{G/Z} \underline{\chi}(g)^{-2} \langle \underline{\pi}(g)v_1 , \check{v} \rangle \overline{\langle \underline{\pi}(g)v_2 , \check{v} \rangle}\, dg \quad \text{si } v_i\in E.$$

Il est clair que la fonction à intégrer est invariante par Z et à support compact modulo Z. On vérifie facilement que

$$F(\underline{\pi}(g)v_1 , \underline{\pi}(g)\underline{\chi}(g)^{-2}v_2) = F(v_1 , v_2) \quad \text{si } g\in G \text{ et } v_i\in E.$$

et que F est définie positive, donc non dégénérée.

IV. 3- Démonstration du théorème 2 pour les représentations paraboliques

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème 2 dans le cas où π est parabolique. Cela résulte immédiatement de la proposition 11 et de la proposition suivante.

Proposition 14.- *Si π est une représentation parabolique irréductible de G et si θ est un caractère de U, on a:*

$$\dim \operatorname{Hom}_G(\lambda_\theta, \pi) = \dim \operatorname{Hom}_G(\lambda_{\bar\theta}, \check{\pi})$$

Démonstration.- Comme $\check{\pi}$ est équivalente à une représentation de la forme $\bar\pi \otimes \chi$ où χ est un caractère de G, il suffit de montrer les isomorphismes suivants:

$$\operatorname{Hom}_G(\lambda_\theta, \pi) \simeq \operatorname{Hom}_G(\lambda_{\bar\theta}, \bar\pi) ,$$
$$\operatorname{Hom}_G(\lambda_{\bar\theta}, \bar\pi) \simeq \operatorname{Hom}_G(\lambda_{\bar\theta}, \bar\pi \otimes \chi) .$$

Le premier isomorphisme est clair si on remarque que $\lambda_{\bar\theta} = \overline{(\lambda_\theta)}$. Le deuxième est celui qui, à $f \in \operatorname{Hom}_G(\lambda_{\bar\theta}, \bar\pi)$, associe l'élément $f_\chi \in \operatorname{Hom}_G(\lambda_{\bar\theta}, \bar\pi \otimes \chi)$ donné par

$$f_\chi(v) = f(v.\chi) \quad \text{si } v \in L_{\bar\theta}$$

et $v.\chi$ est l'élément de $L_{\bar\theta}$ tel que:

$$v.\chi(g) = v(g)\chi(g) \quad \text{si } g \in G.$$

V - Cas général: réduction au cas parabolique

V. 1- Réduction des représentations admissibles aux représentations paraboliques

Théorème 3.- (i) Soit P un sous groupe parabolique de G, V son radical unipotent, M un sous groupe de Lévi et τ une représentation admissible de M regardée comme représentation de P triviale sur V, alors la représentation $\mathrm{Ind}_P^G \tau$ est admissible.

(ii) Soit π une représentation admissible irréductible de G dans E. Alors il existe un sous groupe parabolique $P = MV$ de G et une représentation parabolique irréductible τ de M telle que π soit isomorphe à une représentation de G dans un sous espace de $\mathrm{Ind}_P^G \tau$. On peut de plus choisir P et M tels que $P \supset B$ et $M \supset H$.

Démonstration.- Une démonstration de chacune des deux parties du théorème est donnée dans [1] (lemme 1.7.4. et théorème 2.4.1.).

V. 2- Induction des représentations

Montrons que la situation du théorème 2 se transporte par induction. C'est ce qu'exprime le théorème qui suit.

Soit $P = MV$ un sous groupe parabolique de G tel que $P \supset B$ et $M \supset H$. Soit τ une représentation admissible irréductible de M dans un espace F et π la représentation induite $\pi = \mathrm{Ind}_P^G \tau$ dans l'espace E. On prend pour θ un caractère principal de U et on note λ_θ la représentation induite $\lambda_\theta = \mathrm{Ind}_U^G \theta$ dans l'espace L_θ.

On définit des objets analogues dans M de la manière suivante. Soit w_0 l'élément du groupe de Weyl W de longueur maximale.

