Une inégalité de Harnack

Rémi Peyre

6 octobre 2006

1 Introduction

Soit $d \geqslant 1$ un entier ; on considère l'espace $\mathbb{R}^d$ muni d'un champ de vecteurs $\overrightarrow{v}$ localement lipschitzien. On peut alors définir la diffusion brownienne avec dérive $\overrightarrow{v}$ par

$$\overrightarrow{\mathrm{d}X_t} = \overrightarrow{\mathrm{d}B_t} + \overrightarrow{v}(X_t)\,\mathrm{d}t, \tag{1}$$

où $(B_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien de $\mathbb{R}^d$, de constante de diffusion σ, c'est-à-dire que pour $t \leqslant u$:

$$\overrightarrow{B_tB_u} \overset{\text{(loi)}}{\sim} \mathcal{N}\left(\overrightarrow{0}, \sigma(u-t)\mathbf{I_d}\right). \tag{2}$$

L'équation stochastique (1) induit un processus Markovien que nous appellerons *diffusion dérivante* ; on notera $(\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ les lois de ce processus.
Tout au long de ce mémoire nous faisons l'hypothèse que le processus $\mathbb{P}$ est récurrent positif au sens de Harris ; $\mathbb{P}$ définit alors une unique probabilité d'équilibre μ. On peut montrer que μ est équivalente à la mesure de Lebesgue : elle s'écrit

$$\mathrm{d}\mu = f\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

où $f > 0$ est caractérisée par l'équation différentielle (à prendre au sens des distributions) :

$$\frac{\sigma}{2}\Delta f - \operatorname{div}(f\overrightarrow{v}) = 0. \tag{4}$$

Remarque. L'existence de f découle de la théorie générale des équations uniformément elliptiques, pour laquelle on pourra par exemple se référer à [1]. Néanmoins, dans la mesure où notre approche vise précisément à contourner ladite théorie générale, nous nous contenterons ici de partir de l'existence de la mesure μ ; l'existence de la densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, en fait, découlera du travail ultérieur.

L'inégalité qui fait l'objet de ce mémoire donne un critère de régularité pour f en fonction de la régularité locale de $\overrightarrow{v}$. Plus précisément, notre énoncé consiste en le

Théorème 1. *Soit $o \in \mathbb{R}^d$; on note $V = |\overrightarrow{v}(o)|$. On suppose qu'il existe un réel $R > 0$ et une constante $k \geqslant 0$ tels que, sur $B(o,R)$, $\overrightarrow{v}$ soit k-lipschitzienne.*

Alors $\ln f$ *est localement lipschitzienne en* o [1]*, avec une constante de Lipschitz* k' *qui peut s'exprimer uniquement en fonction de* V*,* R *et* k*.*

Ce genre de théorème est classique, cf. p. ex. [2], pp. 183 et 235, mais ce mémoire vise à le démontrer par une approche différente de celles auxquelles nous sommes habituées. L'enjeu est de faire apparaître une structure probabiliste de couplage, qui exprimera en quelque sorte que « cela coûte pratiquement le même prix d'aller voir quelqu'un que d'aller voir son voisin ».

2 Notations

Introduisons tout d'abord quelques notations en vigueur dans ce mémoire :

- On raisonnera à l'aide de grandeurs physiquement homogènes, ce qui explique l'introduction de la constante de diffusion σ définie en (2).
- Les vecteurs seront notés $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, ... et les matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, ...
- Une probabilité $\mathbb{P}$ étant donnée, l'espérance associée sera indiquée à l'aide de crochets :
$$\mathbb{P}[f] = \int f(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega). \tag{5}$$
- Pour $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^d$ un vecteur, $|\overrightarrow{u}|$ notera la norme euclidienne de $\overrightarrow{u}$.
- La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ sera notée $\mathrm{d}x$; pour $A \subset \mathbb{R}$, resp. $\mathbb{R}^d$, on notera $|A| = \int_A \mathrm{d}x$.
- Pour $x \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$, la boule ouverte de rayon r centrée sur x sera notée $B(x, r)$; $B(o, r)$ sera simplement notée B_r.
- Le temps d'atteinte d'un fermé F par un processus aléatoire (continu) sera noté τ_F.
- Le complémentaire d'un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ sera noté $\complement U$.
- La différence symétrique de deux événements sera notée par $\triangle$:
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \tag{6}$$
- Les constantes importantes qui apparaîtront dans ce texte seront notées K_1, K_2, ... Les constantes « muettes » ne servant que provisoirement seront, elles, notées c_1, c_2, ... et renumérotées à chaque énoncé.

3 Rappels sur les semigroupes à densité

☞ *Le lecteur intéressé par un traitement plus complet de la question pourra se référer par exemple à [3].*

Définition 2. *Soit* $(P_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ *un processus sous-markovien à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*. On dit que le semigroupe* $(P^t)_{t \geqslant 0}$ *engendré par le processus (ou le processus lui-même) est* à densité par rapport à la mesure de Lebesgue *s'il existe une fonction*

[1] Ou plus précisément : $\ln f$ admet un représentant continu au voisinage de o, qui est lipschitzien.

mesurable $p :]0,\infty[\times(\mathbb{R}^d)^2 \longrightarrow [0,\infty[$ *vérifiant :*

$$\forall t>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^d \quad \forall A\subset\mathbb{R}^d \text{ mesurable} \quad P_x(X_t\in A)=\int_A p^t(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{7}$$

p est alors appelée la densité de transition *du semigroupe* $(P^t)_{t\geqslant 0}$.

Quelques propriétés immédiates des densités de transition :

Proposition 3.

1. *Pour tous* $t>0$ *et* $x\in\mathbb{R}^d$*, la fonction* $p^t(x,\cdot)$ *est unique modulo l'identité y-p.p.*
2. *Pour tous* $t>0$ *et* $x\in\mathbb{R}^d$*, on a*
$$\int_{\mathbb{R}^d} p^t(x,y)\,\mathrm{d}y \leqslant 1 \tag{8}$$
3. *Pour tous* $t,u>0$*,* $x,z\in\mathbb{R}^d$*, p vérifie la* relation de Chapman-Kolmogorov *:*
$$p^{t+u}(x,z)=\int_{\mathbb{R}^d} p^t(x,y)p^u(y,z)\,\mathrm{d}y. \tag{9}$$

On peut alors définir les fonctions de Green :

Définition 4. *Soit* $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *un processus sous-markovien continu, à densité sur* $\mathbb{R}^d$ *; soit D un domaine de* $\mathbb{R}^d$*. Soit* ∂ *un point-cimetière ; on note* X^* *le processus X* tué en sortant de *D, défini par*

$$X_t^* = \begin{cases} X_t & \text{si } t<\tau_{^cD} \ ; \\ \partial & \text{sinon.} \end{cases} \tag{10}$$

Il est clair qu'alors $(X_t^*)_{t\geqslant 0}$ *est également un processus sous-markovien à densité ; soit* p_* *la densité de transition associée. Alors la fonction* $G_D : (\mathbb{R}^d)^2 \longrightarrow [0,\infty]$ *définie par*

$$G_D(x,y)=\int_0^\infty p_*^t(x,y)\,\mathrm{d}t \tag{11}$$

est appelée la fonction de Green *associée au processus X et au domaine D.*

De nouveau, $G_D(x,\cdot)$ est unique y-p.p. L'interprétation probabiliste de G_D est donnée par :

$$\forall x\in\mathbb{R}^d \quad \forall A\subset\mathbb{R}^d \text{ mesurable} \quad \int_A G_D(x,y)\,\mathrm{d}y = P_x\left[\int_0^{\tau_{^cD}} \mathbb{1}_{X_t\in A}\,\mathrm{d}t\right]. \tag{12}$$

