

Marche aléatoire en milieu aléatoire

Rémi Peyre - Hendrik Weber
encadrés par Thierry Bodineau

17 juin 2005

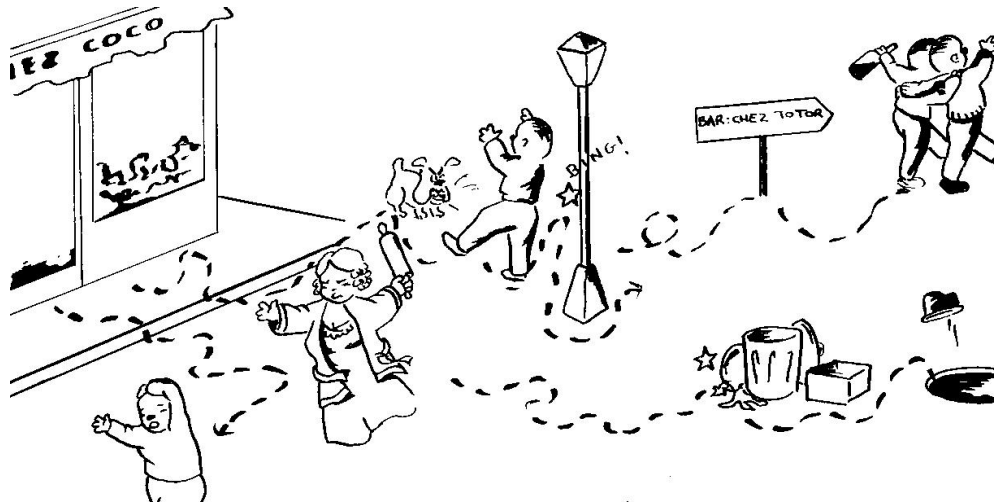


Table des matières

1	Généralités	3
1.1	Présentation	3
1.2	Cadre de notre étude	4
1.3	Notion de système ergodique	5
2	Récurrence et transience	9
2.1	Énoncé du théorème	9
2.2	Démonstration	9
3	Vitesse de dérive	13
3.1	Énoncé du théorème	13
3.2	Démonstration	14
4	Chaînes auxiliaires	18
4.1	Chaînes auxiliaires	18
4.2	Preuve alternative du théorème 8	24
5	Comparaison avec les marches aléatoires simples	26
5.1	Différence conceptuelle	26
5.2	Comparaison des théorèmes	28
5.3	Une interprétation : notion de puits	28
5.3.1	Profil de potentiel	28
5.3.2	Effet des puits	29
5.3.3	La mesure \bar{Q}	30
5.3.4	Cas transitoire à vitesse nulle	30
5.3.5	Approche heuristique du théorème 8	30
5.4	Exemples numériques	31
5.4.1	Vitesse dans un milieu simple	31
5.4.2	Le cas à vitesse nulle	32
5.4.3	Le cas récurrent	34

Chapitre 1

Généralités

1.1 Présentation

Qu'est-ce qu'une marche aléatoire? Physiquement, cela correspond au déplacement aléatoire d'un mobile dans un certain milieu, par exemple un grain de pollen dans une goutte d'eau. À un instant donné, le mobile a une certaine probabilité de se déplacer dans chaque direction, et on s'intéresse aux propriétés de son mouvement global. Parfois, le déplacement du mobile entre deux instants dépend du point où il se trouve : ainsi, au cours d'un processus de diffusion, la diffusion d'un électron dans un cristal semiconducteur par exemple, l'électron a plus de chances de rester immobile entre deux instants lorsqu'il se trouve près d'un défaut électrophile du cristal que dans le cas contraire. On a alors une marche aléatoire dans un milieu irrégulier. Mais pour le physicien, il est absurde de chercher à décrire parfaitement le milieu : imagine-t-on ce que donnerait la description complète du café contenu dans un percolateur pour y étudier le mouvement des gouttes d'eau! En fait, on se contente de donner les caractéristiques statistiques du milieu, et tout se passe comme si le milieu était choisi au hasard parmi un ensemble de milieux possédant les mêmes propriétés statistiques. Ce qui nous amène tout naturellement au concept de marche aléatoire en milieu aléatoire (MAMA).

Pour le mathématicien, une MAMA se construit ainsi : on choisit d'abord un cadre général pour la marche, un graphe qui représente l'espace dans lequel le mobile va évoluer (pour modéliser l'évolution d'un mobile dans l'espace à trois dimensions, par exemple, ce réseau pourra être \mathbb{Z}^3 , où les arêtes seront les (x, y) tels que $\|x - y\|_1 \leq 1$). Ensuite, on va définir un *milieu* en donnant, pour chaque sommet du graphe, une certaine loi définissant la probabilité de passer sur chacun des sommets qui lui sont connectés. Mais ce milieu n'est pas fixé une fois pour toutes : en fait, il obéit à une certaine distribution aléatoire P que le mathématicien choisit. Lors du déclenchement d'une MAMA, on commence par tirer au sort le milieu conformément à la mesure P , puis on laisse évoluer le mobile dans le milieu ainsi fixé¹, selon une chaîne de Markov.

¹ Attention! Une fois que le milieu a été choisi, il reste le même tout au long du déplacement du mobile. Si on retirait au sort le milieu à chaque étape, on se retrouverait avec une marche aléatoire simple, cf remarque 10.

1.2 Cadre de notre étude

On peut définir une MAMA de manière très générale, de façon à se rapprocher le plus possible des cas rencontrés en physique. Mais le traitement mathématique des marches devient alors difficile. Citons deux exemples :

- Quand on raisonne à deux ou trois dimensions, le comportement du mobile à l’infini est très compliqué à prévoir à cause de la possibilité qu’il a de contourner certains points ou groupes de points qui auraient tendance à lui imposer un certain comportement (par exemple, à l’immobiliser). Il existe ainsi des cas où le mobile a une probabilité non nulle de partir à l’infini dans deux directions opposées.
- Un autre problème peut être dû au couplage entre points voisins : on peut, par exemple, imaginer un milieu à une dimension où les points qui ont tendance à envoyer le mobile vers la gauche ont une probabilité plus grande que les autres d’être entourés de points ayant tendance à envoyer le mobile vers la droite. Il est alors possible d’utiliser la théorie des systèmes ergodiques pour traiter les cas où le couplage est nul à l’infini, mais c’est au prix d’une certaine complexité mathématique.

Finalement, nous nous restreindrons au cas particulier suivant :

Le mobile se déplace dans le graphe \mathbb{Z} , où chaque point est connecté à ses deux voisins ainsi qu’à lui-même. Un *milieu* ω est défini en donnant pour chaque point z des probabilités respectives ω_z^- , ω_z^0 et ω_z^+ d’envoyer le mobile à gauche, de le laisser immobile ou de l’envoyer à droite. On doit évidemment avoir $\omega_z^- + \omega_z^0 + \omega_z^+ = 1$, et le triplet $(\omega_z^-, \omega_z^0, \omega_z^+)$ est appelé *loi de transition en z* . On utilisera aussi la notation $\omega_z(y)$ pour désigner la probabilité qu’a le mobile de sauter de z vers y . Si on note $\mathcal{M}_1(N_z)$ l’ensemble des lois de transition possibles en z , un milieu peut donc être considéré comme un élément de $\Omega \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{z \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_1(N_z)$.

La topologie vague sur $\mathcal{M}_1(N_z)$ est la même qu’en tant que sous-ensemble de \mathbb{R}^3 . On munit Ω de la topologie produit, c’est-à-dire la topologie dont les ensembles de la forme

$$\prod_{z < z^-} \mathcal{M}_1(N_z) \times \prod_{z = z^-}^{z^+} \mathcal{O}_z \times \prod_{z > z^+} \mathcal{M}_1(N_z)$$

avec \mathcal{O}_z ouvert de $\mathcal{M}_1(N_z)$ forment une base d’ouverts. Comme chaque $\mathcal{M}_1(N_z)$ est compact Ω l’est aussi. En particulier Ω est un espace polonais. On munit Ω de sa tribu borélienne \mathcal{F} .

Reste à définir une probabilité P sur Ω pour représenter la façon dont le milieu est tiré au sort. Dans tout cet exposé, nous ne considérons sur Ω que des probabilités telles que

Hypothèse 1. Les ω_z sont indépendants et de même loi.

La loi de P est alors entièrement déterminée par la loi de ω_0 .

Pour tout milieu $\omega \in \Omega$, on appelle *marche aléatoire dans le milieu ω* la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrice de transition $Q(z, y) = \omega_z(y)$. Lorsqu’on

²Ce qui donne $\omega(z, y) = \omega_z^-$, resp. ω_z^0 , resp. ω_z^+ si $y = z - 1$, resp. $y = z$, resp. $y = z + 1$, et $\omega(z, y) = 0$ sinon.

prend la chaîne de Markov partant du point v , la loi de la marche est notée P_ω^v : il s'agit d'une mesure de probabilité sur $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{G})$, où \mathcal{G} est la plus petite tribu sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ rendant mesurables les fonctions coordonnées. On a donc $P_\omega^v(X_0 = v) = 1$ et $P_\omega^v(X_{n+1} = y | X_n = z) = \omega_z(y)$. On dit que $P_\omega^v(\cdot)$ est la loi *particulière* de la marche aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, car elle fait référence à un milieu particulier. Lorsqu'on tient compte des variations possibles du milieu, on introduit la loi sur $(\Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F} \times \mathcal{G})$ notée $\mathbb{P}^v(\cdot)$ et définie par $\mathbb{P}^v = P \otimes P_\omega^v$, c.à.d. pour $F \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{G}$:

$$\mathbb{P}^v(F \times G) = \int_F P_\omega^v(G) P(d\omega)$$

(noter que $\omega \rightarrow P_\omega^v(G)$ est mesurable).

La loi *générale* de la marche aléatoire est alors la loi marginale de cette loi sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. On la note également \mathbb{P}^v :

$$\mathbb{P}^v(G) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{P}^v(\Omega \times G) = \int_\Omega P_\omega^v(G) P(d\omega)$$

Cette loi exprime ce qu'il arrive à la marche aléatoire quand on ne sait pas à quel milieu on a affaire.

Remarque 1. Dire qu'une propriété de la marche est vraie \mathbb{P}^v -p.s., c'est donc dire qu'elle est vraie P_ω^v -p.s., pour P -presque tout milieu ω .

Notre travail va consister à trouver certaines propriétés de la MAMA relativement à la loi \mathbb{P}^0 , en fonction de la probabilité P sur Ω .

1.3 Notion de système ergodique

Nous aurons à plusieurs reprises besoin d'utiliser la théorie des systèmes ergodiques, en particulier le théorème ergodique de Birkhoff.

Définition 1. Soit (Ω, \mathcal{T}, P) un espace de probabilité, et $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ mesurable. On dit que φ *préserve la mesure* si, pour tout A dans \mathcal{T} , on a $P(\varphi^{-1}A) = P(A)$. On dit qu'un événement A est *invariant* pour φ si $\varphi^{-1}A = A$ P -p.p.. On dit enfin que le système $(\Omega, \mathcal{T}, P, \varphi)$ est *ergodique* si φ préserve la mesure et si tout événement φ -invariant a pour probabilité 0 ou 1.

Proposition 1. Pour $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ mesurable, l'ensemble \mathcal{I} des événements φ -invariants est une sous-tribu de \mathcal{T} .

Démonstration. La démonstration à partir des définitions d'une tribu ne soulève aucune difficulté □

On a alors le théorème classique suivant, que nous rappelons sans démonstration :

Théorème 2 (Birkhoff). Soit Ω un espace de probabilité, $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ préservant la mesure, et $X \in L^1(\Omega)$. Alors

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} X(\varphi^m(\omega)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[X|\mathcal{I}](\omega), \text{ p.s. et dans } L^1.$$

En particulier, si φ est ergodique, la tribu \mathcal{I} est grossière, et donc $E[X|\mathcal{I}]$ est constante, égale à $E[X]$.

Définition 2. Soit (Ω, \mathcal{T}, P) un espace de probabilité, et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans un espace mesurable (E, \mathcal{U}) . $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une variable aléatoire sur Ω , à valeurs dans l'espace mesurable $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{U}')$, où \mathcal{U}' est la tribu produit. Notons P' sa loi.

Soit θ l'opérateur de décalage sur $E^{\mathbb{N}}$, c.à.d. l'application $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}} \mapsto (Y_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *stationnaire* si θ préserve la mesure P' , et *ergodique* si en outre, le système $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{U}', P', \theta)$ est ergodique.

Un premier intérêt de la notion d'ergodicité dans notre étude est la propriété suivante :

Théorème 3. Notant $\theta : \begin{cases} \Omega \rightarrow \Omega \\ (\omega_z)_{z \in \mathbb{Z}} \mapsto (\omega_{z+1})_{z \in \mathbb{Z}} \end{cases}$ l'opérateur de décalage sur les milieux, $(\Omega, \mathcal{F}, P, \theta)$ est un système ergodique.

Remarque 2. Par symétrie, $(\Omega, \mathcal{F}, P, \theta^{-1})$ est aussi un système ergodique.