On définit le caractère θ_M de $M \cap \bar{w}_0 U \bar{w}_0^{-1}$ par

$$\theta_M(u) = \theta(\bar{w}_0 u \bar{w}_0^{-1}) .$$

Notons $U_M = \bar{w}_0 U \bar{w}_0^{-1} \cap M$ et soit λ'_{θ_M} la représentation induite $\mathrm{Ind}_{U_M}^M \theta_M$, et L'_{θ_M} l'espace de cette représentation.

Théorème 4.- L'espace $\mathrm{Hom}_G(\lambda_\theta, \pi)$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_M(\lambda'_{\theta_M}, \tau)$.

Pour démontrer le théorème 4, nous aurons besoin du lemme suivant .

Lemme 6.- *Soit P un sous-groupe parabolique de G de radical unipotent V, w un élément de W et θ un caractère principal de U. Supposons que*

$$\theta(U \cap \bar{w}V\bar{w}^{-1}) = 1 .$$

Alors on a $U\bar{w}P = U\bar{w}_0P$.

Démonstration.- Le caractère θ est de la forme $\eta \circ \underline{\underline{\Theta}}$ où $\underline{\underline{\Theta}}$ est un caractère rationnel principal de $\underline{\underline{U}}$. Un raisonnement analogue à celui effectué dans la démonstration du corollaire aux propositions 6 et 7 montre alors que l'hypothèse implique $\underline{\underline{\Theta}}(\underline{\underline{U}} \cap \bar{w}\underline{\underline{V}}\bar{w}^{-1}) = \underline{0}$.

Notons $\underline{\underline{R}}(P)$ (resp. $\underline{\underline{R}}(V)$) l'ensemble des racines $\underline{\alpha}$ dans $\underline{\underline{R}}$ telles que $x_\alpha(t) \in \underline{\underline{P}}$ (resp. $x_\alpha(t) \in \underline{\underline{V}}$) pour tout $t \in \bar{K}$. Si $\underline{\alpha} \in S$, on a $\underline{\underline{\Theta}}(x_\alpha(t)) = t$. Si $\underline{\alpha} \in w(\underline{\underline{R}}(V)) \cap S$, on a $x_\alpha(t) \in \underline{\underline{U}} \cap \bar{w}\underline{\underline{V}}\bar{w}^{-1}$, donc $\underline{\underline{\Theta}}(x_\alpha(t)) = 1$. Par conséquent $w(\underline{\underline{R}}(V)) \cap S$ est vide, c'est-à-dire, comme $\underline{\underline{R}}$ est la réunion de $\underline{\underline{R}}(V)$ et de $-\underline{\underline{R}}(P)$,

$$w^{-1}(S) \subset -\underline{\underline{R}}(P).$$

Comme $w_0(S) = -S$, cela implique

$$w^{-1}w_0(S) \subset \underline{\underline{R}}(P).$$

Par conséquent l'automorphisme intérieur de G défini par $\bar{w}^{-1}\bar{w}_0$ envoie B dans P. On en déduit donc (cf. [3], Chap. 4, N° 2, proposition 3) que $\bar{w}^{-1}\bar{w}_0 \in P$, d'où $U\bar{w}P = U\bar{w}_0P$.

Démonstration du théorème 4

Il suffit, d'après la proposition 2, de montrer que l'espace des formes d'entrelacement de λ_θ et de $\check{\pi}$ est isomorphe à l'espace des formes d'entrelacement de λ'_{θ_M} et $\check{\tau}$. Puisque $\check{\pi}$ est isomorphe à $\mathrm{Ind}_P^G \check{\tau}$, une forme d'entrelacement de λ_θ et de $\check{\pi}$ correspond d'après le théorème 1 à une $\check{F}$-distribution T sur G vérifiant:

$$\varepsilon(u) * T * \varepsilon(p^{-1}) = \delta_P(p)^{\frac{1}{2}}\theta(u) T \circ [\check{\tau}(p)] \quad \text{pour tout } u \in U \text{ et tout } p \in P. \tag{V.2.1}$$

On est donc amené à étudier les $\check{F}$-distributions sur les doubles classes $U\bar{w}P$ qui vérifient (V.2.1).