☞ *Dans la suite de ce mémoire, nous montrerons que la diffusion dérivante est un processus à densité. Nous notons dès à présent sa densité de transition par p. Par ailleurs, on se fixe* $R_2<R$ *; la loi de la diffusion dérivante tuée en sortant de* B_{R_2} *est notée* $\mathbb{P}^*$ *et sa densité de transition est notée* p_**. La fonction de Green associée à la diffusion dérivante et à la boule* B_{R_2} *est notée* $G_{B_{R_2}}$*, ou simplement G.*

4 Noyau de l'équation stationnaire

La proposition qui est au cœur de notre approche est la suivante :

Proposition 5. *On se fixe $R_1 \in]0, R_2[$. Alors il existe une mesure non nulle θ sur ∂B_{R_1} telle qu'on ait pour tout y de B_{R_1} :*

$$f(y) = \int_{\partial B_{R_1}} G_{B_{R_2}}(x, y)\,\mathrm{d}\theta(x). \tag{13}$$

Preuve. L'idée consiste à s'intéresser aux excursions de la particule X entre les moments où elle rentre dans $\overline{B_{R_1}}$ et ceux où elle sort de B_{R_2}. Concrètement, on définit :

$$\begin{cases} T_0^* = \inf\{t \geqslant 0\,;\, X_t \notin B_{R_2}\}\,; \\ T_1 = \inf\{t > T_0^*\,;\, X_t \in \overline{B_{R_1}}\}\,; \\ T_n' = \inf\{t > T_n\,;\, X_t \notin B_{R_2}\}\,; \\ T_{n+1} = \inf\{t > T_n'\,;\, X_t \in \overline{B_{R_1}}\}. \end{cases} \tag{14}$$

$[T_i, T_i']$ est alors la i-ème excursion ; on note $\mathcal{T} = \{T_i\,;\, i \geqslant 1\}$ l'ensemble des temps de départs d'excursions.
Puisque μ est une mesure d'équilibre, le processus de loi $\mathbb{P}_\mu$ est stationnaire. Par conséquent on peut écrire, pour $A \subset B_{R_1}$ mesurable, $c_1 \geqslant 0$ un temps quelconque :

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mathbb{P}_\mu(X_{c_1} \in A) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_\mu(c_1 \in]T_i, T_i'[\text{ et } X_{c_1} \in A) + \mathbb{P}_\mu(c_1 < T_0^* \text{ et } X_{c_1} \in A). \end{aligned} \tag{15}$$

Comme $\mathbb{P}_\mu$-p.s. on a $T_0^* < \infty$ (par exemple par la proposition 18 *infra*), il s'ensuit que

$$\mu(A) = \lim_{c_1 \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_\mu(c_1 \in]T_i, T_i'[\text{ et } X_{c_1} \in A). \tag{16}$$

Étudions maintenant l'expression dans la limite. Les T_i sont des temps d'arrêt, donc on a par la propriété de Markov :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_\mu(c_1 \in]T_i, T'_i[\text{ et } X_{c_1} \in A)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_\mu \left[\mathbb{1}_{T_i < c_1} \mathbb{P}_{X_{T_i}} (c_1 - T_i < \tau_{{}^cB_{R_2}} \text{ et } X_{c_1 - T_i} \in A) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_\mu \left[\mathbb{1}_{T_i < c_1} \int_A p_*^{c_1 - T_i}(X_{T_i}, y)\, \mathrm{d}y \right] \\
&= \int_{[0,c_1[\times \partial B_{R_1}} \mathrm{d}\mathbb{P}_\mu \left((\exists i \geqslant 1)(T_i = t \text{ et } X_{T_i} = x) \right) \left(\int_A p_*^{c_1 - t}(x,y)\, \mathrm{d}y \right) \\
&\overset{\text{(Fubini)}}{=} \int_A \mathrm{d}y \int_{[0,c_1[\times \partial B_{R_1}} p_*^{c_1 - t}(x,y)\, \mathrm{d}\mathbb{P}_\mu \left((\exists i \geqslant 1)(T_i = t \text{ et } X_{T_i} = x) \right) \\
&\underset{u = c_1 - t}{=} \int_A \mathrm{d}y \int_{]0,\infty[\times \partial B_{R_1}} p_*^{u}(x,y)\, \mathrm{d}\mathbb{P}_\mu \left((\exists i \geqslant 1)(T_i = c_1 - t \text{ et } X_{T_i} = x) \right).
\end{aligned} \tag{17}$$

Finalement, c_1 n'intervient plus que par la mesure $\mathrm{d}\mathbb{P}_\mu \left((\exists i \geqslant 1)(T_i = c_1 - t \text{ et } X_{T_i} = x) \right)$, que nous noterons $\mathrm{d}\nu_{c_1}$ pour alléger. Pour ceux que nos notations laissent perplexes, précisons que $\mathrm{d}\nu_{c_1}$ est la mesure sur $]0, \infty[\times \partial B_{R_1}$ définie sur les rectangles mesurables par :

$$\nu_{c_1}(I \times B) = \mathbb{P}_\mu \left[\#\{ t \in c_1 - I\,;\, t \in \mathcal{T} \text{ et } X_t \in B \} \right]. \tag{18}$$

Pour étudier ν_{c_1}, nous avons besoin du processus stationnaire bilatère associé au processus stationnaire $\mathbb{P}_\mu$. Rappelons qu'il s'agit d'un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, de loi $\mathbb{P}^{\mathrm{st}}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(X_{t+u})_{u \geqslant 0}$ ait pour loi $\mathbb{P}_\mu$.
La définition de $\mathcal{T}$ peut s'étendre à notre processus bilatère, *via* :

$$t \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_t \in \partial B_{R_1} \\ \Big(\forall u < t \Big) \Big(\big((\forall v \in [u,t[)(X_v \in B_{R_2}) \big) \Rightarrow \big((\forall v \in [u,t[)(X_v \notin \overline{B_{R_1}}) \big) \Big). \end{array} \right. \tag{19}$$

On remarquera que cette définition de $\mathcal{T}$ est invariante par translation.

Les définitions de $\mathcal{T}$ données en (14) et (19) ne sont pas exactement les mêmes, même en restriction à $]0, +\infty[$; convenons donc de noter respectivement par $\mathcal{T}^{>0}$ et $\mathcal{T}^{\mathbb{R}}$ les ensembles définis par (14) et (19). La nuance entre $\mathcal{T}^{\mathbb{R}} \cap]0, +\infty[$ et $\mathcal{T}^{>0}$ est donnée par :

$$t \in \mathcal{T}^{>0} \quad \Leftrightarrow \quad t \in \mathcal{T}^{\mathbb{R}} \text{ et } (\exists u \in [0,t[)(X_u \notin B_{R_2}). \tag{20}$$

Dès lors, on écrit pour $B \subset \partial B_{R_1}$ et $t > 0$:

$$\begin{aligned}
&\nu_{c_1}(]0,t] \times B) = \mathbb{P}_\mu \left[\#\{ u \in [c_1 - t, c_1[\,;\, u \in \mathcal{T}^{>0} \text{ et } X_u \in B \} \right] \\
&\quad = \mathbb{P}^{\mathrm{st}} \left[\#\{ u \in [c_1 - t, c_1[\,;\, u \in \mathcal{T}^{\mathbb{R}} \text{ et } (\exists v \in [0,u[)(X_v \notin B_{R_2}) \} \text{ et } X_u \in B \right] \\
&= \mathbb{P}^{\mathrm{st}} \left[\#\{ u \in [-t, 0[\,;\, u \in \mathcal{T} \text{ et } (\exists v \in [-c_1, u[)(X_v \notin B_{R_2}) \text{ et } X_u \in B \} \right],
\end{aligned} \tag{21}$$

où la dernière égalité vient par stationnarité.