Démonstration. D'abord, θ préserve la mesure. En effet, on vérifie immédiatement que $\{A \in \mathcal{F}; P(\theta^{-1}A) = P(A)\}$ est une tribu, et cette tribu contient tous les ensembles de la forme $\{\omega; \omega_z \in A\}$ pour $z \in \mathbb{Z}$, $A \subset M_1(N_z)$ mesurable : en effet, $\theta^{-1}(\{\omega; \omega_z \in A\}) = \{\omega; \omega_{z+1} \in A\}$ et les ω_z sont indépendants et de même loi. Comme ces ensembles engendrent \mathcal{F} par définition, P préserve la mesure.

Passons maintenant à l'ergodicité proprement dite. En fait, on va montrer que θ est un opérateur *mélangeant*, i.e. :

Lemme 4. Soient $A, B \in \mathcal{F}$ des événements mesurables de Ω . Alors

$$P(A \cap \theta^{-j}B) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} P(A)P(B)$$

Démonstration. Commençons par le cas où A et B sont des *cylindres*, c.à.d. des événements de la forme $\{\omega; (\omega_{z_1}, \omega_{z_2}, \dots, \omega_{z_n}) \in Y\}$, où Y est une partie mesurable de $\prod_{i=1}^n M_1(N_{z_i})$. Écrivons ainsi

$$\begin{aligned} A &= \{\omega; (\omega_{z_1}, \omega_{z_2}, \dots, \omega_{z_n}) \in Y\} \\ B &= \{\omega; (\omega_{z'_1}, \omega_{z'_2}, \dots, \omega_{z'_m}) \in Z\} \end{aligned}$$

avec $z_1 < z_2 < \dots < z_n$, resp. $z'_1 < \dots < z'_m$. Il est clair que l'événement $\theta^{-j}B$ est $\{\omega; (\omega_{z'_1+j}, \omega_{z'_2+j}, \dots, \omega_{z'_m+j}) \in Z\}$. Pour $j > z_n - z'_1$, $\theta^{-j}B$ est donc dans $\sigma(\omega_{z'_1+j}, \dots, \omega_{z'_m+j})$, tandis que A est dans $\sigma(\omega_{z_1}, \dots, \omega_{z_n})$. Comme $\{z'_1+j, z'_2+j, \dots, z'_m+j\}$ et $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ sont disjoints et que les ω_z sont indépendants, ces tribus sont indépendantes, et donc

$$P(A \cap \theta^{-j}B) = P(A)P(\theta^{-j}B) = P(A)P(B)$$

puisque θ préserve la mesure. D'où le résultat pour les cylindres.

Nous allons généraliser le résultat à A et B quelconques, *via* le lemme suivant :

Lemme 5. Soit $A \in \mathcal{F}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un cylindre C tel que $P(A \Delta C) \leq \varepsilon$, où Δ note la différence symétrique.

Remarque 3. Ce lemme exprime que tout ensemble mesurable de Ω peut être approché d'aussi près qu'on veut par un cylindre.

Démonstration. Notons \mathcal{C} l'ensemble des cylindres. Le résultat est trivial pour $A \in \mathcal{C}$. Comme les cylindres engendrent \mathcal{F} , il suffit de montrer que $\{A \in \mathcal{F}; (\exists C \in \mathcal{C})(P(A \Delta C) \leq \varepsilon)\}$ est une tribu. Or c'est bien le cas, en effet :

- \emptyset est un cylindre, donc on peut l'approcher d'aussi près qu'on veut par lui-même.
- Si A est approché à ε près par le cylindre C , alors A^c est approché à ε près par C^c , puisque $A^c \Delta C^c = A \Delta C$. Comme C^c est aussi un cylindre, l'ensemble auquel on s'intéresse est stable par passage au complémentaire.
- Si A est approché à $\varepsilon/2$ près par C , et si B est approché à $\varepsilon/2$ près par C' , alors $A \cup B$ est approché à ε près par $C \cup C'$ (qui est bien un cylindre) : en effet, $(A \cup B) \Delta (C \cup C') \subset (A \Delta C) \cup (B \Delta C')$.
- Enfin, supposons $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$, où les A_i peuvent être approchés d'aussi près qu'on veut par des cylindres, et montrons que $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$ est dans le même cas. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $P(A_i) \nearrow_{i \rightarrow \infty} P(A)$, on peut trouver un i_0 tel que $P(A) - P(A_{i_0}) = P(A \setminus A_{i_0}) = P(A \Delta A_{i_0}) \leq \varepsilon/2$. Soit alors C un cylindre approchant A_{i_0} à $\varepsilon/2$ près : on a $A \Delta C \subset (A \Delta A_{i_0}) \cup (A_{i_0} \Delta C)$, d'où $P(A \Delta C) \leq \varepsilon$, ce qu'on voulait

□

fin du lemme 5

Montrons maintenant la propriété de mélange pour A et B quelconques : soient $A, B \in \mathcal{F}$, et soit $\varepsilon > 0$. Soient $A', B' \in \mathcal{C}$ avec $P(A \Delta A') \leq \varepsilon$, resp. $P(B \Delta B') \leq \varepsilon$. On a

$$P(\theta^{-n}B \Delta \theta^{-n}B') = P(\theta^{-n}(B \Delta B')) \leq \varepsilon$$

puisque θ préserve la mesure, d'où

$$P((A \cap \theta^{-n}B) \Delta (A' \cap \theta^{-n}B')) \leq 2\varepsilon$$

et donc

$$|P(A \cap \theta^{-n}B) - P(A' \cap \theta^{-n}B')| \leq 2\varepsilon$$

Or, comme A' et $\theta^{-n}B'$ sont des cylindres,

$$P(A' \cap \theta^{-n}B') \rightarrow_{n \rightarrow \infty} P(A')P(B')$$

et comme

$$|P(A')P(B') - P(A)P(B)| \leq 2\varepsilon + \varepsilon^2$$

on a finalement

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |P(A \cap \theta^{-n}B) - P(A)P(B)| \leq 4\varepsilon + \varepsilon^2$$

ε pouvant être pris aussi petit qu'on veut, le lemme 4 s'ensuit

□

fin du lemme 4

Pour finir, la propriété d'ergodicité découle facilement de la propriété de mélange : soit $B \in \mathcal{F}$ avec $\theta^{-1}B = B$. Alors pour tout $A \in \mathcal{F}$,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(A \cap \theta^{-n}B = A \cap B)$$

et donc

$$P(A \cap \theta^{-n}B) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} P(A \cap B) \\ P(A)P(B) \end{cases} \text{ par la propriété de mélange de } \theta$$

d'où $P(A \cap B) = P(A)P(B)$: B est indépendant de tous les éléments de \mathcal{F} , donc en particulier de lui-même : il est trivial \square

Chapitre 2

Réurrence et transience

2.1 Énoncé du théorème

Le but de ce chapitre est de déterminer dans quelle direction part la MAMA à l'infini. Pour éviter d'avoir à traiter le cas de points qui arrêtent la marche, on fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2. $P(\omega_0^0 = 1) = 0$.

Cette hypothèse signifie que, P -p.s., aucun point ne fixe la marche aléatoire sur lui : en effet, c'est ce que cela signifie *stricto sensu* pour le point 0, mais comme les probabilités de transition ont la même loi en tous les points c'est vrai pour tous les points, et par réunion dénombrable pour tous les points à la fois.

Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème 6. Notons, pour $z \in \mathbb{Z}$, $\rho_z = \frac{\omega_z^-}{\omega_z^+}$, et supposons qu'on puisse définir $E_P(\ln \rho_0)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors :

- Si $E_P(\ln \rho_0) < 0$ alors $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ \mathbb{P}^0 -p.s.,
- Si $E_P(\ln \rho_0) > 0$ alors $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ \mathbb{P}^0 -p.s.,
- Si $E_P(\ln \rho_0) = 0$ alors $(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty)$ \mathbb{P}^0 -p.s..

2.2 Démonstration

Démonstration. On commence par traiter le cas le plus général où $\omega_0^+ > 0$ et $\omega_0^- > 0$, P -p.s. : cela signifie que le point 0 est toujours susceptible de renvoyer le mobile aussi bien à gauche qu'à droite, et *via* l'hypothèse 1, c'est vrai aussi pour tous les autres points. Pour les manipulations que nous comptons faire, il est utile de remarquer qu'alors tous les ρ_z sont dans $]0, +\infty[$, P -p.s..

Commençons par raisonner dans un environnement ω fixé (le déplacement du mobile est alors une chaîne de Markov). Soient $m_- < m_+$ et $z \in \{m_-, m_- + 1, \dots, m_+\}$. Nous voulons d'abord calculer la probabilité, notée $\nu_\omega(m_-, z, m_+)$,

qu'un mobile, partant de z et évoluant dans le milieu ω , touche le point m_- avant de toucher le point m_+ , càd.

$$\nu_\omega(m_-, m_+, z) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} P_\omega^z(\inf\{n \in \mathbb{N}; X_n = m_-\} < \inf\{n \in \mathbb{N}; X_n = m_+\})^1$$

Notons que la cha\u00eene de Markov est irr\u00e9ductible, d'apr\u00e8s le cas o\u00f9 nous sommes plac\u00e9s, donc le mobile est condamn\u00e9 \u00e0 quitter presque s\u00fbr\u00e9ment l'intervalle $]m_-, m_+[$.

\u00c0 cause de la propri\u00e9t\u00e9 de Markov, la fonction $\nu_\omega(m_-, \cdot, m_+)$ est harmonique : on a

$$(\omega_z^+ + \omega_z^-)\nu_\omega(m_-, z, m_+) = \omega_z^- \nu_\omega(m_-, z-1, m_+) + \omega_z^+ \nu_\omega(m_-, z+1, m_+) \quad (2.1)$$

Or on connaît les conditions aux limites de cette relation : on a

$$\begin{cases} \nu_\omega(m_-, m_-, m_+) = 1 \\ \nu_\omega(m_-, m_+, m_+) = 0 \end{cases}$$

(2.1) est une \u00e9quation de Laplace discr\u00e8te, dont on connaît les conditions aux limites, sa solution est donc unique. En effectuant des combinaisons lin\u00e9aires judicieuses, on trouve :

$$\nu_\omega(m_-, z, m_+) = \frac{\rho_z^{1/2} \sum_{i=z+1}^{m_+} \prod_{j=z+1}^{i-1} \rho_j}{\rho_z^{1/2} \sum_{i=z+1}^{m_+} \prod_{j=z+1}^{i-1} \rho_j + \rho_z^{-1/2} \sum_{i=m_-}^{z-1} \prod_{j=i+1}^{z-1} \rho_j^{-1}} \quad (2.2)$$

\u00c0 partir de l\u00e0, on va pouvoir obtenir les conclusions du th\u00e9or\u00e8me 6 \u00e0 partir de conditions relativement simples. Soient

$$S(\omega) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i \rho_j$$

et

$$F(\omega) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=-i}^{-1} \rho_j^{-1}$$

Notons $\mathcal{S}_+ \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{S(\omega) < \infty\}$ et $\mathcal{F}_+ \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{F(\omega) < \infty\}$, et aussi \mathcal{S}_- et \mathcal{F}_- les compl\u00e9mentaires respectifs de ces deux \u00e9v\u00e9nements. La formule (2.2) donne imm\u00e9diatement :

1. Si $\omega \in \mathcal{S}_+ \cap \mathcal{F}_-$: $\lim_{m_- \rightarrow -\infty} \lim_{m_+ \rightarrow +\infty} \nu_\omega(m_-, 0, m_+) = 0$;
2. Si $\omega \in \mathcal{S}_- \cap \mathcal{F}_+$: $\lim_{m_+ \rightarrow +\infty} \lim_{m_- \rightarrow -\infty} \nu_\omega(m_-, 0, m_+) = 1$;
3. Si $\omega \in \mathcal{S}_- \cap \mathcal{F}_-$: $(\forall k \in \mathbb{N})(\lim_{m_+ \rightarrow +\infty} \nu_\omega(-k, 0, m_+) = 1)$ et $(\forall k \in \mathbb{N})(\lim_{m_- \rightarrow -\infty} \nu_\omega(m_-, 0, k) = 0)$.

Dans le cas 3, on voit imm\u00e9diatement que la marche passe P_ω^0 -p.s. par tous les points, donc $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty$. Il est un peu plus subtil de trouver le comportement de la marche dans les cas 1 et 2 :

¹L'infimum de l'ensemble vide est pris \u00e9gal \u00e0 $+\infty$.

- Lemme 7.** 1. Si $\lim_{m_- \rightarrow -\infty} \lim_{m_+ \rightarrow +\infty} \nu_\omega(m_-, 0, m_+) = 0$, alors $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ P_ω^0 -p.s.
2. Si $\lim_{m_+ \rightarrow +\infty} \lim_{m_- \rightarrow -\infty} \nu_\omega(m_-, 0, m_+) = 1$, alors $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ P_ω^0 -p.s.