$\check{F}$- distributions sur $U\bar{w}P$.- Soit w un élément de W et soit T une $\check{F}$-distribution sur $U\bar{w}P$ vérifiant (V.2.1).

1ere réduction: distribution $T^{\#}$ sur $U \times P$.

On montre, comme pour le lemme 4 que le groupe $U_w^1 = U \cap \bar{w}P\bar{w}^{-1}$ opère proprement et librement à droite sur $U \times P$ par:

$$(u,\ p).u_1 = (uu_1\ , \bar{w}^{-1} u_1^{-1} \bar{w} p) \quad \text{avec } (u,\ p) \in U \times P \text{ et } u_1 \in U_w^1 .$$

L'application $U \times P \to U\bar{w}P$ définie par $(u,\ p) \to u\bar{w}p$ définit par passage au quotient un homéomorphisme de $(U \times P)/U_w^1$ sur $U\bar{w}P$. On en déduit donc une application, notée $f \to f^b$ de $\underline{S}(U \times P;\check{F})$ dans $\underline{S}(U\bar{w}P;\check{F})$ donnée par:

$$f^b(u\bar{w}p) = \int_{U_w^1} f((u,\ p).u_1)du_1$$

Cette application est surjective, et l'application transposée $T \to T^{\#}$ de $\underline{S}'(U\bar{w}P;\check{F})$ dans $\underline{S}'(U \times P;\check{F})$ est injective:

$$\int_{U\bar{w}P} f^b(x)dT(x) = \int_{U \times P} f(x)dT^{\#}(x) \quad \text{si } f \in \underline{S}(U \times P;F).$$

Il est clair que, pour que T vérifie (V.2.1), il faut et il suffit que $T^{\#}$ soit telle que:

$$\int_{U \times P} f(u_1u,\ pp_1^{-1})dT^{\#}(u,\ p) = \int_{U \times P} \delta_P(p_1)^{\frac{1}{2}}\theta(u_1)\check{\tau}(p_1)f(u,\ p)dT^{\#}(u,\ p)$$

pour tout $f \in \underline{S}(U \times P;\ \check{F})$, tout $u_1 \in U$ et tout $p_1 \in P$.

2e réduction: distribution T_1 sur P.

D'après le corollaire 3 de la proposition 3, on peut écrire $T^{\#}$ sous la forme:

$$T^{\#} = \overline{\theta(u)}\ du \otimes T_1$$

où $T_1 \in \underline{\underline{S}}'(P;\ \check{F})$. De plus T_1 vérifie:

$$T_1 * \underline{\varepsilon}(p^{-1}) = (\underline{\delta}_P(p)^{\frac{1}{2}}) T_1 \circ [\underline{\check{\tau}}(p)] \quad \text{pour tout } p \in P. \tag{V.2.2}$$

Inversement soit donnée une $\check{F}$-distribution T_1 sur P vérifiant(V.2.2). Pour que la distribution $T' = \overline{\underline{\theta}(u)}du \otimes T_1$ soit de la forme $T^{\#}$, il faut et il suffit que T' soit invariante par U_w^1 (Proposition 4). Soit f une fonction décomposée dans $\underline{\underline{S}}(U \times P)$: $f(u,\ p) = f_1(u)f_2(p)$. On a:

$$\int_{U\times P} f(u,\ p)dT'(u,\ p) = \left(\int_U f_1(u)\overline{\underline{\theta}(u)}du\right)\left(\int_P f_2(p)dT_1(p)\right)$$

et d'autre part, si $u_1 \in U_w^1$:

$$\begin{aligned}\int_{U\times P} f(u,\ p)dT'((u,\ p).u_1^{-1}) &= \int_{U\times P} f((u,\ p).u_1)dT'(u,p)\\ &= \int_{U\times P} f_1(uu_1)f_2(\bar{w}^{-1}u_1^{-1}\bar{w}p)dT'(u,\ p)\\ &= (\underline{\theta}(u_1)\int_U f_1(u)\overline{\underline{\theta}(u)}du)\left(\int_P f_2(p)dT_1(\bar{w}^{-1}u_1\bar{w}p)\right)\end{aligned}$$