Or, pour tout $u \in [-t,0[$, $\mathbb{P}^{\mathrm{st}}\left((\exists v \in [-c_1,u[)(X_v \notin B_{R_2})\right) \geqslant \mathbb{P}^{\mathrm{st}}\left((\exists v \in [-c_1,-t[)(X_v \notin B_{R_2})\right) = \mathbb{P}_\mu\left((\exists v \in [0,c_1-t[)(X_v \notin B_{R_2})\right) \underset{c_1\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}_\mu\left((\exists v \in [0,\infty[)(X_v \notin B_{R_2})\right) = 1$, comme nous l'avons déjà signalé *supra* pour la dernière égalité. On en tire finalement :

Avis 6. *Soit ν_∞ la mesure sur $]0,\infty[\times\partial B_{R_1}$ définie sur les rectangles mesurables par*

$$\nu_\infty(I\times B) = \mathbb{P}^{st}[\#\{u \in -I\,;\, u \in \mathcal{T} \text{ et } X_u \in B\}]. \tag{22}$$

Alors $\nu_{c_1} \underset{c_1\longrightarrow\infty}{\nearrow} \nu_\infty$, au sens où il existe une suite exhaustive $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\nu_{c_1}\big|_{E_n}(C) \underset{c_1\longrightarrow\infty}{\nearrow} \nu_\infty\big|_{E_n}(C)$ pour tout ensemble mesurable C.

Il s'ensuit par convergence monotone :

$$\mu(A) = \int_A \mathrm{d}y \int_{]0,\infty[\times\partial R_1} p_*^t(x,y)\,\mathrm{d}\nu_\infty(t,x). \tag{23}$$

Finalement, il ne nous reste plus qu'à montrer que $\mathrm{d}\nu_\infty$ est de la forme $\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta(x)$ puisqu'alors on aura :

$$\begin{aligned}\int_A f(y)\,\mathrm{d}y = \mu(A) &= \int_A \mathrm{d}y \int_0^\infty \int_{\partial B_{R_1}} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta(x) p_*^t(x,y)\\ &\overset{\text{(Fubini)}}{=} \int_A \left(\int_{\partial B_{R_1}} G(x,y)\,\mathrm{d}\theta(x)\right)\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{24}$$

et ce pour tout A, d'où (13) par identification.

Nous allons d'abord nous intéresser, pour $B \subset \partial B_{R_1}$, à la mesure ν_∞^B sur $]0,\infty[$, qu'on définit comme la projection de $\nu_\infty\big|_{]0,\infty[\times B}$ sur sa première coordonnée. Par stationnarité de X sous $\mathbb{P}^{\mathrm{st}}$, ν_∞^B est invariante par translation. Admettons provisoirement — cela sera prouvé dans quelques instants — que ν_∞^B est finie sur les intervalles bornés. Alors on peut écrire $\mathrm{d}\nu_\infty^B = \theta(B)\,\mathrm{d}t$ pour un $\theta(B) < \infty$. Par ailleurs, puisque ν_∞ est une mesure, il s'ensuit que θ est une mesure (finie) sur B et que $\mathrm{d}\nu_\infty = \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta(x)$, ce qu'on voulait.

Pour finir, il ne reste plus qu'à vérifier que ν_∞^B est finie sur les intervalles bornés pour tout $B \subset \partial B_{R_1}$, i.e. que $\nu_\infty^{\partial B_{R_1}}$ est finie sur les intervalles bornés. Fixons-nous donc $c_2 > 0$ et majorons $\nu_\infty^{\partial B_{R_1}}(]0,c_2])$. D'abord :

$$\nu_\infty^{\partial B_{R_1}}(]0,c_2]) = \mathbb{P}^{\mathrm{st}}\left[\#\left\{\mathcal{T}^{\mathbb{R}}\cap]0,c_2]\right\}\right] \leqslant 1 + \mathbb{P}_\mu\left[\#\left\{\mathcal{T}^{>0}\cap]0,c_2]\right\}\right]. \tag{25}$$

Ensuite, il est clair qu'il existe une borne $c_3 < 1$ telle que, pour tout $x \in \partial B_{R_1}$, on ait $\mathbb{P}_x(\tau_{{}^cB_{R_2}} \leqslant c_2) \leqslant c_3$ ([2]). En itérant la propriété de Markov, on obtient alors que $\mathbb{P}_\mu(T_{i+1} \leqslant c_2) \leqslant {c_3}^i$, d'où $\mathbb{P}_\mu\left[\#\left\{\mathcal{T}^{>0}\cap]0,c_2]\right\}\right] \leqslant \sum_{i=0}^\infty {c_3}^i <$

[2]Si le lecteur en doute, qu'il se rassure : de toutes façons cela découlera des résultats du §7.3.

∞ . □

Remarque. Dans notre démonstration nous avons volontairement fait l'impasse sur la non-nullité de θ, car celle-ci s'obtient par un raisonnement spécifique aux diffusions uniformément elliptiques. En fait, que θ soit non nulle découle du théorème de support, cf. p. ex. [1], pp. 25-26.

L'outil permettant d'obtenir le théorème 1 à partir de la proposition 5 est le

Lemme 7. *Soit E un espace métrique, (Ω, ν) un espace mesuré avec $\nu(\Omega) > 0$, et $g : \Omega \times E \longrightarrow]0, \infty[$ une fonction vérifiant pour une certaine constante $k' \geqslant 0$:*

$$\omega\text{-p.p.} \quad x \mapsto \ln g(\omega, x) \text{ est } k'\text{-lipschitzienne.} \tag{26}$$

Alors la fonction $G : E \longrightarrow]0, \infty]$ définie par

$$G(x) = \int_\Omega g(\omega, x) \,\mathrm{d}\nu(\omega), \tag{27}$$

si elle est finie en au moins un point, est finie partout, et $\ln G$ est k'-lipschitzienne.

Preuve. Soit y un point de E en lequel $G(y) < \infty$. Soit $y' \in E$; notons δ la distance entre y et y'. Alors l'hypothèse (26) implique qu'on a :

$$\omega\text{-p.p.} \quad e^{-k'\delta} g(\omega, y) \leqslant g(\omega, y') \leqslant e^{k'\delta} g(\omega, y), \tag{28}$$

d'où par intégration :

$$e^{-k'\delta} G(y) \leqslant G(y') \leqslant e^{k'\delta} G(y). \tag{29}$$

Il en résulte, d'une part que $G(y') < \infty$, d'autre part que $|\ln G(y') - \ln G(y)| \leqslant k'\delta$. Cela suffit pour conclure. □

Finalement, notre objectif se résume à démontrer la

Proposition 8. *Supposons les hypothèses du théorème 1 vérifiées ; fixons R_1 et R_2 tels que $0 < R_1 < R_2 < R$. Alors il existe un $\varepsilon > 0$ et une constante $k' \geqslant 0$ tels que, pour tout $x \in \partial B_{R_1}$, la fonction $\ln G(x, \cdot)$ soit k'-lipschitzienne sur B_ε.*

5 Le théorème de Girsanov

Pour calculer la loi d'une diffusion dérivante, une technique consiste à se ramener à un mouvement brownien standard. Notons W_x la loi d'un mouvement brownien issu de x, de constante de diffusion σ. On a la

Proposition 9. *La densité d'une diffusion dérivante par rapport à un mouvement brownien standard est*

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_x}{\mathrm{d}W_x}((X_u)_{0 \leqslant u \leqslant t}) = \exp\left\{ \frac{1}{\sigma} \int_0^t \left(\overrightarrow{v}(b_u) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}X_u} - \frac{|\overrightarrow{v}(X_u)|^2}{2} \,\mathrm{d}u \right) \right\}. \tag{30}$$

Preuve. ☞ *Dans cette preuve nous ne considèrerons les processus aléatoires que sur l'intervalle de temps* $[0,t]$.