Démonstration. Les deux cas étant symétriques, nous ne traiterons que le cas 1.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit m_-^0 tel que $\lim_{m_+ \rightarrow +\infty} \nu_\omega(m_-^0, 0, m_+) \leq \varepsilon$. Cela signifie qu'il y a une P_ω^0 -probabilité d'au moins $1 - \varepsilon$ pour que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit minorée par m_-^0 et ait $+\infty$ pour limite supérieure. Or, dans un tel cas, $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ P_ω^0 -p.s. : en effet, il est P_ω^0 -presque impossible que la suite (X_n) ait une limite inférieure finie tout en restant minorée par m_-^0 , parce que si était le cas, il existerait un entier M tel que la suite (X_n) passe une infinité de fois en M tout en restant minorée par m_-^0 . Mais cela est absurde, car la chaîne de Markov est irréductible, donc quand elle passe une infinité de fois par M , elle passe aussi presque sûrement une infinité de fois par $m_-^0 - 1$. Finalement il y a une P_ω^0 -probabilité d'au moins $1 - \varepsilon$ que X_n tende vers $+\infty$, et comme ε a été choisi quelconque, $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ P_ω^0 -p.s. \square

Pour conclure le cas général de cette démonstration, il nous reste finalement à prouver que $E_P(\ln \rho_0) < 0 \Rightarrow \omega \in \mathcal{S}_+ \cap \mathcal{F}_-$ P -p.s., resp. $E_P(\ln \rho_0) > 0 \Rightarrow \omega \in \mathcal{S}_- \cap \mathcal{F}_+$, resp. $E_P(\ln \rho_0) = 0 \Rightarrow \omega \in \mathcal{S}_- \cap \mathcal{F}_-$. Observons d'abord que \mathcal{S}_+ , \mathcal{F}_+ , \mathcal{S}_- et \mathcal{F}_- sont invariants par l'opérateur de décalage. Par ergodicité de P , on a donc $P(\mathcal{S}_+) \in \{0, 1\}$, resp. $P(\mathcal{F}_+) \in \{0, 1\}$, etc.

Déjà, $P(\mathcal{S}_+) = 0$ ou $P(\mathcal{F}_+) = 0$. En effet, supposons $P(\mathcal{S}_+) = 1$. Alors, P -p.s., $\sum_{i \geq 1} \prod_{j=1}^i \rho_j$ converge, donc $\sum_{i \geq 1} (\prod_{j=1}^i \rho_j)^{-1}$ diverge. Mais comme les ρ_z sont indépendants et de même loi, cela est équivalent à dire que $\sum_{i \geq 1} (\prod_{j=-i}^{-1} \rho_j)^{-1}$ diverge P -p.s., c.à.d. que $P(\mathcal{F}_+) = 0$.

À la lumière de ce résultat, nous allons nous contenter de démontrer les propriétés suivantes : $P(\mathcal{S}_+) = 1 \Leftrightarrow E_P(\ln \rho_0) < 0$ et $P(\mathcal{F}_+) = 1 \Leftrightarrow E_P(\ln \rho_0) > 0$. Ces deux résultats sont symétriques, aussi allons-nous seulement démontrer le premier.

Supposons $E_P(\ln \rho_0) < 0$. Alors la loi des grands nombres entraîne, pour P -presque tout milieu ω : $\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \ln(\rho_j) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} E_P(\ln \rho_0) < 0$. En particulier, c notant une constante réelle telle que $E_P(\ln \rho_0) < c < 0$, on peut définir pour presque tout milieu ω un rang $i_0(\omega)$ tel que $i \geq i_0(\omega) \Rightarrow \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \ln(\rho_j) < c$. On en tire

$$S(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{i_0(\omega)-1} \prod_{j=1}^i \rho_j + \sum_{i=i_0(\omega)}^{\infty} e^{\sum_{j=1}^i \ln \rho_j} \leq \sum_{i=1}^{i_0(\omega)-1} \prod_{j=1}^i \rho_j + \sum_{i=i_0(\omega)}^{\infty} e^{ci} < +\infty$$

d'où $P(\mathcal{S}_+) = 1$.

Supposons $E_P(\ln \rho_0) > 0$. Alors, toujours par la loi des grands nombres, $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \ln(\rho_j) > 0$ P -p.s.. En particulier, c' notant une constante réelle

telle que $0 < c' < E_P(\ln \rho_0)$, on peut définir pour presque tout milieu ω un rang $i_0(\omega)$ tel que $i \geq i_0(\omega) \Rightarrow \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \ln(\rho_j) > c'$. On en tire comme précédemment

$$S(\omega) \geq \sum_{i=1}^{i_0(\omega)-1} \prod_{j=1}^i \rho_j + \sum_{i=i_0(\omega)}^{\infty} e^{c'i} = +\infty$$

d'où $P(\mathcal{S}_+) = 0$.

Supposons enfin $E_P(\ln \rho_0) = 0$, et notons σ l'écart-type de $\ln \rho_0$. Si $\sigma = 0$, alors $(\forall z \in \mathbb{Z} \quad \rho_z = 1)$ P -p.s. et $P(\mathcal{S}_+) = 0$ est évident. Si $\sigma > 0$, le théorème central limite donne

$$P\left(\sum_{j=1}^i \ln(\rho_j) \geq \sqrt{i}\right) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} p \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_1^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx > 0$$

Notant $p' = \frac{p}{2}$, on a donc $P(\sum_{j=1}^i \ln(\rho_j) \geq \sqrt{i}) \geq p'$ à partir d'un certain rang, d'où $P(S(\omega) \geq e^{\sqrt{i}}) \geq p'$. En faisant tendre i vers ∞ , on a donc $P(\mathcal{S}_-) \geq p'$, d'où $P(\mathcal{S}_+) = 0$ par ergodicité.

Le cas général du théorème étant ainsi démontré, il reste à contrôler le cas particulier où, par exemple, $P(\omega_0^+ = 0) > 0$. Dans un tel cas, puisque $E_P(\ln \rho_0)$ est supposé bien définie, on a $P(\omega_0^- = 0) = 0$. D'autre part, $E_P(\ln \rho_0) = -\infty < 0$. La vérification du théorème consiste alors à démontrer $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ \mathbb{P}^0 -p.s.

Soit $\omega \in \Omega$. Appelons *points gauches* les $z \in \mathbb{Z}$ vérifiant $\omega_z^+ = 0$. Alors, puisque tous les ω_z sont indépendants et de même loi, il existe P -p.s. une infinité de points gauches, aussi bien parmi les entiers positifs que parmi les entiers négatifs. Il y a donc P -p.s. un point gauche positif ou nul : notons g_0 de plus petit d'entre eux. Notons d'autre part $g_1 > g_2 > \dots$ les points gauches strictement négatifs. Alors P_ω -p.s. la chaîne de Markov partant de 0 va franchir tous les points gauches jusqu'à $-\infty$: d'une part, en effet, quand la marche aléatoire atteint un point gauche, elle le franchit pour ne plus jamais revenir au-delà P_ω -p.s., d'autre part, il est presque impossible que la chaîne de Markov reste coincée à l'infini entre les points g_{i+1} et g_i : en effet, comme tous les points ont une probabilité non nulle d'envoyer le mobile à gauche, le noyau potentiel U de la chaîne de Markov vérifie $U(x, y) > 0$ pour $x > y$, et donc si la chaîne passe une infinité de fois par un point, elle passe aussi une infinité de fois par tous les points plus à gauche. En conclusion, $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ P_ω -p.s..

Remarque 4. Le cas particulier que nous venons de traiter correspond au cas où il existe des points que le mobile ne peut franchir que dans un sens, toujours le même (à gauche ci-dessus). Comme aucun point ne fixe le mobile définitivement, il est clair que le mobile va avoir tendance à aller à l'infini, à mesure qu'il franchit irréversiblement les points gauches (resp. droits).

Le théorème 6 est ainsi démontré □

Chapitre 3

Vitesse de dérive

3.1 Énoncé du théorème

Le fait de savoir dans quelle direction part le mobile à l'infini ne nous renseigne pas sur la vitesse à laquelle il s'éloigne de l'origine. En fait, on ne sait même pas si on peut définir une vitesse moyenne d'éloignement. Nous nous proposons donc dans ce chapitre de déterminer le comportement de la suite $(\frac{X_n}{n})$ quand $n \rightarrow \infty$.

Théorème 8. *Plaçons-nous dans les conditions d'application du théorème 6¹. Alors, outre la conclusion dudit théorème, on a :*

1. *si $E_P(\rho_0) < 1$ alors $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1 - E_P(\rho_0)}{E_P(\frac{1}{\omega_0^+})} \mathbb{P}^0$ -p.s.*
2. *si $E_P(\frac{1}{\rho_0}) < 1$ alors $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{1 - E_P(\frac{1}{\rho_0})}{E_P(\frac{1}{\omega_0^-})} \mathbb{P}^0$ -p.s.*
3. *si $E_P(\rho_0) \geq 1$ et $E_P(\frac{1}{\rho_0}) \geq 1$ alors $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \mathbb{P}^0$ -p.s.*

Remarque 5. La vitesse de la marche sous la mesure \mathbb{P}^0 ne dépend que de la mesure sur le milieu P .

Remarque 6. Si $\omega^+ = 1 - \omega^-$ fixés (marche aléatoire simple) on obtient bien le résultat connu. Par exemple si $\omega^+ > \omega^-$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = \frac{1 - \frac{\omega^-}{\omega^+}}{\frac{1}{\omega^+}} = \omega^+ - \omega^-$$

Sinon ce résultat est faux. On obtient par exemple dans le cas $v_P > 0$

$$v_P = \frac{1 - E_P(\rho_0)}{E_P(\frac{1}{\omega_0^+})} \leq \frac{1 - E_P(\rho_0)}{1 + E_P(\rho_0)}$$

Notons $p_0 = \frac{\omega_0^+}{\omega_0^- + \omega_0^+}$. Par l'inégalité de Jensen

$$E_P(\rho_0) = E_P\left(\frac{1}{p_0}\right) - 1 \geq \frac{1}{E_P(p_0)} - 1$$

¹À savoir, aucun point ne fixe la marche aléatoire et $E_P(\ln(\rho_0))$ est bien défini.

d'où

$$v \leq \frac{1 - E_P(\rho_0)}{1 + E_P(\rho_0)} \leq \frac{2 - \frac{1}{E_P(\rho_0)}}{\frac{1}{E_P(\rho_0)}} = 2E_P(\rho_0) - 1 = E_P(\omega_0^+ - \omega_0^-)$$

où la première inégalité est stricte dès lors que $P(\omega_0^0 \neq 0) > 0$, et la seconde dès lors que $\text{var}(\rho_0) > 0$.

Remarque 7. Il existe le cas d'une marche transitoire à vitesse nulle. Par exemple si on prend $P\{\omega^- = (1 - \omega^+) = \frac{1}{3}\} = \frac{1}{2}$ et $P\{\omega^- = (1 - \omega^+) = \frac{3}{5}\} = \frac{1}{2}$ alors $E(\ln \rho_0) = \frac{1}{2} (\ln(\frac{3}{2}) + \ln(\frac{1}{2})) < 0$ mais $E[\rho_0] = 1$.

3.2 Démonstration

Démonstration. Remarquons d'abord qu'on a $\ln(E_P(\frac{1}{\rho_0})) \geq E_P(-\ln(\rho_0))$ par l'inégalité de Jensen, donc, si $E_P(\ln \rho_0) \leq 0$, seuls les cas 1 et 3 sont possibles. Nous allons donc démontrer le théorème sous cette éventualité seulement, sachant que le cas $E_P(\ln \rho_0) \geq 0$ se traite de manière symétrique². L'intérêt de se placer sous cette hypothèse est que le théorème 6 nous permet alors d'affirmer que $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty$ \mathbb{P}^0 -p.s., ce qui autorise les notations suivantes :

Posons $T_n \stackrel{\text{déf}}{=} \min\{k; X_k = n\}$, et $\tau_n \stackrel{\text{déf}}{=} T_n - T_{n-1}$. T_n représente le temps que met le mobile, partant de 0, pour atteindre le point n , tandis que τ_n est le temps qui s'écoule entre la première fois où il atteint le point $n-1$ et la première fois où il atteint le point n ; les T_n et les τ_n sont finis \mathbb{P}^0 -p.s., en vertu de la remarque précédente.