Par conséquent, pour que T' soit de la forme $T^{\#}$, il faut et il suffit que T_1 vérifie:

$$\underline{\varepsilon}(u) * T_1 = \underline{\theta}(\bar{w}u\bar{w}^{-1})T_1 \quad \text{pour tout } u \in \bar{w}^{-1}U_w^1\bar{w}. \tag{V.2.3}$$

Si, de plus, T_1 vérifie (V.2.2), il est clair que la distribution T telle que $T^{\#} = T_1$ vérifiera (V.2.1). On a donc montré qu'il existe un isomorphisme entre l'espace des distributions T sur $U\bar{w}P$ vérifiant (V.2.1) et l'espace des $\check{F}$-distributions T_1 sur P vérifiant (V.2.2) et(V.2.3).

3e réduction: distribution T_2 sur **M.**

Le groupe P se décompose en un produit: $P = MV$. Si la distribution T_1 sur P vérifie (V.2.2) elle est invariante à droite par V et elle se décompose donc: $T_1 = (\underline{\delta}_P(m))^{-\frac{1}{2}}T_2 \otimes dv$ où $T_2 \in \underline{\underline{S}}'(M;\check{F})$. Etudions d'abord ce que devient sur T_2 la condition (V.2.2). Soit f une fonction décomposée dans $\underline{\underline{S}}(P;\check{F})$:

$$f(mv) = f_1(m)f_2(v) \quad \text{si } m \in M \text{ et } v \in V.$$

Si T_1 vérifie (V.2.2) et si $m_1 \in M$, on a:

$$\begin{aligned}\int_P f(pm_1^{-1})dT_1(p) &= \underline{\delta}_P(m_1)^{\frac{1}{2}}\int_P \underline{\check{\tau}}(m_1)f(p)dT_1(p)\\ &= \underline{\delta}_P(m_1)^{\frac{1}{2}}\int_M \underline{\check{\tau}}(m_1)f_1(m)\underline{\delta}_P(m)^{-\frac{1}{2}}dT_2(m)\int_V f_2(v)dv\end{aligned}$$

D'autre part, on a directement:

$$\int_P f(pm_1^{-1})dT_1(p) = \int_{M\times V} f(mm_1^{-1}m_1vm_1^{-1})\underline{\delta}_P(m)^{-\frac{1}{2}}dT_2(m)dv$$
$$= \int_M f_1(mm_1^{-1})\underline{\delta}_P(m)^{-\frac{1}{2}}dT_2(m)\int_V f_2(m_1vm_1^{-1})dv$$
$$= \underline{\delta}_P(m_1)^{-\frac{1}{2}}\left(\int_M f_1(m)\underline{\delta}_P(m)^{-\frac{1}{2}}dT_2(mm_1)\right)\left(\underline{\delta}_P(m_1)\int_V f_2(v)dv\right)$$

puisque $d(m_1^{-1}vm_1) = \underline{\delta}_P(m_1)dv$. Par conséquent, pour que T_1 vérifie (V.2.2), il faut et il suffit que T_2 vérifie:

(V.2.4) $$T_2 * \underline{\varepsilon}(m_1^{-1}) = T_2 \cdot [\tilde{\underline{\tau}}(m_1)] \quad \text{pour tout } m_1 \in M.$$

Etudions maintenant ce que devient sur T_2 la condition (V.2.3). Le groupe $\bar{w}^{-1}U_w^1\bar{w}$ est égal à $\bar{w}^{-1}U\bar{w}\cap P$.