Posons $\mathcal{M}_u = \frac{1}{\sigma}\int_0^u \overrightarrow{v}(X_v) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}X_v}$, alors, sous W_x, $\mathcal{M}$ est une martingale et la martingale exponentielle associée est $\mathcal{E}_u = \exp\left\{\frac{1}{\sigma}\int_0^u \left(\overrightarrow{v}(X_v)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}X_v} - \frac{|\overrightarrow{v}(X_u)|^2}{2}\,\mathrm{d}v\right)\right\}$. Par conséquent, il nous faut démontrer que, sous la loi $\mathcal{E}_t\,\mathrm{d}W_x$, $(X_u)_{0\leqslant u\leqslant t}$ est une diffusion brownienne avec dérive $\overrightarrow{v}$. Or le théorème de Girsanov affirme que, sous $\mathcal{E}_t\,\mathrm{d}W_x$, $X_u - \langle X,\mathcal{M}\rangle_u$ est une martingale de variation quadratique $\sigma\mathbf{I_n}\,\mathrm{d}u$, donc un mouvement brownien. Par conséquent, puisque $\langle X,\mathcal{M}\rangle_u = \int_0^u \overrightarrow{v}(X_v)\,\mathrm{d}v$, cela signifie bien que, sous $\mathcal{E}_t\,\mathrm{d}W_x$, X vérifie l'équation (1), CQFD. □

6 Explicitation de la densité de transition

Armés de la proposition 9, nous sommes en mesure d'expliciter la densité de transition p associée à la diffusion dérivante. Commençons par quelques rappels sur le pont brownien :

Définition 10. *Soient* $x,y\in\mathbb{R}^d$, *soit* $t>0$. *Le* pont brownien issu de x et arrivant au point y au temps t *est le processus aléatoire obtenu comme la mesure-image du mouvement brownien* W_x *par la transformation :*

$$(B_u)_{u\geqslant 0}\mapsto\left(B_u+\frac{u}{t}\overrightarrow{B_t y}\right)_{0\leqslant u\leqslant t}. \tag{31}$$

On notera $Q_{x\overset{t}{\rightsquigarrow}y}$ *la loi de ce processus.*

Nous rappelons sans démonstration les trois grandes propriétés du pont brownien, pour lesquelles on pourra par exemple se référer à [4] :

Théorème 11.

1. *Soient* $x\in\mathbb{R}^d$, $t>0$. *On définit une variable aléatoire* $y\overset{(loi)}{\sim}\mathcal{N}(x,\sigma t\mathbf{I_d})$, *et un processus* $(B_u)_{0\leqslant u\leqslant t}$ *tel que, conditionnellement à* y, B *soit un pont brownien de* x *à* y. *Alors la loi déconditionnée de* B *est la loi* W_x *d'un mouvement brownien issu de* x.
2. *La loi du pont brownien est aussi la loi du processus défini par l'équation différentielle stochastique :*

$$\left\{\begin{array}{l} X_0 = x \quad ; \\ \overrightarrow{\mathrm{d}X_u} = \overrightarrow{\mathrm{d}B_u} + \frac{\overrightarrow{X_u y}}{t-u}\,\mathrm{d}u. \end{array}\right. \tag{32}$$

3. *Si* $(X_u)_{0\leqslant u\leqslant t}$ *est un pont brownien issu de* x *et arrivant en* y *au temps* t, *alors* $(X_{t-u})_{0\leqslant u\leqslant t}$ *a la loi d'un pont brownien issu de* y *et arrivant en* x *au temps* t.

Nous pouvons maintenant énoncer la

Proposition 12. *Pour $t > 0$, $x, y \in B_{R_2}$, on a :*

$$p_*^t(x,y) = \frac{e^{-|\overrightarrow{xy}|^2/2\sigma t}}{(2\pi\sigma t)^{d/2}} Q_{x \overset{t}{\rightsquigarrow} y} \left[\mathbb{1}_{t < \tau_{{}^c B_{R_2}}} \exp \left\{ \frac{1}{\sigma} \int_0^t \left(\overrightarrow{v}(X_u) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}X_u} - \frac{|\overrightarrow{v}(X_u)|^2}{2} \mathrm{d}u \right) \right\} \right]. \tag{33}$$

Preuve. ☞ *Pour des raisons typographiques, dans cette preuve nous abrègerons $\overrightarrow{v}(X_u) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}X_u} - \frac{|\overrightarrow{v}(X_u)|^2}{2} \mathrm{d}t$ en $\mathrm{d}\mathcal{A}_u$.*

La démonstration n'est qu'un jeu d'écriture à partir de tout ce que nous avons déja dit. On écrit, pour $t > 0$, $x \in B_{R_2}$ et $A \subset B_{R_2}$ mesurable :

$$\begin{aligned} \int_A p_*^t(x,y)\,\mathrm{d}y &\overset{\text{(déf)}}{=} \mathbb{P}_x \left[\mathbb{1}_{t < \tau_{{}^c B_{R_2}}} \mathbb{1}_{X_t \in A} \right] \\ &\overset{\text{(prop. 9)}}{=} W_x \left[\exp \left\{ \frac{1}{\sigma} \int_0^t \mathrm{d}\mathcal{A}_u \right\} \mathbb{1}_{t < \tau_{{}^c B_{R_2}}} \mathbb{1}_{X_t \in A} \right] \\ &\overset{\text{(thm 11-1)}}{=} \int_A \frac{e^{-|\overrightarrow{xy}|^2/2\sigma t}}{(2\pi\sigma t)^{d/2}} Q_{x \overset{t}{\rightsquigarrow} y} \left[\exp \left\{ \frac{1}{\sigma} \int_0^t \mathrm{d}\mathcal{A}_u \right\} \mathbb{1}_{t < \tau_{{}^c B_{R_2}}} \right] \mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{34}$$

d'où le résultat par identification. □

Notre travail va consister à utiliser (33) pour contrôler les variations de $p_*^t(x,y)$. Plus précisément nous allons démontrer la proposition suivante, qui entraîne la proposition 8 et donc le théorème 1 :

Proposition 13. *Supposons $\overrightarrow{v}$ k-lipschitzienne sur B_R. Alors on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que, d'une part il existe deux fonctions $\pi_1(t)$ et $\pi_2(t)$ avec :*

–
$$\forall t > 0 \quad \forall x \in \partial B_{R_1} \quad \forall y \in B_\varepsilon \quad \pi_1(t) \leqslant p_*^t(x,y) \leqslant \pi_2(t)\,; \tag{35}$$

–
$$0 < \int_0^\infty \pi_1(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\infty \pi_2(t)\,\mathrm{d}t < \infty, \tag{36}$$

d'autre part il existe une fonction $\kappa(t)$ avec :

–
$$\forall t > 0 \quad \forall x \in \partial B_{R_1} \quad y \mapsto p_*^t(x,y) \text{ est } \kappa(t)\text{-lipschitzienne sur } B_\varepsilon\,; \tag{37}$$

–
$$\int_0^\infty \kappa(t)\,\mathrm{d}t < \infty. \tag{38}$$

Preuve. Montrons que la proposition 13 entraîne la proposition 8. Nous ferons ici abstraction de la question de l'explicicité, car celle-ci, le lecteur le vérifiera, ne pose de problème nulle part dans ce mémoire ([3]).