On a :

Lemme 9. *Sous la probabilité \mathbb{P}^0 , la suite $(\tau_i)_{i \geq 1}$ est stationnaire et ergodique.*

Démonstration. La stationnarité est intuitivement claire, car remplacer τ_n par τ_{n+1} , c'est en quelque sorte remplacer n par $n+1$, c'est-à-dire décaler le milieu d'un cran, ce qui ne change pas la distribution du milieu d'après l'hypothèse 1. Plus précisément, soient $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{N}$. Nous voulons établir que $\mathbb{P}^0(\tau_1 \in A_1, \dots, \tau_n \in A_n) = \mathbb{P}^0(\tau_2 \in A_1, \dots, \tau_{n+1} \in A_n)$. Pour ce faire, notons qu'on a par changement d'origine du milieu :

$$P_\omega^0(\tau_1 \in A_1, \dots, \tau_n \in A_n) = P_{\theta^{-1}\omega}^1(\tau_2 \in A_1, \dots, \tau_{n+1} \in A_n)$$

D'autre part, dans un milieu fixé, la propriété de Markov forte nous dit que la loi du déplacement du mobile à partir du moment où il a atteint le point 1 est la même que celle qu'il a quand il en part. En particulier, comme le mobile atteint presque certainement le point 1, on a pour presque tout milieu ω :

$$P_\omega^1(\tau_2 \in A_1, \dots, \tau_{n+1} \in A_n) = P_\omega^0(\tau_2 \in A_1, \dots, \tau_{n+1} \in A_n)$$

Donc :

²On peut aussi démontrer ce cas en se servant du résultat pour $E_P(\ln \rho_0) \leq 0$ et en inversant gauche et droite.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}^0(\tau_1 \in A_1, \dots, \tau_n \in A_n) \\
&= \int_{\Omega} P_{\omega}^0(\tau_1 \in A_1, \dots, \tau_n \in A_n) d\omega \\
&= \int_{\Omega} P_{\theta^{-1}\omega}^1(\tau_2 \in A_1, \dots, \tau_{n+1} \in A_n) d\omega \\
&= \int_{\Omega} P_{\omega}^1(\tau_2 \in A_1, \dots, \tau_{n+1} \in A_n) d\omega \\
&\quad (\text{car } \theta^{-1} \text{ préserve la mesure}) \\
&= \int_{\Omega} P_{\omega}^0(\tau_2 \in A_1, \dots, \tau_{n+1} \in A_n) d\omega \\
&= \mathbb{P}^0(\tau_1 \in A_1, \dots, \tau_n \in A_n)
\end{aligned}$$

Et la stationnarité est démontrée.

Pour l'ergodicité, posons $\Xi \stackrel{\text{déf}}{=} [0, 1]^{\mathbb{N}}$, $\xi = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ses éléments, et munissons-le de la mesure U_{Ξ} qui rende toutes les coordonnées ξ_n indépendantes et de loi uniforme sur $[0, 1]$. On peut alors construire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, à ω donné, comme une variable aléatoire définie sur Ξ par :

$$X_{n+1} \stackrel{\text{déf}}{=} X_n + \mathbb{1}_{\{\xi_{n+1} < \omega_{X_n}^+\}} - \mathbb{1}_{\{\xi_{n+1} > 1 - \omega_{X_n}^-\}}$$

(C'est d'ailleurs ainsi qu'on procède lors des simulations de marches aléatoires).

Maintenant, soit $A(\tau)$ un événement mesurable par rapport aux τ_i qui est invariant par décalage en τ (nous noterons également θ le décalage en τ , et nous écrirons $\theta A(\tau)$ pour $A(\theta\tau)$ ³). Nous voulons montrer $P \otimes U_{\Xi}(A) \in \{0, 1\}$. Commençons par fixer le milieu ω . Soit alors $k \in \mathbb{N}$. Comme θ est surjective, on a $A = \theta A$, d'où $A = \theta^k A$. Donc $A(\xi)$ ne dépend que de $\tau_{k+1}, \tau_{k+2}, \dots$, et donc que du comportement de la chaîne de Markov à partir du moment où elle atteint le point k . En particulier, A est indépendant de $\sigma(\xi_1, \dots, \xi_k)$, qui est la tribu relative aux k premiers mouvements du mobile. Comme cela est vrai pour tout k , A est indépendant de $\sigma(\xi_1, \xi_2, \dots) = \sigma(\xi)$, donc trivial. Finalement, A ne dépend que de ω . Mais, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, on peut décaler les τ_n d'une unité en décalant le milieu d'une unité. Par conséquent, $A(\theta\omega) = \theta A(\omega) = A(\omega)$. A est donc un événement sur $(\omega_z)_{z \in \mathbb{Z}}$ invariant par décalage, et comme le milieu est ergodique d'après le théorème 3, $P(A) \in \{0, 1\}$, CQFD \square

Nous passons maintenant au lemme fondamental suivant :

Lemme 10.

$$E_{\mathbb{P}^0}(\tau_1) \begin{cases} \frac{E_P(\frac{1}{\Gamma})}{1 - E_P(\rho_0)} & \text{si } E_P(\rho_0) < 1 \\ +\infty & \text{si } E_P(\rho_0) \geq 1 \end{cases}$$

Démonstration. L'idée consiste à écrire une relation que $E_{\mathbb{P}^0}(\tau_1)$ satisfait vis-à-vis de lui-même, en utilisant l'invariance par décalage du milieu. Pour ce faire, on va avoir recours à la décomposition des temps d'atteinte : notons

$$\tau_1 = \mathbb{1}_{\{X_1=1\}} + \mathbb{1}_{\{X_1=0\}}(1 + \tau_1') + \mathbb{1}_{\{X_1=-1\}}(1 + \tau_0'' + \tau_1'') \quad (3.1)$$

où τ_1' est le temps mis par le mobile pour aller du point 0 au point 1 après être resté immobile au temps 1, τ_0'' est le temps qu'il met pour revenir au point 0 s'il est parti en -1 lors de son premier mouvement, et τ_1'' le temps qu'il met à aller en 1 après être parti à gauche, puis revenu au point 0 plus tard.

³L'hypothèse d'invariance par décalage en τ s'écrit donc $A = \theta^{-1}(A)$.

Fixons un milieu ω . La propriété de Markov forte nous dit immédiatement que τ'_1 , τ''_0 , et τ''_1 , conditionnés respectivement par les événements $\{X_1 = 0\}$, $\{X_1 = -1\}$ et $\{X_1 = -1\} \cap \{\tau''_0 < \infty\}$, suivent les mêmes lois que τ_1 , $\tau_1(\theta^{-1}\omega)$ et τ_1 .

Supposons d'abord $E_{\mathbb{P}^0}(\tau_1) < \infty$. Alors, P -p.s., on a $E_{\omega}^0(\tau_1) < \infty$ et $E_{\theta^{-1}\omega}^0(\tau_1) < \infty^4$. Passant à l'espérance dans (3.1), on obtient :

$$E_{\omega}^0(\tau_1) = 1 + (\omega_0^0 + \omega_0^-)E_{\omega}^0(\tau_1) + \omega_-^0 E_{\theta^{-1}\omega}^0(\tau_1) \quad (3.2)$$

soit

$$E_{\omega}^0(\tau_1) = \frac{1}{\omega_0^+} + \rho_0 E_{\theta^{-1}\omega}^0(\tau_1) \quad (3.3)$$

après simplification.

Mais $E_{\theta^{-1}\omega}^0(\tau_1)$ ne dépend que du comportement de la chaîne de Markov dans le milieu $\theta^{-1}\omega$ avant qu'elle atteigne le point 1, donc que, dans le milieu $\theta^{-1}\omega$, des points $0, -1, -2, \dots$, autrement dit de $\omega_{-1}, \omega_{-2}, \omega_{-3}, \dots$. Or tous les ω_z sont indépendants vis-à-vis de P , donc $E_{\theta^{-1}\omega}^0(\tau_1)$ est indépendante de $\rho_0 = \frac{\omega_0^-}{\omega_0^+}$. Le passage à l'espérance selon P donne donc :

$$E_{\mathbb{P}^0}(\tau_1) = E_P\left(\frac{1}{\omega_0^+}\right) + E_P(\rho_0) \int_{\Omega} E_{\theta^{-1}\omega}^0(\tau_1) P(d\omega)$$

Mais comme P est θ^{-1} -invariante, $\int_{\Omega} E_{\theta^{-1}\omega}^0(\tau_1) P(d\omega) = \int_{\Omega} E_{\omega}^0(\tau_1) P(d\omega) = E_P\left(\frac{1}{\omega_0^+}\right)$, d'où $E_{\mathbb{P}^0}(\tau_1) = \frac{E_P\left(\frac{1}{\omega_0^+}\right)}{1 - E_P(\rho_0)}$ puisqu'on a supposé $E_{\mathbb{P}^0}(\tau_1) < \infty$.

Ce résultat montre par ailleurs que $E_{\mathbb{P}^0}(\tau_1) < \infty \Rightarrow E_P(\rho_0) < 1$, il ne reste donc plus qu'à démontrer $E_{\mathbb{P}^0}(\tau_1) = \infty \Rightarrow E_P(\rho_0) \geq 1$

Supposons par l'absurde $E_{\mathbb{P}^0}(\tau_1) = \infty$ et $E_P(\rho_0) < 1$. On peut, en modifiant légèrement le raisonnement ci-dessus, adapter (3.2) en :

$$E_{\omega}^0(\tau_1 \mathbb{1}_{\{\tau_1 \leq M\}}) \leq 1 + (\omega_0^0 + \omega_0^-)E_{\omega}^0(\tau_1 \mathbb{1}_{\{\tau_1 \leq M\}}) + \omega_-^0 E_{\theta^{-1}\omega}^0(\tau_1 \mathbb{1}_{\{\tau_1 \leq M\}}) \quad (3.4)$$

d'où

$$E_{\omega}^0(\tau_1 \mathbb{1}_{\{\tau_1 \leq M\}}) \leq \frac{1}{\omega_0^+} + \rho_0 E_{\theta^{-1}\omega}^0(\tau_1 \mathbb{1}_{\{\tau_1 \leq M\}}) \quad (3.5)$$

L'itération de cette équation donne :

$$\begin{aligned} E_{\omega}^0(\tau_1 \mathbb{1}_{\{\tau_1 \leq M\}}) &\leq \frac{1}{\omega_0^+} + \frac{\rho_0}{\omega_{-1}^+} + \frac{\rho_0 \rho_{-1}}{\omega_{-2}^+} + \dots + \frac{\prod_{i=0}^{m-1} \rho_{-i}}{\omega_{-m}^+} + \left(\prod_{i=0}^{m-1} \rho_{-i} \right) E_{\theta^{-m}\omega}^0(\tau_1 \mathbb{1}_{\{\tau_1 \leq M\}}) \\ &\leq \bar{S} + M \prod_{i=0}^{m-1} \rho_{-i} \end{aligned}$$

où \bar{S} note $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_{-i}^+} \prod_{j=0}^{i-1} \rho_{-j} = \frac{1}{\omega_0^+} + \frac{\rho_0}{\omega_{-1}^+} + \frac{\rho_0 \rho_{-1}}{\omega_{-2}^+} + \dots$

⁴En effet, θ^{-1} préserve la mesure, donc si un événement est vrai P -p.s., il reste vrai P -p.s. quand on décale le milieu d'un cran.

En passant à l'espérance selon P , on obtient

$$E_{\mathbb{P}^0}(\tau_1 \mathbb{1}_{\{\tau_1 \leq M\}}) \leq E_P(\bar{S}) + ME_P\left(\prod_{i=0}^{m-1} \rho_{-i}\right) = E_P(\bar{S}) + ME_P(\rho_0)^m \quad (3.6)$$

Or on a facilement $E_P(\bar{S}) = \frac{E_P(\frac{1}{\omega_0^+})}{1-E_P(\rho_0)}$. En faisant tendre m vers $+\infty$ dans (3.6), on obtient donc

$$E_{\mathbb{P}^0}(\tau_1 \mathbb{1}_{\{\tau_1 \leq M\}}) \leq E_P(\bar{S})$$

puis en faisant tendre M vers $+\infty$, par convergence monotone :

$$\infty = E_{\mathbb{P}^0}(\tau_1) = E_{\mathbb{P}^0}(\tau_1 \mathbb{1}_{\{\tau_1 < \infty\}}) \leq E_P(\bar{S}) < \infty$$

Ce qui est absurde et termine la preuve du lemme \square

Remarque 8. Pour $E_P(\rho_0) \geq 1$, on a $E_P(\bar{S}) = \infty$, et donc dans tous les cas $E_{\mathbb{P}^0}(\tau_1) = E_P(\bar{S})$.

Puisque la suite $(\tau_i)_{i \geq 1}$ est ergodique (cf. lemme 9) sous la probabilité \mathbb{P}^0 , on a $\frac{T_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \tau_i}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E_{\mathbb{P}^0}(\tau_1) = E_P(\bar{S})$ \mathbb{P}^0 -p.s.. Cela suffit pour démontrer le théorème :

Cas 1 : $E_P(\bar{S}) < \infty$. On utilise alors le lemme élémentaire suivant : si $\frac{T_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha < \infty$, alors $\frac{X_n}{n} \rightarrow \frac{1}{\alpha}$ ⁵. En effet, soit une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons k_n la valeur maximale atteinte par la suite (X_n) à l'instant n : k_n est caractérisé par $T_{k_n} \leq n < T_{k_n+1}$ (en particulier, $k_{T_n} = n$). On a trivialement $X_n \leq n$, et aussi $X_n \geq k_n - (n - T_{k_n})$, car après avoir atteint la valeur k_n à l'instant T_{k_n} , la suite redescend avec une vitesse au plus égale à 1. On en tire la double inégalité :

$$\frac{k_n}{n} - (1 - \frac{T_{k_n}}{n}) \leq \frac{X_n}{n} \leq \frac{k_n}{n} \quad (3.7)$$

Mais $\frac{k_n}{n} = \frac{k_n}{T_{k_n}} \frac{T_{k_n}}{n} \leq \frac{k_n}{T_{k_n}}$, et comme $\frac{m}{T_m} \rightarrow_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha}$, on a $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} \leq \frac{1}{\alpha}$. Mais on a aussi $\frac{k_n}{n} = \frac{k_n}{k_n+1} \frac{k_n+1}{T_{k_n+1}} \frac{T_{k_n+1}}{n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n+1}{T_{k_n+1}} \frac{T_{k_n+1}}{n} > \frac{k_n+1}{T_{k_n+1}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha}$, d'où $\liminf \frac{k_n}{n} \geq \frac{1}{\alpha}$ et finalement $\frac{k_n}{n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha}$.