On peut décomposer $\bar{w}^{-1}U_w^1\bar{w}$ en produit:

$$\bar{w}^{-1}U_w^1\bar{w} = (\bar{w}^{-1}U\bar{w}\cap M)(\bar{w}^{-1}U\bar{w}\cap V) .$$

Si $f\in \underline{S}(P;\check{F})$, on a, d'après (V.2.3):

(V.2.5) $$\int_P f(up)dT_1(p) = \underline{\theta}(\bar{w}u\bar{w}^{-1})\int_P f(p)dT_1(p) \quad \text{si } u\in \bar{w}^{-1}U_w^1\bar{w}.$$

D'autre part, si on exprime T_1 en fonction de T_2 :

$$\int_P f(up)dT_1(p) = \int_{M\times V} f(umv)\underline{\delta}_P(m)^{-\frac{1}{2}}dT_2(m)dv .$$

Supposons d'abord que $u\in \bar{w}^{-1}U\bar{w}\cap M$. On obtient alors, après un changement de variable dans cette dernière formule:

(V.2.6) $$\int_P f(up)\ dT_1(p) = \int_{M\times V} f(mv)\underline{\delta}_P(m)^{-\frac{1}{2}}dT_2(u^{-1}m)dv .$$

En comparant (V.2.5) et (V.2.6), on déduit que si T_1 vérifie (V.2.3), alors T_2 vérifie:

(V.2.7) $$\underline{\varepsilon}(u) * T_2 = \underline{\theta}(\bar{w}u\bar{w}^{-1})T_2 \quad \text{pour tout } u\in M\cap \bar{w}^{-1}U\bar{w}.$$

Supposons maintenant que $u\in \bar{w}^{-1}U\bar{w}\cap V$. On obtient alors:

$$\int_P f(up)dT_1(p) = \int_{M\times V} f(mm^{-1}umv)\underline{\delta}_P(m)^{-\frac{1}{2}}dT_2(m)dv$$

On obtient par conséquent le résultat suivant.

Si $U\bar{w}P \neq U\bar{w}_oP$, alors toute distribution T sur $U\bar{w}P$ vérifiant (V.2.1) est nulle. Si $U\bar{w}P = U\bar{w}_oP$, alors l'espace des distributions T sur $U\bar{w}_oP$ vérifiant (V.2.1) est isomorphe à l'espace des $\check{F}$-distributions sur M vérifiant (V.2.4) et (V.2.7), c'est à dire:

$$\underline{\varepsilon}(u) * T_2 * \underline{\varepsilon}(m^{-1}) = \underline{\theta}(\bar{w}_o u \bar{w}_o^{-1}) T_2 \circ [\underline{\check{\tau}}(m)] \text{ pour tout } u \in M \cap \bar{w}_o^{-1} U \bar{w}_o$$

et pour tout $m \in M$. D'après le théorème 1, cet espace est isomorphe à l'espace des formes d'entrelacement de $\mathrm{Ind}_{U_M}^M \underline{\theta}_M = \underline{\lambda}'_{\underline{\theta}_M}$ et de $\mathrm{Ind}_M^M \underline{\check{\tau}}$ (qui est équivalente à $\underline{\check{\tau}}$), donc à l'espace $\mathrm{Hom}_M(\underline{\lambda}'_{\underline{\theta}_M}, \underline{\tau})$.

<u>L'espace des $\check{F}$-distributions sur G vérifiant (V.2.1).</u>

Montrons d'abord que l'application qui, à une $\check{F}$-distribution sur G vérifiant (V.2.1) fait correspondre sa restriction à l'ouvert $U\bar{w}_oP$ est injective. Le groupe G se décompose en réunion disjointe:

$$G = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant l} U\bar{w}_i P$$

et on peut indexer les $\bar{w}_i$ de telle sorte que chaque $U\bar{w}_iP$ soit ouvert dans la réunion: $\bigcup_{i \leqslant j \leqslant l} U w_j P$. Soit T une $\check{F}$-distribution sur G vérifiant (V.2.1) et supposons que sa restriction à $U\bar{w}_oP$ soit nulle. Supposons $T \neq \underline{0}$ et soit i le plus grand indice tel que le support de T soit contenu dans la réunion $\bigcup_{i \leqslant j \leqslant l} U\bar{w}_jP$. Alors T est une distribution sur $\bigcup_{i \leqslant j \leqslant l} U\bar{w}_jP$. Sa restriction à l'ouvert $U\bar{w}_iP$ vérifie (V.2.1). Elle est donc nulle d'après ce qui précède, et donc le support de T est contenu dans $\bigcup_{i+1 \leqslant j \leqslant l} U\bar{w}_jP$, d'où une contradiction, ce qui prouve que T est nulle.