[3]Attirons simplement l'attention sur deux points à ce sujet : *primo*, les expressions qu'on

Déjà, la condition (36) assure que G est uniformément strictement positive et finie sur $\partial B_{R_1} \times B_\varepsilon$, d'où il s'ensuit, puisque la mesure θ introduite à la proposition 5 est non nulle et finie, que f est (uniformément) strictement positive et finie sur B_ε. Maintenant, on a pour $y, y' \in B_\varepsilon$, notant $\delta = |\overrightarrow{yy'}|$:

$$\left|\frac{G(y')}{G(y)} - 1\right| \leqslant \frac{\int_0^\infty \delta\kappa(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^\infty \pi_1(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant c_1\delta, \tag{39}$$

où $c_1 = \frac{\int_0^\infty \kappa(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^\infty \pi_1(t)\,\mathrm{d}t}$ est une constante finie. Or, pour $c_2 > 1$ une constante arbitraire, il existe $c_3 > 0$ telle qu'on ait pour tous $a, b > 0$:

$$\left|\frac{b}{a} - 1\right| \leqslant c_3 \quad \Rightarrow \quad |\ln b - \ln a| \leqslant c_2 \left|\frac{b}{a} - 1\right|. \tag{40}$$

Par connexité de B_ε, on en tire que $\ln G$ est c_2c_1-lipschitzienne. □

7 Quelques estimées

Le but de cette partie est d'obtenir des estimées convenables pour les fonctions $\pi_1(t)$ et $\pi_2(t)$ introduites dans la proposition 13, ainsi que d'obtenir quelques majorations qui nous serviront pour obtenir une valeur pour $\kappa(t)$. Pour l'instant, nous supposons simplement que $\overrightarrow{v}$ est bornée sur B_R ; nous notons $W = \sup_{B_R} |\overrightarrow{v}|$ ([4]). ε est supposé choisi tel que $\varepsilon < R_1$.

7.1 Majoration, I

☞ *Dans ce paragraphe, on se fixe $t > 0$ et $x, y \in B_{R_2}$.*

Tout part de la constatation suivante :

Avis 14. *Soit $(X_u)_{0 \leqslant u \leqslant t}$ un pont brownien de x à y. Soit $(\mathcal{M}_u)_{0 \leqslant u \leqslant t/2}$ le processus aléatoire défini par*

$$\mathcal{M}_u = \frac{1}{\sigma} \int_0^{u \wedge \tau_{{}^cB_{R_2}}} \overrightarrow{v}(X_v) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{d}X}_v - \frac{1}{t-v}\overrightarrow{X_v y}\,\mathrm{d}v\right), \tag{41}$$

alors, sous $Q_{x \overset{t}{\rightsquigarrow} y}$, $\mathcal{M}$ est une martingale continue issue de 0, de variation quadratique vérifiant :

$$Q_{x \overset{t}{\rightsquigarrow} y}\text{-}p.s. \quad \forall u \quad \mathrm{d}\langle\mathcal{M}\rangle_u \leqslant \frac{W^2}{\sigma}\,\mathrm{d}u. \tag{42}$$

obtient font intervenir R_1, R_2 et ε, mais ce n'est pas un problème car toutes ces valeurs peuvent être rendues explicites — par exemple, on a défini R_1 et R_2 comme deux valeurs arbitraires vérifiant $0 < R_1 < R_2 < R$, par conséquent pour rendre ces valeurs explicites il suffit de les choisir respectivement égales, mettons, à $R/3$ et $2R/3$. *Secundo*, pour établir l'existence de certaines constantes on est amené à choisir des durées arbitraires non triviales. Dans ce cas, l'explicicité peut s'établir en prenant comme durée de référence R^2/σ, qui est bien homogène à un temps. On arrive de même à construire des constantes non triviales de toutes homogénéités.

[4] On observe que, sous les hypothèses du théorème 1, on peut bien majorer W par l'expression explicite $V + kR$.

On a un résultat analogue par retournement du temps : notons $\check{\tau}_{{}^c B_{R_2}}$ l'instant de sortie hors de B_{R_2} pris en remontant le temps, i.e. $\check{\tau}_{{}^c B_{R_2}} = \sup\{u \leqslant t\,;\, X_u \notin B_{R_2}\}$, et soit $(\mathcal{N}_u)_{0\leqslant u\leqslant t/2}$ le processus aléatoire défini par

$$\mathcal{N}_u = \frac{1}{\sigma}\int_{(t-u)\vee\check{\tau}_{{}^c B_{R_2}}}^{t} \overrightarrow{v}(X_v)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{d}X}_v - \frac{1}{v}\overrightarrow{xX_v}\,\mathrm{d}v\right), \tag{43}$$

alors $\mathcal{N}$ est une martingale continue issue de 0, de variation quadratique vérifiant :

$$Q_{x\overset{t}{\rightsquigarrow}y}\text{-p.s.}\quad \forall u\quad \mathrm{d}\langle\mathcal{N}\rangle_u \leqslant \frac{W^2}{\sigma}\,\mathrm{d}u. \tag{44}$$

Remarque. Nous avons donc écrit $\int_0^t \overrightarrow{v}(X_u)\,\overrightarrow{\mathrm{d}X_u}$ comme somme d'un terme de martingale et d'un terme de dérive. Mais pourquoi donc s'encombrer de deux expressions différentes ? Eh bien, nous connaissons des techniques générales efficaces pour contrôler le terme de martingale, mais le terme de dérive tel qu'il apparaît dans (41) devient difficile à contrôler quand $u \longrightarrow t$. D'où l'intérêt d'avoir deux écritures du pont brownien qui permettent d'avoir un terme de dérive « raisonnable » quelle que soit la valeur de u, selon qu'on utilise $\mathcal{M}$ ou $\mathcal{N}$.

On rappelle le résultat qui définit les martingales exponentielles :

Théorème 15. *Soit $(\mathcal{L}_u)_{u\geqslant 0}$ une martingale locale continue. Alors*

$$e^{\mathcal{L}_u - \langle\mathcal{L}\rangle_u/2} \tag{45}$$

est une martingale locale.

On en tire immédiatement le contrôle suivant sur $\mathcal{M}_{t/2}$, resp. $\mathcal{N}_{t/2}$:

Proposition 16.

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\qquad Q_{x\overset{t}{\rightsquigarrow}y}\left[e^{\lambda\mathcal{M}_{t/2}}\right] \leqslant e^{\left(\frac{W^2 t}{4\sigma}\right)\lambda^2}, \tag{46}$$

$$\textit{resp.}\qquad Q_{x\overset{t}{\rightsquigarrow}y}\left[e^{\lambda\mathcal{N}_{t/2}}\right] \leqslant e^{\left(\frac{W^2 t}{4\sigma}\right)\lambda^2}. \tag{47}$$

D'où

Proposition 17.

$$p_*^t(x,y) \leqslant \frac{e^{-|\overrightarrow{xy}|^2/2\sigma t}}{(2\pi\sigma t)^{d/2}}\, e^{W^2 t/\sigma + 4WR_2/\sigma}. \tag{48}$$

Preuve. On part de (33). Tout d'abord, on utilise la majoration triviale

$$\exp\left\{-\int_0^\infty \frac{|\overrightarrow{v}(X_u)|^2}{2\sigma}\,\mathrm{d}t\right\} \leqslant 1, \tag{49}$$

puis on écrit que, sur l'événement $t < \tau_{^cB_{R_2}}$, on a la relation :

$$\frac{1}{\sigma}\int_0^t \overrightarrow{v}(X_u)\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}X_u} = \mathcal{M}_{t/2}+\mathcal{N}_{t/2}+\int_0^{t/2}\frac{\overrightarrow{X_u y}\cdot\overrightarrow{v}(X_u)}{\sigma(t-u)}\,\mathrm{d}u+\int_{t/2}^t\frac{\overrightarrow{xX_u}\cdot\overrightarrow{v}(X_u)}{\sigma u}\,\mathrm{d}u, \tag{50}$$

où on a pour tout u : $|\overrightarrow{X_u y}|, |\overrightarrow{xX_u}| \leqslant 2R_2$, d'où

$$\int_0^{t/2}\frac{\overrightarrow{X_u y}\cdot\overrightarrow{v}(X_u)}{\sigma(t-u)}\,\mathrm{d}u+\int_{t/2}^t\frac{\overrightarrow{xX_u}\cdot\overrightarrow{v}(X_u)}{\sigma u}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{4R_2W}{\sigma}. \tag{51}$$

D'autre part

$$Q_{x\overset{t}{\leadsto}y}\left[e^{\mathcal{M}_{t/2}+\mathcal{N}_{t/2}}\right] \leqslant e^{\frac{W^2t}{\sigma}}, \tag{52}$$

d'après (46) et (47) utilisées avec $\lambda = 2$ et l'inégalité de Cauchy-Schwartz ([5]). Le résultat découle alors de la combinaison des formules (49) à (52). □

Hélas, la majoration (48) ainsi obtenue est trop grossière ! En particulier, elle ne peut convenir pour définir π_2 puisque (36) n'est pas vérifiée. Nous allons donc chercher un majorant de $p_*^t(x,y)$ qui décroisse exponentiellement quand $t \longrightarrow \infty$.