On en déduit d'autre part que $\frac{T_{k_n}}{n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1$, puisque $\frac{T_{k_n}}{n} = \frac{T_{k_n}}{k_n} \frac{k_n}{n}$. Donc, en passant à la limite dans (3.7), on obtient bien $\frac{X_n}{n} \rightarrow \frac{1}{\alpha}$, et le lemme est démontré, d'où le résultat.

Cas 2 : $E_P(\bar{S}) = \infty$. Avec les mêmes notations, on a $\frac{X_n}{n} \leq \frac{k_n}{n} = \frac{k_n}{T_{k_n}} = (\frac{T_{k_n}}{k_n})^{-1} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$, d'où $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} \leq 0$. Si on est dans le cas transitoire, cela suffit pour conclure que $\frac{X_n}{n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$; et si on est dans le cas récurrent, on démontre de manière symétrique que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} \leq 0$, d'où aussi $\frac{X_n}{n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$.

Le théorème 8 est donc démontré \square

⁵C'est un lemme parfaitement déterministe : aucune hypothèse particulière n'est faite sur la suite (X_n) .

Chapitre 4

Chaînes auxiliaires

Un des problèmes en étudiant les marches aléatoires en milieu aléatoire est que le processus X_n n'est pas une chaîne de Markov. Les lois de transition dépendent du milieu et donc ne sont pas $\sigma(X_n)$ -mesurables. Pour éviter ce problème nous considérons un processus auxiliaire, celui du changement de milieu vu du mobile. C'est bien une chaîne de Markov, ce qui nous permet d'utiliser les techniques disponibles pour les chaînes de Markov dans notre cadre. À la fin de ce chapitre nous donnerons encore une preuve du théorème 8 concernant la vitesse de la marche. Nous allons nous restreindre au cas 1. de vitesse positive sachant que la preuve du 2. est symétrique. Le cas 3 ne sera pas traité. Dans ce chapitre nous supposons donc toujours que $E(\rho_0) < 1$. On note la vitesse de la marche v_P .

4.1 Chaînes auxiliaires

Nous considérons le processus $\bar{\omega}(n) = \theta^{X_n}\omega$ défini sur l'espace mesurable $(\Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F} \times \mathcal{G})$ muni des mesures P_ω^0 et \mathbb{P}^0 . $\bar{\omega}(n)$ est le milieu que voit le mobile à l'instant n .

Nous généralisons d'abord la notion de chaîne de Markov sur des espaces non dénombrables. On considère un espace polonais (E, τ) muni de sa tribu borélienne et M une probabilité de transition de E dans lui-même. Comme dans le cas discret on définit pour $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$Mf(\omega) = \int f(\omega')M(\omega, d\omega').$$

Définition 3. Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans E est appelée *chaîne de Markov* de noyau de transition M si $\forall n \in \mathbb{N}$ la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant (X_0, \dots, X_n) est $M(X_n, \bullet)$. Cela signifie que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall f : E^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_+, \forall g : E \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$E(f(X_0, \dots, X_n)g(X_{n+1})) = E(f(X_0, \dots, X_n)Mg(X_n)).$$

Proposition 11. Soit X_n une MAMA. La suite $(\bar{\omega}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov par rapport à la probabilité de transition

$$M(\omega, \bullet) = \omega_0^+ \delta_{\theta\omega} + \omega_0^- \delta_{\theta^{-1}\omega} + \omega_0^0 \delta_\omega$$

sous P_ω^0 et \mathbb{P}^0 .

Démonstration. Sous P_ω^0 : Soit $n \in \mathbb{N}$, $f : \Omega^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. On a

$$\begin{aligned} E_\omega^0 \left(f(\bar{\omega}(0), \dots, \bar{\omega}(n)) g(\bar{\omega}(n+1)) \right) &= E_\omega^0 \left(f(\theta^{X_0}\omega, \dots, \theta^{X_n}\omega) g(\theta^{X_{n+1}}\omega) \right) \\ &= E_\omega^0 \left(f(\theta^{X_0}\omega, \dots, \theta^{X_n}\omega) E_\omega^{X_{n-1}}(g(\theta^{X_n}\omega)) \right) \\ &= E_\omega^0 \left(f(\theta^{X_0}\omega, \dots, \theta^{X_n}\omega) [\omega_{X_{n-1}}^+ g(\theta \circ \theta^{X_{n-1}}\omega) \right. \\ &\quad \left. + \omega_{X_{n-1}}^- g(\theta^{-1} \circ \theta^{X_{n-1}}\omega) + \omega_{X_{n-1}}^0 g(\theta^{X_{n-1}}\omega)] \right) \\ &= E_\omega^0 (f(\bar{\omega}(0), \dots, \bar{\omega}(n)) M g(\bar{\omega}(n))) \end{aligned}$$

où la deuxième égalité découle de la propriété de Markov de (X_n) . On obtient le résultat pour \mathbb{P}^0 en intégrant cette égalité par rapport à P . \square

Nous allons chercher une mesure invariante pour cette chaîne dans le cas qui nous intéresse. La construction ressemble fortement à celle dans le cas discret. On rappelle que $T_1 = \inf\{t > 0 \mid X_t = 1\}$. Si on se met dans le cas transitoire où $E_{\mathbb{P}} \log \rho_0 < 0$ càd. où $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge \mathbb{P}^0 -p.s. vers $+\infty$ on a $T_1 < \infty$ \mathbb{P}^0 -p.s.. Dans le lemme 10 nous avons déjà vu que $E_P(\rho_0) < 1$ implique $E_{\mathbb{P}^0}(T_1) < \infty$. On peut donc définir une mesure de probabilité \bar{Q} sur Ω par

$$Q(B) = E_{\mathbb{P}^0} \left(\sum_{i=0}^{T_1-1} \mathbf{1}_{\{\bar{\omega}(i) \in B\}} \right) \quad \bar{Q}(B) = \frac{Q(B)}{Q(\Omega)} = \frac{Q(B)}{E_{\mathbb{P}^0} T_1}.$$

On compte combien de fois la marche X_n partant de 0 voit un milieu dans B avant d'arriver au niveau 1. Le concept de compter combien de fois le processus $\bar{\omega}(n)$ tombe dans B avant un temps dépendant du processus est le même que dans le cas discret. La différence est que ce temps T_1 ne dépend pas directement de $\bar{\omega}(n)$ mais de X_n .

Proposition 12. La mesure $Q(\bullet)$ est M -invariante càd. pour chaque $B \in \mathcal{F}$ on a

$$Q(B) = \int_{\Omega} M(x, B) Q(dx).$$

Remarque 9. Notre mesure \bar{Q} est donc en un sens le milieu typique dans lequel le mobile se trouve pendant son trajet. Cette caractérisation est importante pour comprendre pourquoi elle permet d'obtenir des conclusions concernant la vitesse, en effet la vitesse instantanée du mobile dépend du point où il se trouve.

Démonstration. Nous calculons $\int_{\Omega} M(x, B)Q(dx)$. Par définition de Q on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} M(x, B)Q(dx) &= E_{\mathbb{P}^0} \left(\sum_{i=0}^{T_1-1} \mathbf{1}_{\{\bar{\omega}(i+1) \in B\}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E_{\mathbb{P}^0} \left(\mathbf{1}_{\{k < T_1\}} \mathbf{1}_{\{\bar{\omega}(k+1) \in B\}} \right).\end{aligned}$$

Puis nous divisons l'événement $\{k < T_1\}$ en $\{k+1 = T_1\}$ et $\{T_1 > k+1\}$. Donc

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega} M(x, B)Q(dx) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E_{\mathbb{P}^0} \left(\mathbf{1}_{\{T_1=k+1\}} \mathbf{1}_{\{\bar{\omega}(k+1) \in B\}} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} E_{\mathbb{P}^0} \left(\mathbf{1}_{\{T_1 > k+1\}} \mathbf{1}_{\{\bar{\omega}(k+1) \in B\}} \right) \\ &= \mathbb{P}^0(T_1 < \infty; \bar{\omega}(T_1) \in B) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}^0(T_1 > k; \bar{\omega}(k) \in B).\end{aligned}$$

Jusqu'ici la preuve est presque la même que dans le cas discret. Pour évaluer cette expression nous utilisons maintenant des propriétés particulières de la marche. Comme $\mathbb{P}^0(T_1 < \infty) = 1$ et $\bar{\omega}(T_1) = \theta\omega$ le terme de gauche vaut $P(\theta\omega \in B)$ par l'invariance sous décalage de la mesure P c'est égal à $P(\omega \in B)$. On obtient donc

$$\int_{\Omega} M(x, B)Q(dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}^0(\mathbf{1}_{T_1 > k} \bar{\omega}(k) \in B) = Q(B)$$

□

On voit facilement que Q est absolument continue par rapport à P . Calculons la dérivée de Radon-Nikodym. On définit

$$\Lambda(\omega) = \frac{1}{\omega_0^+} \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i \rho_j \right]$$

Proposition 13.

$$\frac{dQ}{dP}(\omega) = \Lambda(\omega)$$

Démonstration. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée. Par définition de Q on a

$$\int f dQ = E_{\mathbb{P}^0} \left(\sum_{i=0}^{T_1-1} f(\bar{\omega}_i) \right)$$

On note $N_i = \#\{k \in \{0, \dots, T_1 - 1\} | X_k = i\}$. Alors on peut réécrire le terme de droite comme

$$E_{\mathbb{P}^0} \left(\sum_{i \leq 0} f(\theta^i \omega) N_i \right)$$

Ceci est égal à

$$\begin{aligned}&\sum_{i \leq 0} E_P(f(\theta^i \omega) E_{\omega}^0 N_i) && \text{par définition de la mesure } \mathbb{P}^0 \\ &= \sum_{i \leq 0} E_P(f(\omega) E_{\theta^{-i}\omega}^0 N_i) && \text{par invariance sous décalage de } P \\ &= E_P \left(f(\omega) \left(\sum_{i \leq 0} E_{\theta^{-i}\omega}^0 N_i \right) \right)\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{dQ}{dP} = \sum_{i \leq 0} E_{\theta^{-i}\omega}^0 N_i$$

En particulier cette somme converge.

Afin d'évaluer cette expression nous utilisons un argument de nombres de montées. Remarquons d'abord que nous cherchons à calculer l'espérance des N_i par rapport à la mesure $P_{\theta^{-i}\omega}^0$ c.à.d. dans un milieu fixé. Nous considérons donc la chaîne de Markov X_n pour un milieu ω fixé.

On pose

$$\begin{aligned} \theta_{i,1} &= \min\{k \leq T_1 | X_k = i-1\} \\ \eta_{i,1} &= \min\{\theta_{i,1} < k \leq T_1 | X_k = i\} \end{aligned}$$

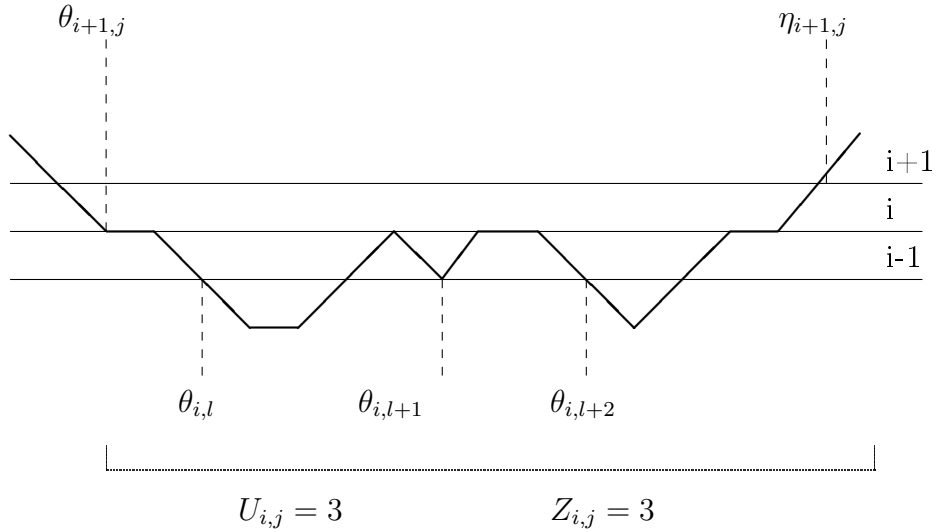
et pour $j \geq 2$

$$\begin{aligned} \theta_{i,j} &= \min\{\eta_{i,j-1} < k \leq T_1 | X_k = i-1\} \\ \eta_{i,j} &= \min\{\theta_{i,j} < k \leq T_1 | X_k = i\} \end{aligned}$$

$\theta_{i,j}$ est la j -ième fois que la marche atteint le niveau $i-1$ venant d'au-dessus et $\eta_{i,j}$ est la première fois après cela qu'elle remonte au niveau i . Nous appelons l'intervalle $\{\theta_{i,j}, \dots, \eta_{i,j}\}$ la j -ième excursion partant de i de la marche. Soient

$$\begin{aligned} U_{i,j} &= \#\{l \geq 0 : \theta_{i+1,j} < \theta_{i,l} < \eta_{i+1,j}\} \\ Z_{i,j} &= \#\{k \geq 0 : X_{k-1} = i; X_k = i, \theta_{i+1,j} < k < \eta_{i+1,j}\} \end{aligned}$$

$U_{i,j}$ est le nombre d'excursions partant de i pendant la j -ième excursion partant de $i+1$ et $Z_{i,j}$ est le nombre de fois que X_n reste en i pendant la même excursion. On définit encore $U_i = \sum_j U_{i,j}$ le nombre total d'excursions partant de i et $Z_i = \sum_j Z_{i,j}$ le nombre total de fois où le mobile reste en i .