Montrons maintenant que toute $\check{F}$-distribution sur $U\bar{w}_oP$ vérifiant (V.2.1) est la restriction d'une $\check{F}$-distribution sur G vérifiant (V.2.1). Autrement dit, si T est une forme linéaire sur $\underline{\underline{S}}(U\bar{w}_oP;\check{F})$ vérifiant (V.2.1), montrons que T se prolonge en une forme linéaire sur $\underline{\underline{S}}(G;\check{F})$ vérifiant encore (V.2.1). Pour cela, exprimons la relation (V.2.1) sous une forme différente. Soit X une partie de G stable à gauche par U et à droite par P. La condition (V.2.1) appliquée à une $\check{F}$-distribution sur X exprime que:

$$\int_X (f(uxp^{-1}) - \underline{\delta}_P(p)^{\frac{1}{2}}\underline{\theta}(u)\underline{\check{\tau}}(p)f(x))dT(x) = 0 \quad \text{pour tout } f\in\underline{\underline{S}}(X;\check{F}),\ u\in U \text{ et } p\in P.$$

C'est à dire que la forme linéaire T sur $\underline{\underline{S}}(X;\check{F})$ est nulle sur le sous espace $\underline{\underline{S}}_*(X;\check{F})$ de $\underline{\underline{S}}(X;\check{F})$ engendré par les éléments de la forme:

$$x \to f(uxp^{-1}) - \underline{\delta}_P(p)^{\frac{1}{2}}\underline{\theta}(u)\underline{\check{\tau}}(p)f(x) \quad \text{avec } f\in\underline{\underline{S}}(X;\check{F}),\ u\in U, \text{ et } p\in P.$$

Pour montrer que la forme linéaire T sur $\underline{\underline{S}}(U\bar{w}_oP;\check{F})$, nulle sur $\underline{\underline{S}}_*(U\bar{w}_oP;\check{F})$, se prolonge en une forme linéaire T sur $\underline{\underline{S}}(G;\check{F})$ nulle sur $\underline{\underline{S}}_*(G;\check{F})$, il suffit de montrer que tout élément de $\underline{\underline{S}}_*(G;\check{F})$ qui est dans $\underline{\underline{S}}(U\bar{w}_oP;\check{F})$ annule T. Nous allons pour cela montrer l'inclusion suivante:

$$\underline{\underline{S}}_*(G;\check{F}) \cap \underline{\underline{S}}(U\bar{w}_oP;\check{F}) \subset \underline{\underline{S}}_*(U\bar{w}_oP;\check{F})$$

Soit $f\in\underline{\underline{S}}_*(G;\check{F})\cap\underline{\underline{S}}(U\bar{w}_oP;\check{F})$. La fonction f est donc de la forme:

$$f(g) = \sum_i c_i(f_i(u_igp_i^{-1}) - \underline{\delta}_P(p_i)^{\frac{1}{2}}\underline{\theta}(u_i)\underline{\check{\tau}}(p_i)f_i(g))$$

avec $f_i\in\underline{\underline{S}}(G;\check{F})$, $u_i\in U$, $p_i\in P$, et $c_i\in\mathbb{C}$, l'indice i prenant un nombre fini de valeurs. De plus le support de f est un compact contenu dans $U\bar{w}_oP$. Il existe donc un sous-groupe compact ouvert U_o de U tel que:

- $u_i\in U_o$ pour tout i,
- Supp f $\subset U_o\bar{w}_oP$

Comme l'application de $U\times P$ dans $U\bar{w}_oP$ qui, à (u, p), fait correspondre $u\bar{w}_op$ est ouverte, $U_o\bar{w}_oP$ est ouvert dans $U\bar{w}_oP$ donc dans G. De plus, comme U_o est un sous-groupe compact de G et P un sous-groupe fermé, on en déduit que $U_o\bar{w}_oP$ est fermé dans G, et donc aussi dans $U\bar{w}_oP$. Soit alors f_i' la fonction sur G égale à f_i sur $U_o\bar{w}_oP$ et nulle ailleurs. Comme $U_o\bar{w}_oP$ est ouvert et fermé dans $U\bar{w}_oP$, f_i' est localement constante sur $U\bar{w}_oP$; le support de f_i' est l'intersection du support de f_i avec $U_o\bar{w}_oP$, c'est donc un compact contenu dans $U\bar{w}_oP$. Par conséquent f_i' est un élément de $\underline{\underline{S}}(U\bar{w}_oP;\check{F})$. Soit f' la fonction sur G donnée par:

$$f'(g) = \sum_i c_i(f_i'(u_igp_i^{-1}) - \underline{\delta}_P(p_i)^{\frac{1}{2}}\underline{\theta}(u_i)\underline{\check{\tau}}(p_i)f_i'(g)) \ .$$

Si $g\notin U_o\bar{w}_oP$, on a: $f'(g) = 0 = f(g)$.

Si $g\in U_o\bar{w}_oP$, on a $u_ig\,p_i^{-1}\in U_o\bar{w}_oP$ et donc $f'(g) = f(g)$.

On a par conséquent: $f = f'\in\underline{\underline{S}}_*(U\bar{w}_oP;\check{F})$ et l'inclusion est donc démontrée.

L'application qui, à une $\check{F}$-distribution T sur G fait correspondre sa restriction à $U\bar{w}_oP$ définit donc un isomorphisme de l'espace des $\check{F}$-distributions sur G vérifiant (V.2.1) sur l'espace des $\check{F}$-distributions sur $Uw_0^{-1}P$ vérifiant (V.2.1), espace qui est lui-même isomorphe d'après la première partie de la démonstration à $\mathrm{Hom}_M(\underline{\lambda'_{\theta}}_M, \underline{\tau})$ et le théorème est donc démontré.

V. 3- Fin de la démonstration du théorème 2

Soit $\underline{\pi}$ une représentation admissible irréductible de G dans l'espace E. D'après le théorème 3, il existe un sous groupe parabolique $P = MV$ de G avec $P \supset B$ et $M \supset H$ et une représentation parabolique irréductible $\underline{\tau}$ de M tels que $\underline{\pi}$ soit isomorphe à une sous-représentation de $\mathrm{Ind}_P^G \underline{\tau}$. On a donc

$$\dim \mathrm{Hom}_G(\underline{\lambda_\theta}, \underline{\pi}) \leqslant \dim \mathrm{Hom}_G(\underline{\lambda_\theta}, \mathrm{Ind}_P^G \underline{\tau}).$$

D'après le théorème 4, on a:

$$\dim \mathrm{Hom}_G(\underline{\lambda_\theta}, \mathrm{Ind}_P^G \underline{\tau}) = \dim \mathrm{Hom}_M(\underline{\lambda'_{\theta}}_M, \underline{\tau})$$

Enfin, comme $\underline{\tau}$ est parabolique:

$$\dim \mathrm{Hom}_M(\underline{\lambda'_{\theta}}_M, \underline{\tau}) \leqslant 1$$

Par conséquent: $\dim \mathrm{Hom}_G(\underline{\lambda_\theta}, \underline{\pi}) \leqslant 1.$

Maintenant, supposons que σ soit irréductible. D'après un résultat de W. Casselmann et Harish-Chandra (cf. [15], voir aussi [14]), on sait que π admet une suite de Jordan-Hölder. On a alors le résultat suivant.