7.2 Majoration, II

Commençons par une propriété classique des diffusions uniformément elliptiques :

Proposition 18. *Il existe deux constantes $K_1 \geqslant 1$ et $K_2 > 0$ telles qu'on ait :*

$$\forall x \in B_{R_2} \quad \forall t \geqslant 0 \quad \mathbb{P}_x(t < \tau_{^cB_{R_2}}) \leqslant K_1 e^{-K_2 t}, \tag{53}$$

i.e.

$$\forall x \in B_{R_2} \quad \forall t \geqslant 0 \quad \mathbb{P}^*_x(X_t \neq \partial) \leqslant K_1 e^{-K_2 t}. \tag{54}$$

Preuve. Soit $c_1 > 0$ une durée arbitraire. Nous allons montrer l'existence d'une constante $c_2 < 1$ telle qu'on ait

$$\forall x \in B_{R_2} \quad \mathbb{P}^*_x(X_{c_1} \neq \partial) \leqslant c_2. \tag{55}$$

En effet, si (55) est vraie alors on a par la relation de Chapman-Kolmogorov itérée :

$$\forall x \in B_{R_2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}^*_x(X_{nc_1} \neq \partial) \leqslant {c_2}^n, \tag{56}$$

d'où, toujours par la relation de Chapman-Kolmogorov, en écrivant $t = (t - \lfloor \frac{t}{c_1} \rfloor c_1) + \lfloor \frac{t}{c_1} \rfloor c_1$:

$$\forall x \in B_{R_2} \quad \forall t \geqslant 0 \quad \mathbb{P}^*_x(X_t \neq \partial) \leqslant {c_2}^{\lfloor \frac{t}{c_1} \rfloor} \leqslant {c_2}^{(t/c_1)-1}, \tag{57}$$

ce qui donne bien (54) avec $K_1 = {c_2}^{-1}$ et $K_2 = \ln({c_2}^{-1})/c_1$.

[5] Attention : on ne peut pas concaténer $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ pour obtenir une troisième martingale.

Reste à montrer (55). Soit $x \in B_{R_2}$. Soit $\overrightarrow{\imath}$ un vecteur unitaire arbitraire ; pour $X \in \mathbb{R}^d$, notons $X \cdot \overrightarrow{\imath}$ la coordonnée de X relative à $\overrightarrow{\imath}$ dans un repère orthonormé d'origine o.
Rappelons que le processus $(X_t)_{t \geqslant 0}$ de loi $\mathbb{P}_x$ est défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 = x \,; \\ \overrightarrow{\mathrm{d}X_t} = \overrightarrow{\mathrm{d}B_t} + \overrightarrow{v}(X_t)\,\mathrm{d}t. \end{array} \right. \tag{58}$$

On définit alors un processus à valeurs réelles $(Y_t)_{t \geqslant 0}$ par

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_0 = -R_2 \,; \\ \overrightarrow{\mathrm{d}Y_t} = \overrightarrow{\mathrm{d}B_t} \cdot \overrightarrow{\imath} - W\,\mathrm{d}t, \end{array} \right. \tag{59}$$

où B est le même mouvement brownien que dans (58). Il est alors clair que, sur l'événement $\{c_1 < \tau_{^c B_{R_2}}\}$, on a

$$\forall t \in [0, c_1] \quad Y_t < X_t \cdot \overrightarrow{\imath}. \tag{60}$$

Or, comme

$$\{c_1 < \tau_{^c B_{R_2}}\} \subset \{X_{c_1} \in B_{R_2}\} \subset \{X_{c_1} \cdot \overrightarrow{\imath} < R_2\}, \tag{61}$$

il nous suffit finalement de montrer que $\mathbb{P}(Y_{c_1} \geqslant R_2) > 0$ pour conclure. Et justement Y est un mouvement brownien unidimensionnel avec dérive constante, dont on connaît parfaitement la loi :

$$\mathbb{P}(Y_{c_1} \geqslant R_2) = \mathbb{P}\Big(\mathcal{N}(0, \sigma c_1) \geqslant W c_1 + 2R_2\Big) > 0, \tag{62}$$

et la démonstration est terminée. $\square$

Nous allons nous servir de la proposition 18 pour obtenir un majorant de p_*^t à décroissance exponentielle en t. Dans toute la suite du texte, $K_3 > 0$ est une durée fixée. La décroissance exponentielle résulte alors de la relation de Chapman-Kolmogorov :

Proposition 19. *Pour $t \geqslant K_3$, on a pour tous $x, y \in B_{R_2}$:*

$$p_*^t(x,y) \leqslant \frac{K_1 e^{W^2 K_3/\sigma + 4WR_2/\sigma}}{(2\pi\sigma K_3)^{d/2}} e^{-K_2(t-t_3)}. \tag{63}$$

Par la suite nous noterons simplement $p_*^t(x,y) \leqslant K_4 e^{-K_2(t-t_3)}$.

Preuve. On écrit la relation de Chapman-Kolmogorov avec $t = (t - K_3) + K_3$:

$$\begin{aligned} p_*^t(x,y) &\overset{(9)}{=} \int_{B_{R_2}} p_*^{t-K_3}(x,x') p_*^{K_3}(x',y)\,\mathrm{d}x' \\ &\overset{(48)}{\leqslant} \frac{e^{W^2K_3/\sigma + 4WR_2/\sigma}}{(2\pi\sigma K_3)^{d/2}} \int_{B_{R_2}} p_*^{t-K_3}(x,x')\,\mathrm{d}x' \\ &= \frac{e^{W^2K_3/\sigma + 4WR_2/\sigma}}{(2\pi\sigma K_3)^{d/2}} \mathbb{P}_x^*(X_{t-K_3} \neq \partial) \\ &\overset{(54)}{\leqslant} K_4 e^{-K_2(t-K_3)}. \end{aligned} \tag{64}$$

$\square$

Nous en déduisons une expression valable pour $\pi_2(t)$: on prend

$$\pi_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi\sigma t)^{d/2}} e^{(R_1-\varepsilon)^2/2\sigma t + W^2 t/\sigma + 4WR_2/\sigma} & \text{si } t < K_3\,; \\ K_4 e^{-K_2(t-K_3)} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{65}$$

Ainsi l'expression de $\pi_2(t)$ est intégrable, et aussi bornée. En vue d'utilisations ultérieures, notons donc $K_5 = \sup_{t>0} \pi_2(t)$.

7.3 Minoration

☞ *Dans ce paragraphe on suppose $x \in \partial B_{R_1}$, $y \in B_\varepsilon$.*

Nous commençons par la minoration suivante sur le pont brownien :

Proposition 20. *Il existe deux constantes $K_6 > 0$ et $K_7 > 0$ telles qu'on ait :*

$$\forall x \in \partial B_{R_1} \quad \forall y \in B_\varepsilon \quad \forall t > 0 \quad Q_{x \overset{t}{\rightsquigarrow} y}(t < \tau_{{}^c B_{R_2}}) \geqslant K_6 e^{-K_7 t}. \tag{66}$$

Preuve. Soient $x \in \partial B_{R_1}$, $y \in B_\varepsilon$. Par la définition 10 du pont brownien, on s'aperçoit que, notant W_x la loi du mouvement brownien standard issu de x :

$$Q_{x \overset{t}{\rightsquigarrow} y}(t < \tau_{{}^c B_{R_2}}) \geqslant W_x(t < \tau_{{}^c B(x, R_2 - R_1)}). \tag{67}$$

Par conséquent, nous allons simplement démontrer que le membre de droite de (67) est minoré par $K_6 e^{-K_7 t}$.