On peut exprimer N_i en fonction de U_j, Z_j , plus précisément $N_i = U_i + U_{i+1} + Z_i$. Afin d'évaluer les N_i il suffit donc de calculer la loi des U_i et des Z_i .

Chaque excursion partant de i fait partie d'une excursion partant de $i + 1$. On voit alors que

$$U_i = \sum_{j=0}^{U_{i+1}-1} U_{i,j}$$

Les $U_{i,j}$ sont indépendants et de même loi pour un i fixé. Le processus U_i est donc un processus de branchement.

Pour calculer la loi de $U_{i,j}$ étudions ce qui se passe entre $\theta_{i+1,j}$ et $\eta_{i+1,j+1}$. À $\theta_{i+1,j}$ le mobile monte au niveau $i + 1$ avec une probabilité ω^+ et il descend avec une probabilité ω^- . S'il reste immobile la situation ne change pas. On a donc

$$P_\omega^0(U_{i,j} \geq 1) = \frac{\omega_i^-}{\omega_i^- + \omega_i^+}$$

S'il descend il va forcément revenir en i et on aura la même situation. Comme le processus X_n est markovien ce deuxième choix va être indépendant du premier. On obtient

$$P_\omega^0(U_{i,j} \geq 2) = \left(\frac{\omega_i^-}{\omega_i^- + \omega_i^+} \right)^2$$

En itérant cet argument on voit que $U_{i,j}$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{\omega_i^-}{\omega_i^- + \omega_i^+}$. On peut donc calculer

$$E_\omega^0(U_i | U_{i+1}, \dots, U_0) = U_{i+1} \cdot E(U_{i,j}) = \rho_i U_{i+1}$$

Un argument similaire montre que $Z_{i,j}$ suivent une loi géométrique de paramètre $\frac{\omega_i^0}{\omega_i^0 + \omega_i^+}$. Comme pour les $U_{i,j}$ on écrit

$$Z_i = \sum_{j=0}^{U_{i+1}-1} Z_{i,j}$$

et obtient

$$E_\omega^0(Z_i | U_{i+1}, \dots, U_0) = U_{i+1} \cdot E(Z_{i,j}) = \frac{\omega_i^0}{\omega_i^+} U_{i+1}$$

En utilisant la relation $N_i = U_i + U_{i+1} + Z_i$ on voit que

$$E_\omega^0(N_i | U_{i+1}, \dots, U_0) = E_\omega^0(U_i + U_{i+1} + Z_i | U_{i+1}, \dots, U_0) = \frac{1}{\omega_i^+} E_\omega^0 U_{i+1}$$

Un calcul par récurrence montre que

$$E_\omega^0 N_i = \frac{1}{\omega_i^+} \rho_0 \dots \rho_{i+1}$$

Donc

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{1}{\omega_0^+} \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i \rho_j \right]$$

et la proposition est démontrée. \square

Avant de passer à la preuve du théorème 8 nous démontrons encore un résultat technique.

Lemme 14. *Sous la probabilité $\bar{Q} \otimes P_\omega^0$ la suite $(\bar{\omega}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire et ergodique.*

Démonstration. Fixons d'abord quelques notations. On note \bar{P}_ω la loi de la suite $(\bar{\omega}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\bar{\omega}(0) = \omega$, càd. pour $B_1, \dots, B_l \in \Omega$ mesurables

$$\bar{P}_\omega \left(\bar{\omega}(i) \in B_i, i = 1, \dots, l \right) = \int_{B_1} \dots \int_{B_l} M(\omega, d\omega^1) M(\omega^1, d\omega^2) \dots M(\omega^{l-1}, d\omega^l)$$

Puis on note $\bar{\theta}$ l'opérateur de décalage sur $\Omega^{\mathbb{N}}$ c.a.d. $(\bar{\theta}\bar{\omega})(n) = \bar{\omega}(n+1)$ et finalement $\bar{Q} = \bar{Q} \otimes \bar{P}_\omega$. La loi \bar{Q} est celle du processus $(\bar{\omega}(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Montrons que le système $(\Omega^{\mathbb{N}}, \bar{Q}, \bar{\theta})$ est stationnaire ergodique.

D'abord le fait qu'il est stationnaire découle du fait que \bar{Q} est invariante. Les détails sont exactement comme dans la preuve du lemme 9.

Pour l'ergodicité il faut voir que chaque ensemble invariant A a une probabilité triviale. Pour un événement invariant A on pose $\varphi(\omega) = \bar{P}_\omega(A)$ la probabilité qu'un processus commençant à ω soit dans A . Si on regarde la suite de variables aléatoires $(\varphi(\bar{\omega}(n)))_{n \in \mathbb{N}}$ on trouve que c'est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{G}_n = \sigma(\bar{\omega}(0), \dots, \bar{\omega}(n))$. En effet

$$\varphi(\bar{\omega}(n)) = \bar{P}_{\bar{\omega}(n)}(A) = E_{\bar{Q}}(\mathbf{1}_{\bar{\theta}^n A} | \mathcal{G}_n) = E_{\bar{Q}}(\mathbf{1}_A | \mathcal{G}_n)(\bar{\omega}(0))$$

où la deuxième égalité est due à la propriété de Markov et la troisième à l'invariance de A . On voit que cette martingale est fermée et converge donc \bar{Q} p.s. et dans $L^1(\bar{Q})$:

$$\varphi(\bar{\omega}(n)) \rightarrow \mathbf{1}_A \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Montrons que $Q(\varphi(\bar{\omega}) \notin \{0, 1\}) = 0$. Regardons un intervalle $[a, b]$ ne contenant pas 0 et 1. Le théorème de Birkhoff nous dit que

$$\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \mathbf{1}_{\{\varphi(\bar{\omega}(n)) \in [a, b]\}} \rightarrow E_{\bar{Q}}(\mathbf{1}_{\{\varphi(\bar{\omega}(n))(0) \in [a, b]\}} | \mathcal{I})$$

où \mathcal{I} est la tribu invariante. Comme $\varphi(\bar{\omega}(n))$ tend presque sûrement vers une indicatrice le terme à gauche vaut 0 et en intégrant par rapport à \bar{Q} on obtient

$$0 = \bar{Q}(\varphi(\bar{\omega}(0)) \in [a, b]) = \bar{Q}(\varphi(\omega) \in [a, b])$$

Ceci montre que $Q(\varphi(\bar{\omega}) \notin \{0, 1\}) = 0$.

On sait donc que $\varphi(\omega)$ est une fonction indicatrice. Il existe $B \subset \Omega$, $\varphi(\omega) = \mathbf{1}_B$. De plus, la propriété de Markov et l'invariance de A impliquent que $M\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_B$, \bar{Q} -p.s., et donc P -p.s.. Mais

$$\mathbf{1}_B = M\mathbf{1}_B \geq \omega_0^+ \mathbf{1}_{\theta B} \quad , \quad P\text{-p.s..}$$

On peut conclure que $\mathbf{1}_B \geq \mathbf{1}_{\theta B}$, P -p.p. et alors $E_P(\mathbf{1}_B) = E_P(\mathbf{1}_{\theta B})$ implique que $\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{\theta B}$, P -p.p.. Mais par l'ergodicité de P , $P(B) \in \{0, 1\}$ et alors $\bar{Q}(B) \in \{0, 1\}$. Comme $\bar{Q}(A) = E_{\bar{Q}}\varphi(\omega)$, on peut conclure \square

4.2 Preuve alternative du théorème 8

Démonstration. Maintenant que nous avons les outils techniques nous nous mettrons à prouver encore une fois le théorème concernant la vitesse de la marche. La preuve consiste à couper la variable aléatoire en deux parties et les analyser séparément : une partie martingale et une partie dérive. On définit $d(x, \omega) = E_\omega^x(X_1 - x)$. Alors

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1} - d(X_{i-1}, \omega)) + \sum_{i=1}^n d(X_{i-1}, \omega) \\ &\stackrel{\text{déf}}{=} M_n + \sum_{i=1}^n d(X_{i-1}, \omega) \end{aligned}$$

Regardons d'abord le processus M_n . Sous P_ω^0 c'est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{G}_n = \sigma(M_1, \dots, M_n)$. Démontrons que sa moyenne $\frac{M_n}{n}$ tend vers 0 \mathbb{P}^0 - p.s.. Il découle directement de la définition que $|M_{n+1} - M_n| \leq 2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} E_\omega^0(e^{\lambda M_n}) &= E_\omega^0 \left(e^{\lambda M_{n-1}} E_\omega^0(e^{\lambda(M_n - M_{n-1})} | \mathcal{G}_{n-1}) \right) \\ &\leq E_\omega^0 \left(e^{\lambda M_{n-1}} E_\omega^0 \left(\frac{(M_n - M_{n-1}) + 2}{4} e^{2\lambda} + \frac{2 - (M_n - M_{n-1})}{4} e^{-2\lambda} | \mathcal{G}_{n-1} \right) \right) \\ &= E_\omega^0 \left(e^{\lambda M_{n-1}} \left(\frac{e^{2\lambda} + e^{-2\lambda}}{2} \right) \right) \\ &\leq E_\omega^0 \left(e^{\lambda M_{n-1}} e^{2\lambda^2} \right) \end{aligned}$$

et par récurrence $E_\omega^0(e^{\lambda M_n}) \leq e^{2n\lambda^2}$. On peut donc calculer

$$\begin{aligned} P_\omega^0 \left(\left| \frac{M_n}{n} \right| \geq \varepsilon \right) &= P_\omega^0(M_n \geq \varepsilon n) + P_\omega^0(-M_n \geq \varepsilon n) \\ &= P_\omega^0(e^{\lambda M_n} \geq e^{\lambda \varepsilon n}) + P_\omega^0(e^{-\lambda M_n} \geq e^{\lambda \varepsilon n}) \end{aligned}$$

L'inégalité de Markov implique

$$\begin{aligned} P_\omega^0 \left(\left| \frac{M_n}{n} \right| \leq \varepsilon \right) &\leq e^{-\lambda \varepsilon n} (E(e^{\lambda M_n}) + E(e^{-\lambda M_n})) \\ &\leq 2e^{n(-\varepsilon \lambda + 2\lambda^2)} \end{aligned}$$

On pose $\lambda = \frac{\varepsilon}{4}$ et on obtient finalement

$$P_\omega^0 \left(\left| \frac{M_n}{n} \right| \geq \varepsilon \right) \leq 2e^{-n \frac{\varepsilon^2}{8}}.$$

Si on pose alors $\varepsilon = n^{-1/4}$ on voit que

$$\sum_n P_\omega^0 \left(\left| \frac{M_n}{n} \right| \geq n^{-1/4} \right) < \infty.$$

Avec le lemme de Borel-Cantelli on peut conclure que

$$\frac{M_n}{n} \rightarrow 0 \quad , \mathbb{P}^0\text{-p.s.}$$

Pour calculer la vitesse de la marche il suffit donc de calculer le comportement de la dérive en utilisant les résultats concernant les chaînes auxiliaires. On peut écrire

$$\sum_{i=1}^n d(X_{i-1}, \omega) = \sum_{i=1}^n d(0, \bar{\omega}(i-1))$$

Comme le processus $\bar{\omega}(n)$ est ergodique sous la mesure $\bar{Q} \otimes P_\omega^0$ on peut appliquer le théorème de Birkhoff et obtient

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(0, \bar{\omega}(i-1)) \rightarrow E_{\bar{Q}}(d(0, \bar{\omega}(0))) \quad \bar{Q} \otimes P_\omega^0\text{-p.s.}$$

Calculons cette espérance : Dans un milieu fixé ω la quantité $d(0, \omega)$ vaut

$$d(0, \omega) = E_\omega^x(X_1) = \omega_0^+ - \omega_0^-$$

Et on obtient à la fin

$$\begin{aligned} & E_{\bar{Q}}(d(0, \bar{\omega}(0))) \\ = & \frac{E_P[\Lambda(\omega)(\omega_0^+ - \omega_0^-)]}{E_P(\Lambda(\omega))} \quad (\text{comme } \frac{dQ}{dP} = \Lambda) \\ = & \frac{E_P\left(\frac{1}{\omega_0^+} [1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i \rho_j] (\omega_0^+ - \omega_0^-)\right)}{E_P(\Lambda(\omega))} \\ = & \frac{1 + E_P(\rho_1 [1 + \sum_{i=2}^{\infty} \prod_{j=2}^i \rho_j]) - E_P(\rho_0 [1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i \rho_j])}{E_P(\Lambda(\omega))} \\ = & \frac{1}{E_P(\Lambda(\omega))} = \frac{1 - E_P(\rho_0)}{E_P\left(\frac{1}{\omega_0^+}\right)} \end{aligned}$$