Théorème 7.- *Supposons que σ soit une représentation admissible irréductible de M.*

(i) *Si σ admet un modèle de Whittaker par rapport à θ_M, alors parmi les sous-quotients irréductibles qui interviennent dans une suite de Jordan-Hölder de π, un seul admet un modèle de Whittaker par rapport à θ et il intervient avec multiplicité 1 dans la suite de Jordan-Hölder.*

(ii) *Si σ n'admet pas de modèle de Whittaker par rapport à θ_M, alors aucun sous-quotient de π n'admet de modèle de Whittaker par rapport à θ.*

Prenons en particulier P = B et prenons pour σ le caractère $\delta_B^{+\frac{1}{2}}$ de B. Alors la représentation $\pi = \mathrm{Ind}_B^G \delta_B^{+\frac{1}{2}}$ admet comme quotient irréductible la représentation de Steinberg St de G (cf. [15]).

Théorème 8.- *Si θ est un caractère principal de U, alors la représentation de Steinberg admet un modèle de Whittaker par rapport à θ.*

La démonstration des théorèmes 7 et 8 repose sur le lemme suivant.

Lemme 7.- *Soit $0 \to \pi_1 \to \pi \to \pi_2 \to 0$ une suite exacte de représentations algébriques de G et soit θ un caractère principal de U. On a*

$$\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, r_\theta) = \dim \mathrm{Hom}_G(\pi_1, r_\theta) + \dim \mathrm{Hom}_G(\pi_2, r_\theta).$$

Références

1 A. Borel et al.: Seminar on algebraic groups and related finite groups. Lecture Notes in Math. N° 131. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1970.

2 N. Bourbaki: Intégration, Chapitres 7 et 8. Paris: Hermann 1963.

3 N. Bourbaki: Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6. Paris: Hermann 1968.

4 F. Bruhat: Sur les représentations induites des groupes de Lie. Bull. Soc. Math. France 84, pp. 97 à 205 (1956).

5 F. Bruhat: Distributions sur un groupe localement compact. Bull. Soc. Math. France 89, pp. 43 à 75 (1961).

6 I. M. Gelfand et M. I. Graev: Construction de représentations irréductibles des groupes semi-simples sur un corps fini (en russe). Dokl. Akad. Nauk SSSR 147, pp. 529 à 532 (1962).

7 I. M. Gelfand et D. A. Kajdan: Representations of the group GL(n, K) where K is a local field. In Lie groups and their representations, pp. 95 à 118. Londres: John Wiley and Sons 1975.

8 Harish-Chandra: Harmonic analysis on reductive p-adic groups, notes by G. Van Dijk. Lecture Notes in Math. N° 162. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1970.

9 Harish-Chandra: Harmonic analysis on reductive p-adic groups. In Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces, Proc. Sympos. Pure Math. 26, pp. 167 à 192. Providence (R. I.): Amer. Math. Soc. 1973.

10 H. Jacquet et R. P. Langlands: Automorphic forms on GL(2). Lecture Notes in Math. N° 114. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1970.

11 D. Montgomery et L. Zippin: Topological transformation groups. New York: Interscience Publishers 1955.

12 R. Steinberg: Lectures on Chevalley groups. Yale University 1967.

13 A. Borel et J. Tits: Groupes réductifs. Publ. Math. I. H. E. S. N° 27, pp. 55 à 151 (1965).

14 I. N. Bernstein et A. V. Zelevinskii: Induced representations of reductive p-adic groups I.Ann. Scient. Ec. Norm? Sup., 4e série, t. 10, pp. 441 à 472 (1977).

15 W. Casselman : Some general results in the theory of admissible representations of p-adic reductive groups (à paraître).

16 M. Demazure et A. Grothendieck: Structure des schémas en groupes réductifs (SGA 3, t. III). Lecture Notes in Math. N° 153. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1970.

17 F. Rodier: Whittaker models for admissible representations of reductive p-adic split groups. In Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces, Proc. Sympos. Pure Math. 26, pp. 425 à 430. Providence (R. I.): Amer. Math. Soc. 1973.

18 J. A. Shalika: The multiplicity one theorem for GL(n). Annals of Math. 100, pp; 171 à 193 (1974).

19 A. J. Silberger: Introduction to harmonic analysis on reductive p-adic groups. Princeton (N. J.): Princeton University Press 1979.

20 J. Tits: Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples. Publ. Math. I. H. E. S. N° 31, pp. 21 à 58 (1966).