Pour alléger les notations, nous notons dans cette démonstration $r = R_2 - R_1$. Soit donc $(B_u)_{u \geqslant 0}$ un mouvement brownien issu de x. En nous plaçant dans un repère orthornormé d'origine x, les différentes coordonnées de B sont indépendantes et de même loi ; par conséquent, pour établir notre minoration exponentielle on peut se contenter de travailler sur un mouvement brownien unidimensionnel $(b_u)_{u \geqslant 0}$ issu de 0, dont nous noterons la loi w_0, et montrer qu'il existe deux constantes K_6' et K_7' telles qu'on ait

$$w_0\left(\sup_{u \in [0,t]} |b_u| \leqslant \frac{r}{\sqrt{d}}\right) \geqslant K_6' e^{-K_7' t}, \tag{68}$$

(67) venant alors avec $K_6 = {K_6'}^d$ et $K_7 = dK_7'$.

Montrons donc (68). Fixons-nous $c_1 \in]0, \frac{r}{\sqrt{d}}[$ arbitraire. Il nous suffit en fait de démontrer qu'il existe un temps $c_2 > 0$ et une constante $c_3 > 0$ tels que

$$\forall x' \in [-c_1, c_1] \quad w_{x'}\left(c_2 < \tau_{{}^c]-\frac{r}{\sqrt{d}}, \frac{r}{\sqrt{d}}[} \text{ et } b_{c_2} \in [-c_1, c_1]\right) \geqslant c_3 : \tag{69}$$

ensuite, on appliquera la relation de Chapman-Kolmogorov itérée, et le résultat tombera avec $K_6' = c_3$ et $K_7' = \ln({c_3}^{-1})/c_2$.

Soit donc $x' \in [-c_1, c_1]$; pour fixer les idées nous supposons $x' \geqslant 0$. On se fixe $c_4 > 0$; par autosimilitude du mouvement brownien on a pour tout $u \geqslant 0$:

$$w_{x'}(b_u \in [x' - c_4 u^{1/2}, x']) = c_5, \tag{70}$$

où c_5 est une probabilité strictement positive ne dépendant pas de u. Pour u suffisamment petit, $\forall x' \in [0, c_1]$ $[x' - c_4 u^{1/2}, x'] \subset [-c_1, c_1]$.

D'autre part, $w_{x'}\left(c_2 < \tau_{\complement]-\frac{r}{\sqrt{d}}, \frac{r}{\sqrt{d}}[}\right) \geqslant w_0\left(c_2 < \tau_{\complement]-\frac{r}{\sqrt{d}}, \frac{r}{\sqrt{d}}-c_1[}\right) \underset{c_2 \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 1$, donc, fixant $c_6 \in]0, c_5[$ arbitraire, si c_2 est pris suffisamment petit $\forall x' \in [0, c_1]$ $w_{x'}\left(c_2 < \tau_{\complement]-\frac{r}{\sqrt{d}}, \frac{r}{\sqrt{d}}[}\right) \geqslant 1 - c_6$, d'où (69) avec $c_3 = c_5 - c_6$. □

Maintenant, nous allons énoncer et prouver un lemme de concentration pour parvenir à notre minoration. Mais d'abord, nous avons besoin d'un lemme préparatoire qui permet d'obtenir des résultats de concentration en espérance à partir de concentration sur les fonctions de répartition :

Lemme 21. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante. Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire réelle vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}(\mathcal{X} \leqslant x) \leqslant \Phi(x) \tag{71}$$

pour une fonction $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ croissante ([6])*. On définit l'inverse généralisée de Φ par $\Phi^{-1}(u) = \sup\{x \in \mathbb{R} \,;\, \Phi(x) \leqslant u\}$. Alors, si $\mathcal{A}$ est un événement de probabilité p, on a :*

$$\mathbb{P}[\mathbb{1}_{\mathcal{A}} f(\mathcal{X})] \geqslant \int_0^p f(\Phi^{-1}(u))\,\mathrm{d}u. \tag{72}$$

Preuve. Appelons $(\Omega, \mathcal{F})$ l'espace de probabilité sur lequel on travaille. Soit $\Psi(x) = \mathbb{P}(\mathcal{X} \leqslant x)$ la véritable fonction de répartition de $\mathcal{X}$, et Ψ^{-1} son inverse généralisée ; on a $\Psi \leqslant \Phi$, d'où $\Psi^{-1} \geqslant \Phi^{-1}$. Quitte à agrandir $\mathcal{F}$, on peut supposer qu'il existe une variable aléatoire u uniformément distribuée sur $[0, 1]$ telle que $\mathcal{X} = \Psi^{-1}(u)$. Définissons maintenant

$$\begin{gathered} g : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1] \\ \omega \mapsto \mathbb{P}(\omega' \in \mathcal{A} \text{ et } u(\omega') \leqslant u(\omega)). \end{gathered} \tag{73}$$

g est une fonction mesurable, et vérifie clairement $g(\omega) \leqslant u(\omega)$, d'où $f(\Psi^{-1}(g(\omega))) \leqslant f(\mathcal{X}(\omega))$ par croissance de Ψ^{-1} et de f. En outre, g a été définie de sorte que $g(\omega)$ soit distribuée uniformément sur $[0, p]$ (regarder les fonctions de répartition). Finalement, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\mathbb{1}_{\mathcal{A}} f(\mathcal{X})] &= \int_{\mathcal{A}} f(\mathcal{X}(\omega))\,\mathrm{d}\omega \\ &\geqslant \int_{\mathcal{A}} f(\Psi^{-1}(g(\omega)))\,\mathrm{d}\omega = \int_0^p f(\Psi^{-1}(u))\,\mathrm{d}u \geqslant \int_0^p f(\Phi^{-1}(u))\,\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{74}$$

□

[6] À noter que n'importe quelle fonction $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$ peut être transformée en une fonction $\widetilde{\Phi}$ convenable, en définissant $\widetilde{\Phi}(x) = 1 \wedge \inf_{y \geqslant x} \Phi(y)$.

Remarque. Dans le cas où Φ est de classe $\mathcal{C}^1$, le changement de variables $x = \Phi^{-1}(u)$ dans l'intégrale donne :

$$\mathbb{P}[\mathbb{1}_{\mathcal{A}} f(\mathcal{X})] \geqslant \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p)} f(x)\Phi'(x)\,\mathrm{d}x, \tag{75}$$

expression souvent plus simple à manipuler.