C'est le résultat souhaité. □

Chapitre 5

Comparaison avec les marches aléatoires simples

5.1 Différence conceptuelle

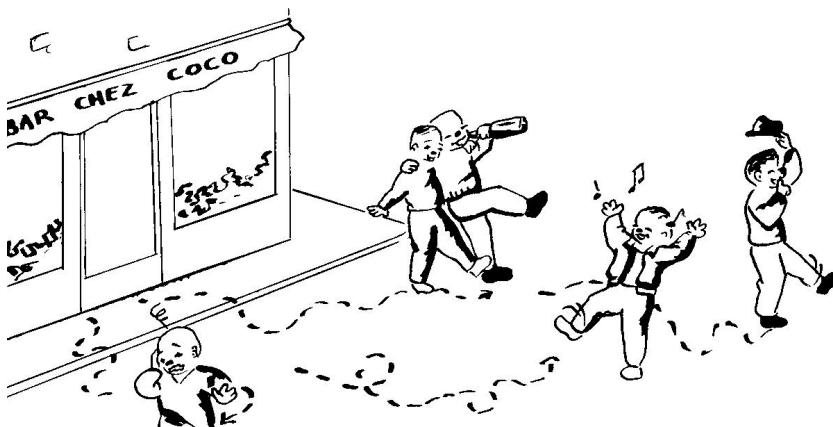


FIG. 5.1 – marche aléatoire simple

Toute la différence entre une MAMA et une marche aléatoire simple (MAS) consiste en la notion de milieu. Dans une MAS, le milieu est homogène : le comportement du point est le même, où qu'il se trouve. Dans une MAMA, en revanche, le milieu n'est pas homogène, et comporte des irrégularités qui influent sur le mouvement du point. On pourrait croire que c'est le non déterminisme du milieu qui crée la différence entre les deux types de marche : en effet, dans une MAMA, le milieu n'est déterminé que par rapport à la probabilité P , et donc le comportement de la MAMA peut *a priori* dépendre du milieu. En fait, il n'en est rien, du moins dans les cas que nous avons étudiés, puisque les propriétés que nous avons énoncées sont vraies \mathbb{P}^0 -p.s., c.à.d. vraies P_ω^0 -p.s. pour P -presque tout milieu ω . Il faut comprendre que, si les différents milieux ω sont certes distincts, leurs propriétés globales sont en revanche identiques : en fait, le tirage au sort du milieu selon la probabilité P ne traduit pas tant le fait qu'on veuille

étudier ce qui se passe dans des milieux différents, que celui qu'on ne sache pas décrire précisément le milieu, juste ses propriétés statistiques : le milieu dans lequel on se place est un milieu « normal » par rapport à la loi de P , qui dit que les ω_z (càd. le comportement de chaque point du milieu vis-à-vis du mobile) sont indépendants et de même loi.

Pour rendre plus pertinente la comparaison entre MAS et MAMA, on associe à chaque MAMA son pendant simple *via* le procédé suivant :

Définition 4. Soit une marche aléatoire en milieu aléatoire, déterminée par la loi de ω_0 . Appelons *marche aléatoire simple associée* à cette MAMA la MAS déterminée par

$$\omega_z = (E_P(\omega_0^-), E_P(\omega_0^0), E_P(\omega_0^+)) \quad \forall z \in \mathbb{Z}$$

Remarque 10. En fait, on peut définir cette MAS de manière très similaire à la MAMA. Si on imagine en effet que les variations du milieu se font non pas dans l'espace mais dans le temps, en suivant exactement la même démarche que dans le paragraphe 1.2, on arrive à la définition suivante :

Définition 5. – On définit un *milieu temporel* $\omega^* = (\omega_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les composantes sont indépendantes et de même loi, chacune suivant la loi de ω_0 . Soit P^* la loi de ω^* .

– Pour un milieu ω^* donné, le comportement de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors déterminé par la règle : $P_{\omega^*}^v(X_0 = v) = 1$ et $P_{\omega^*}^v(X_{n+1} = y | X_n = z) = \omega_n^*(y - z)$.

– Puis on définit la loi générale de la marche par $\mathbb{P}_*^v(G) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\Omega^*} P_{\omega^*}^v(G) P^*(d\omega^*)$.

La définition 5 redonne exactement la même marche que la définition 4, ce qui montre sa naturalité. L'intérêt est de montrer que c'est bien la notion de milieu, càd. d'irrégularité *spatiale*, qui est à l'origine des différences entre les deux types de marches.

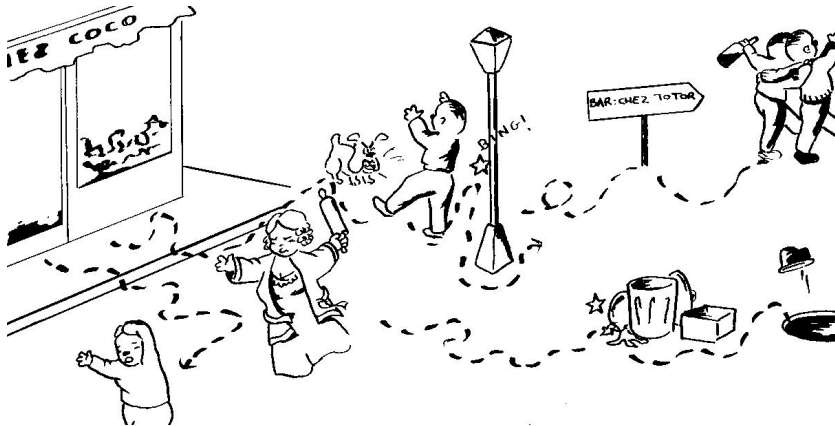


FIG. 5.2 – marche aléatoire en milieu aléatoire

5.2 Comparaison des théorèmes

La loi des grands nombre et le théorème central limite nous permettent de décrire le comportement des MAS :

Théorème 15. *Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la MAS associée à une MAMA (X_n) . Alors :*

1. *Si $E_P(\omega_0^+) > E_P(\omega_0^-)$, la marche (Y_n) tend vers $+\infty$ \mathbb{P}_*^0 -p.s., avec une vitesse de dérive $E_P(\omega_0^+) - E_P(\omega_0^-)$.*
2. *Si $E_P(\omega_0^+) < E_P(\omega_0^-)$, la marche (Y_n) tend vers $-\infty$ \mathbb{P}_*^0 -p.s., avec une vitesse de dérive $E_P(\omega_0^+) - E_P(\omega_0^-)$.*
3. *Si $E_P(\omega_0^+) = E_P(\omega_0^-)$, ($\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n = +\infty$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} Y_n = -\infty$) \mathbb{P}_*^0 -p.s., avec $\frac{Y_n}{n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$.*

Plusieurs observations s'imposent :

1. Si on a pour une MAMA $P(\omega_0 = (p^-, p^0, p^+)) = 1$, alors la MAMA est une marche aléatoire simple, la même que la MAS associée. On vérifie que dans ce cas les théorèmes des chapitres 2 et 3 donnent bien les mêmes résultats que le théorème 15.
2. Contrairement à ce que l'intuition affirmerait, une MAMA peut partir dans une direction opposée à la MAS associée. Prenons ainsi le cas $P(\omega_0 = (0,4; 0; 0,6)) = 0,76$ et $P(\omega_0 = (0,8; 0; 0,2)) = 0,24$. Alors on a $E_P(\omega_0^+) - E_P(\omega_0^-) = 0,008 > 0$, donc la MAS part à droite; et pourtant $E_P(\ln \rho_0) = 0,024... > 0$, donc la MAMA part à gauche.
3. Nous avons observé dans la remarque 7 qu'une MAMA pouvait dériver à l'infini de plus en plus lentement, avec une vitesse de dérive asymptotique nulle. On voit que ce n'est pas le cas pour les MAS.
4. En vertu de la remarque 6, on s'aperçoit qu'une MAMA est toujours moins rapide (en valeur absolue) que la MAS associée. Au passage, noter aussi que la remarque 6 exclut que la MAMA ait une vitesse de dérive de signe contraire à la MAS associée, ce qui modère le point 2 ci-dessus¹.

Les marches aléatoires en milieu aléatoire ont donc un comportement bien spécifique par rapport aux marches aléatoires simples. Nous allons essayer d'expliquer certaines de ces particularités, en particulier les observations 3 et 4 ci-dessus, à l'aide de la notion de puits de potentiel.

5.3 Une interprétation : notion de puits

5.3.1 Profil de potentiel

Pour bien comprendre les MAMA, il faut voir comment le milieu influe sur le comportement du mobile. Certains points ont plutôt tendance à envoyer le mobile vers la droite, d'autres vers la gauche : le théorème 6 nous suggère que c'est la grandeur $\ln(\rho_z)$ qui caractérise bien l'attitude du point z vis-à-vis du mobile. À partir de là, on peut représenter le milieu par un profil de potentiel, où chaque point z correspond à une pente $\ln(\rho_z)$: le mobile aura ainsi tendance à descendre vers les potentiels les plus faibles.

¹On vérifie bien dans l'exemple proposé que $E_P(\rho_0) = 1,2 \geq 1$ et $E_P(\frac{1}{\rho_0}) = 1,466... \geq 1$; la vitesse de dérive de la MAMA est donc nulle.

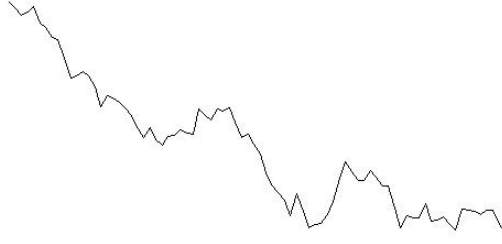


FIG. 5.3 – Un exemple de profil de potentiel : on a pris $P(\omega_0^+ \in [x, x + dx]) = (\frac{1}{2} + x)dx$, et $\omega_0^0 = 0$ p.s.. Sur cette figure 81 points sont représentés.

5.3.2 Effet des puits

On appelle *puits* une région du profil en forme de gorge : dans la partie gauche de cette région, le mobile a tendance à être envoyé à droite, et vice-versa. On comprend donc que le mobile va rester piégé dans le puits, jusqu'à ce que le hasard de sa marche le fasse aller à contre-courant de la pente suffisamment longtemps pour qu'il en sorte. Formalisons cela en termes mathématiques :

Supposons qu'on ait deux points consécutifs z_{F-} et z_{F+} du milieu tels que :

$$\begin{cases} \text{pour } z_{F-} - L_- < z \leq z_{F-} & \ln(\rho_z) < 0 \\ \text{pour } z_{F+} \leq z < z_{F+} + L_+ & \ln(\rho_z) > 0 \end{cases}$$

où L_- et L_+ notent des entiers strictement positifs. C'est la description d'un puits de fond $\frac{z_{F-} + z_{F+}}{2}$, de longueur L_- à gauche, et L_+ à droite. Imaginons qu'à un moment donné, le mobile soit au point z_{F-} . Alors, par la formule (2.2), la probabilité que le mobile sorte du puits par la gauche avant qu'il n'atteigne le point z_{F+} est :

$$\nu(z_{F-} - L_-, z_{F-}, z_{F+}) = \frac{1}{1 + \sum_{i=z_{F-}-L_-+1}^{z_{F-}} e^{-\sum_{j=i}^{z_{F-}} \ln(\rho_j)}}$$

Or, cette valeur est « très petite ». Plus précisément, soit $-\alpha_-$ la moyenne des $\ln(\rho_z)$ qui sont négatifs. Le terme dominant du dénominateur est $e^{-\sum_{j=z_{F-}-L_-+1}^{z_{F-}} \ln(\rho_j)}$, et comme les $\ln \rho_j$ sont de l'ordre de $-\alpha_-$, la probabilité que le mobile sorte du puits par la gauche est de l'ordre de $e^{-\alpha_- L_-}$. En particulier, si L_- est suffisamment grand, $e^{-\alpha_- L_-} \ll \frac{1}{L_-+1}$, qui représente la probabilité du même événement dans un profil plat.

De même, une fois que le mobile se sera retrouvé en z_{F+} , il aura une probabilité beaucoup plus forte de revenir en z_{F-} que de sortir du puits par la droite, la probabilité de sortie étant de l'ordre de $e^{-\alpha_+ L_+}$, où α_+ est la moyenne des $\ln(\rho_z)$ qui sont positifs. D'où un mouvement de navette du mobile au fond du puits, qui dure un temps de l'ordre de $e^{\min(\alpha_- L_-, \alpha_+ L_+)}$. Par conséquent, il est clair que l'existence de puits, en piégeant le mobile, va ralentir la marche. Cela explique qu'on ait une vitesse de dérive plus faible dans le cas d'une MAMA que dans celui d'une MAS.

5.3.3 La mesure \bar{Q}

On peut voir ce phénomène d'une autre façon : imaginons une MAMA qui dérive vers la droite. Appelons *points-descentes* les points qui ont tendance à envoyer le mobile vers la droite, et *points-côtes* ceux qui ont tendance à le renvoyer vers la gauche. Si p_c est la proportion de points-côtes, on pourrait s'attendre à ce que le mobile se retrouve avec une probabilité $1 - p_c$ sur un point-descente et une probabilité p_c sur un point-côte au cours de son évolution. Mais cela n'est pas vrai : en effet, puisque l'évolution du mobile se fait de gauche à droite, un point-descente, qui a tendance à laisser passer le mobile vers la droite, ne sera souvent visité qu'une fois. Au contraire, les points-côtes vont généralement renvoyer le mobile en arrière, et celui-ci reviendra pour être renvoyé à nouveau jusqu'à ce qu'il franchisse la côte. Finalement, le milieu que voit le mobile, c.à.d. celui qui est représenté par la probabilité \bar{Q} (cf remarque 9), surreprésente les points-côtes au niveau du mobile par rapport à la probabilité P . Le mobile va donc plus lentement que s'il était dans un milieu homogène, c.à.d. que dans le cas d'une marche aléatoire simple.

Plus généralement, puisque le mobile a tendance à rester piégé au fond des puits, \bar{Q} surreprésente les milieux où le mobile est au fond d'un puits. C'est cette déformation du milieu vu par le point par rapport au milieu vu de l'extérieur qui est à l'origine des différences de comportement entre MAMA et MAS.

5.3.4 Cas transitoire à vitesse nulle

La notion de puits permet aussi de comprendre les cas de dérive à l'infini avec vitesse nulle. Comme nous l'avons vu ci-dessus, plus un puits est profond et plus il ralentit la marche. Plaçons-nous dans un cas où le mobile dérive vers la droite : cela signifie que le profil est globalement en pente (de gauche à droite), et par conséquent l'existence de puits très profonds est improbable, puisqu'elle suppose que le profil soit en montée sur une longue distance. Néanmoins, au cours de l'évolution du mobile, celui-ci va s'aventurer de plus en plus loin et finira donc par rencontrer tous les types de profils locaux, y compris les plus improbables. On s'attend donc à ce que le mobile soit piégé de plus en plus longtemps dans des puits de plus en plus profonds à mesure de son évolution.

À partir de là, deux cas sont possibles :

- Soit les puits les plus profonds arrivent assez vite pour faire tendre la vitesse vers zéro à l'infini,
- Soit les grands puits sont suffisamment rares pour que le mobile les traverse en conservant une vitesse globale de dérive.

C'est donc la structure des puits qui détermine l'existence de deux cas : une vitesse de dérive globale non nulle lorsqu'il y a peu de puits très profonds, ou une marche de plus en plus lente lorsqu'il y en a beaucoup.

5.3.5 Approche heuristique du théorème 8

Avertissement Cette partie vise simplement à une interprétation intuitive du théorème 8, elle ne prétend pas à la rigueur mathématique.

Nous allons essayer de déterminer heuristiquement le critère du théorème 8 qui détermine si la vitesse de dérive asymptotique est nulle ou non. Plaçons-nous

dans le cas où le mobile part vers $+\infty$, et soit p_c la proportion de points-côtes. Cherchons le temps que le mobile met à se rendre au point N : supposons que ce soient les puits de longueur L qui influencent le plus le mouvement du point. La probabilité d'avoir un puits de longueur L est essentiellement limitée par la probabilité d'avoir L points-côtes consécutifs, qui est de p_c^L . Il y a donc environ Np_c^L puits de longueur L entre 0 et N , et chacun de ces puits bloque le mobile pendant un temps de l'ordre de $e^{\alpha+L}$, donc finalement le mobile va mettre un temps $N(e^{\alpha+p_c})^L$ à atteindre le point N .

Alors, de deux choses l'une :

- Soit $e^{\alpha+p_c} > 1$ et dans ce cas, plus les puits sont profonds et plus ils freinent le mobile efficacement. Au cours de l'évolution du mobile, les puits qu'il faudra prendre en compte seront donc de plus en plus profonds, et le mobile ira de plus en plus lentement, avec une vitesse asymptotique nulle puisque $(e^{\alpha+p_c})^L \rightarrow_{n \rightarrow \infty} +\infty$.
- Soit $e^{\alpha+p_c} \leq 1$ et alors les puits les plus profonds ne sont pas plus efficaces que les petits puits, car ils sont trop rares. Donc la vitesse asymptotique de dérive du mobile est non nulle.

Pour savoir dans quel cas on se trouve, il faut donc évaluer $e^{\alpha+p_c}$. Or α_+ est l'ordre de grandeur des $\ln \rho_z$ qui sont positifs, donc e^{α_+} est l'ordre de grandeur des ρ_z qui sont plus grands que 1. Comme p_c est la proportion de ces mêmes ρ_z ,

$$e^{\alpha_+ p_c} \simeq E_P[\mathbb{1}_{\{\rho_0 > 1\}} \rho_0]$$

On est finalement arrivé à dire que la marche était freinée à l'infini pour $E_P[\mathbb{1}_{\{\rho_0 > 1\}} \rho_0] \gtrsim 1$. D'après le théorème 8, le véritable résultat est $E_P[\rho_0] > 1$. Notre conclusion heuristique n'est donc pas très éloignée de la réalité, ce qui montre que la notion de puits est une bonne interprétation du comportement de la MAMA.

5.4 Exemples numériques

Dans ce chapitre nous comparons les résultats théoriques avec des observations en expérience numérique.

5.4.1 Vitesse dans un milieu simple

On considère un milieu avec seulement deux types de points.

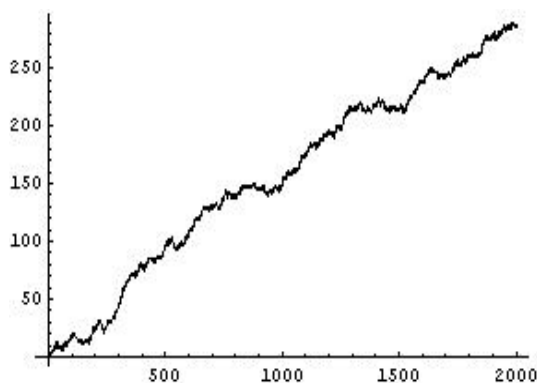
$$P(\omega_0^+ = 1 - \omega_0^- = 0, 7) = 1 - P(\omega_0^+ = 1 - \omega_0^- = 0, 5) = 0, 5$$

D'après les résultats théoriques nous nous attendons à une vitesse $v_P = \frac{1}{6}$. Dans l'expérience numérique nous obtenons pour $n = 2000$ les valeurs suivantes pour X_n

320	418	290	306
364	442	290	328
300	382	356	370
342	336	296	348
322	248	292	318
329,6	365,2	304,8	334,0

*Les valeurs dans une colonne viennent du même milieu
La dernière ligne comporte les valeurs moyennes des milieux*

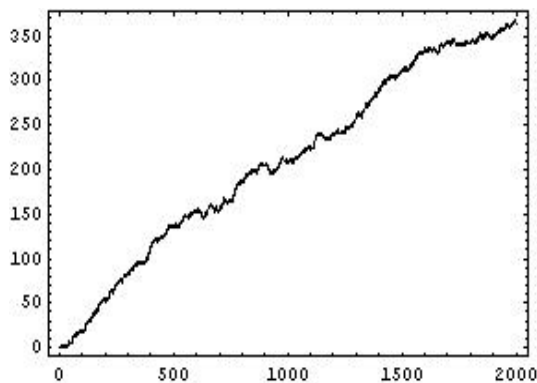
On obtient comme valeur moyenne $\overline{X_{2000}} = 337,4$. La valeur théorique est 333,3.



MAMA pour $n = 2000$

Même dans ce cadre sans grands puits on voit clairement des régions où la marche avance plus lentement qu'ailleurs. Une expérience avec la marche simple associée nous montre que la marche simple avance plus vite. Quelques valeurs pour $n = 2000$

390	466	492	384	324
376	406	348	478	372



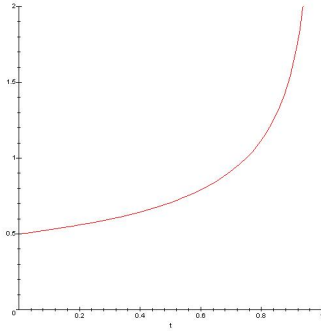
MAS pour $n = 2000$

On obtient comme valeur moyenne $\overline{X_{2000}} = 403,6$. La valeur théorique est 400.

5.4.2 Le cas à vitesse nulle

Nous regardons une mesure P à densité. Posons $P\{\omega_0^0 = 0\} = 1$, et

$$P\{\omega_0^+ < t\} = 1 - \sqrt{1-t}$$



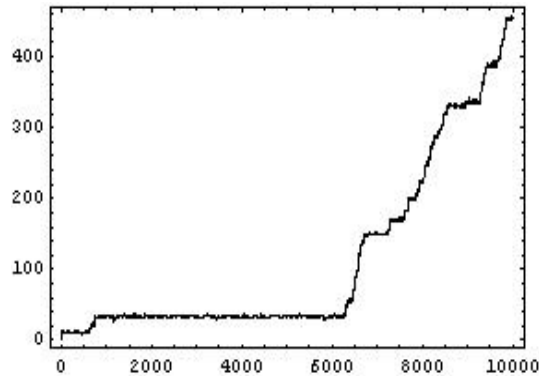
$$t \mapsto \frac{d}{dt} P(\omega_0^+ \leq t)$$

On est bien dans le cas transitoire, car $E[\ln \rho] = -\ln(4) < 0$, mais on a $E[\rho] = E[\rho^{-1}] = +\infty$ donc la vitesse est nulle. Quelques valeurs pour $n = 10000$

49	437	455
37	433	151
19	555	35
31	577	35
5	505	35
39	505	455
49	433	509
49	533	35
34,8	497,3	209,4

Les valeurs dans une colonne viennent du même milieu.

On peut bien observer le phénomène dans l'exemple suivant

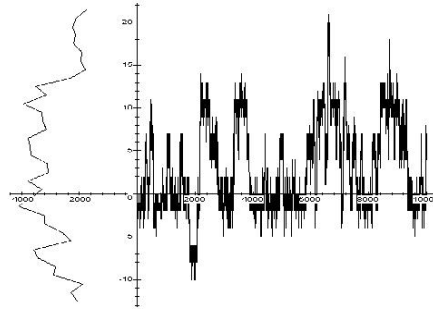


MAMA dans le milieu de la troisième colonne

Il y a un grand obstacle à $X = 35$ ($\omega_{35}^+ = 0.017$ et $\omega_{37}^+ = 0.065$). Dès que la marche a passé cet obstacle elle avance vite mais rencontre un autre obstacle vers $X = 133$ etc. Les obstacles sont extrêmement rares mais quand ils apparaissent ils ralentissent la marche tellement qu'ils rendent l'accroissement sous-linéaire.

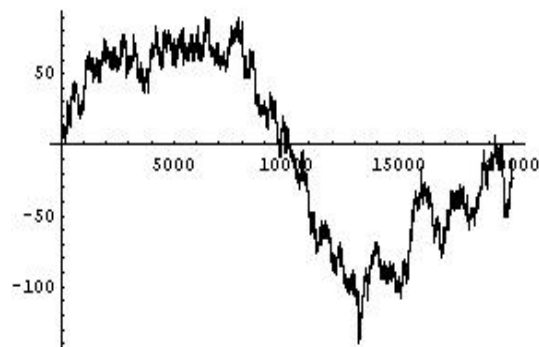
5.4.3 Le cas récurrent

Regardons maintenant le cas récurrent. Supposons que ω^+ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ et $\omega^- = 1 - \omega^+$. Dans ce cadre la marche rencontre très souvent des obstacles et quand elle sort d'un puits elle retombe presque instantanément dans un autre. Le mouvement devient presque statique.



MAMA dans un milieu récurrent pour $n=10000$
À gauche, le profil de potentiel

Si on compare avec la marche simple :



MAS récurrente pour $n=20000$

En fait un théorème de Sinai (cf. [3] page 406) dit que la distance caractéristique de la MAMA en milieu récurrent croît comme $(\ln(n))^2$ (càd $\frac{X_n}{(\ln(n))^2} \xrightarrow{proba} C(\omega)$) pendant que la MAS croît comme \sqrt{n} d'après le théorème central limite.

Bibliographie

- [1] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, John Wiley & Sons, Inc. (1965)
- [2] R. Durrett, *Probability : Theory and example*, 2nd ed., Duxbury Press, Belmont (1996)
- [3] B. Hughes, *Random Walks and Random Environments, Volume 2*, Clarendon Press, Oxford (1996)
- [4] A.S. Sznitman, *Topics in Random Walks in Random Environment*
- [5] O. Zeitouni, *Lecture Notes On Random Walks In Random Environment*, (2003) (disponible sur [http://www- ee.technion.ac.il/~zeitouni/](http://www-ee.technion.ac.il/~zeitouni/))