Du lemme 21, on tire

Lemme 22. *Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi P. On suppose que, pour une certaine constante $c_1 \geqslant 0$, on a le contrôle suivant sur la log-Laplace de $\mathcal{X}$:*

$$\forall\lambda \in \mathbb{R} \quad \ln P\left[e^{\lambda\mathcal{X}}\right] \leqslant c_1 \frac{\lambda^2}{2}. \tag{76}$$

Soit $p \in [0,1]$ et soit $\mathcal{A}$ un événement avec $P(\mathcal{A}) \geqslant p$. Alors :

$$\forall\lambda \geqslant 0 \quad P\left[\mathbb{1}_{\mathcal{A}} e^{\lambda\mathcal{X}}\right] \geqslant \frac{p^2}{2} e^{-c_1\lambda^2/2}. \tag{77}$$

Preuve. L'inégalité de Chernoff donne pour tout $\xi \leqslant 0$:

$$P(\mathcal{X} \leqslant \xi) \leqslant e^{-\xi^2/2c_1}. \tag{78}$$

Maintenant, soit $\lambda \geqslant 0$. Remarquons d'abord qu'on ne perd rien à supposer qu'on a exactement $P(\mathcal{A}) = p$. *Via* le lemme 21 et la remarque qui le suit, (78) donne :

$$P\left[\mathbb{1}_{\mathcal{A}} e^{\lambda\mathcal{X}}\right] \geqslant \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2c_1 \ln\left(\frac{1}{p}\right)}} (-\xi) e^{-\xi^2/2c_1 + \lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi. \tag{79}$$

Maintenant, on utilise l'inégalité élémentaire

$$-\frac{\xi^2}{2c_1} + \lambda\xi \geqslant -\frac{\xi^2}{c_1} - \frac{c_1\lambda^2}{2} \tag{80}$$

pour obtenir

$$P\left[\mathbb{1}_{\mathcal{A}} e^{\lambda\mathcal{X}}\right] \geqslant \frac{e^{-c_1\lambda^2/2}}{c_1} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2c_1 \ln\left(\frac{1}{p}\right)}} (-\xi) e^{-\xi^2/c_1}\,\mathrm{d}\xi = \frac{p^2}{2} e^{-c_1\lambda^2/2}. \tag{81}$$

□

Finalement, on obtient une minoration convenable pour définir $\pi_2(t)$:

Proposition 23.

$$p_*^t(x,y) \geqslant \frac{{K_6}^2}{2(2\pi\sigma t)^{d/2}} \exp\left\{-\frac{2{R_1}^2}{\sigma t} - 2K_7 t - \frac{3W^2 t}{2\sigma} - \frac{4R_2 W}{\sigma}\right\}. \tag{82}$$

Preuve. On part de l'expression (33) pour, *via* quelques minorations triviales, obtenir :

$$p_*^t(x,y) \geqslant \frac{e^{-2{R_1}^2/\sigma t}}{(2\pi\sigma t)^{d/2}} e^{\frac{1}{\sigma}\left(-4R_2 W - W^2 t/2\right)} Q_{x \overset{t}{\rightsquigarrow} y}\left[1_{t<\tau_{{}^c B_{R_2}}} e^{\mathcal{M}_{t/2} + \mathcal{N}_{t/2}}\right]. \tag{83}$$

Puis la proposition 20 nous donne qu'on a $Q_{x \overset{t}{\rightsquigarrow} y}\left(t < \tau_{{}^c B_{R_2}}\right) \geqslant K_6 e^{-K_7 t}$. Comme par ailleurs la formule (52) donne le contrôle $Q_{x \overset{t}{\rightsquigarrow} y}\left[e^{\lambda(\mathcal{M}_{t/2}+\mathcal{N}_{t/2})}\right] \leqslant e^{\lambda^2 W^2 t/\sigma}$, le lemme 22 appliqué avec $c_1 = 2W^2 t/\sigma$, $p = K_6 e^{-K_7 t}$ et $\lambda = 1$ donne

$$Q_{x \overset{t}{\rightsquigarrow} y}\left[1_{t<\tau_{{}^c B_{R_2}}} e^{\mathcal{M}_{t/2}+\mathcal{N}_{t/2}}\right] \geqslant \frac{K_6{}^2 e^{-2K_7}}{2} e^{-W^2 t/\sigma}. \tag{84}$$

Il ne reste plus qu'à combiner (83) et (84) pour conclure. □

8 Couplage

Dans cette partie, on suppose les hypothèses du théorème 1 vérifiées ; nous allons voir comment comparer $p_*^t(x,y)$ et $p_*^t(x,y')$ pour $y,y' \in B_\varepsilon$. Soient donc $\varepsilon > 0$ suffisamment petit — plus présisément, on prend $\varepsilon > 0$ quelconque tel que $\varepsilon < R_1$, $R_2 + 2\varepsilon \leqslant R$ et $R_2 - 2\varepsilon > R_1$ —, $y, y' \in B_\varepsilon$, $t > 0$ et $x \in \partial B_{R_1}$. Notons $\delta = |\overrightarrow{yy'}|$; dans la suite du texte, $O(\delta)$ notera toute une expression explicite en fonction de V, k, R (et des grandeurs définies à partir de ces données) et δ telle qu'à V, k, R fixés, on ait $\limsup_{\delta \longrightarrow 0} \frac{|O(\delta)|}{\delta} < \infty$.

8.1 Principe

Le couplage repose sur le

Lemme 24. *Soit*

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{C}([0,t],\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathcal{C}([0,t],\mathbb{R}^d) \\ (X_u)_{0\leqslant u\leqslant t} &\mapsto (X'_u)_{0\leqslant u\leqslant t} = \left(X_u + \tfrac{u}{t}\overrightarrow{yy'}\right)_{0\leqslant u\leqslant t}, \end{aligned} \tag{85}$$

alors la mesure-image de $Q_{x \overset{t}{\rightsquigarrow} y}$ par ψ est $Q_{x \overset{t}{\rightsquigarrow} y'}$.

Preuve. Soit $(B_u)_{0\leqslant u\leqslant t}$ un mouvement brownien de loi W_x, et soient

$$\varphi : (B_u)_{0\leqslant u\leqslant t} \mapsto \left(B_u + \frac{u}{t}\overrightarrow{B_t y}\right)_{0\leqslant u\leqslant t}; \tag{86}$$

$$\varphi' : (B_u)_{0\leqslant u\leqslant t} \mapsto \left(B_u + \frac{u}{t}\overrightarrow{B_t y'}\right)_{0\leqslant u\leqslant t}. \tag{87}$$

Alors par la définition 10 du pont brownien, $\varphi(B)$ a pour loi $Q_{x \overset{t}{\rightsquigarrow} y}$ et $\varphi'(B)$ a pour loi $Q_{x \overset{t}{\rightsquigarrow} y'}$. Comme $\psi \circ \varphi = \varphi'$, on a bien que la mesure-image de $Q_{x \overset{t}{\rightsquigarrow} y}$ par ψ est $Q_{x \overset{t}{\rightsquigarrow} y'}$. □

Grâce au lemme 24 nous pouvons donc exprimer la loi $Q_{x \overset{t}{\rightsquigarrow} y'}$ en fonction de la loi $Q_{x \overset{t}{\rightsquigarrow} y}$. La seule loi de pont brownien à laquelle nous aurons recours sera ainsi $Q_{x \overset{t}{\rightsquigarrow} y}$, que nous ne noterons plus que Q dans la suite pour alléger. Par ailleurs, nous noterons systématiquement $(X'_u)_{0\leqslant u\leqslant t}$ pour $\psi((X_u)_{0\leqslant u\leqslant t})$, et pour F un fermé de $\mathbb{R}^d$, τ'_F notera le temps d'atteinte de F par X'. Le couplage va nous permettre de donner une expression de $\kappa(t)$ staisfaisant (37) et (38).

☞ *Dans un premier temps de notre raisonnement, nous ne supposons pas qu'on a $x \in \partial B_{R_1}$, mais simplement $x \in B_{R_2}$.*

Par (33) et par couplage, on a :

$$p_*^t(x,y') - p_*^t(x,y) =$$
$$\frac{e^{-|\overrightarrow{xy'}|^2/2\sigma t}}{(2\pi\sigma t)^{d/2}} Q\left[\mathbb{1}_{t<\tau'_{{}^cB_{R_2}}} \exp\left\{\frac{1}{\sigma}\int_0^t \left(\overrightarrow{v}(X'_u)\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}X_u} + \overrightarrow{v}(X'_u)\cdot \overrightarrow{yy'}\,\frac{\mathrm{d}u}{t} - \frac{|\overrightarrow{v}(X'_u)|^2}{2}\,\mathrm{d}u\right)\right\}\right]$$
$$- \frac{e^{-|\overrightarrow{xy}|^2/2\sigma t}}{(2\pi\sigma t)^{d/2}} Q\left[\mathbb{1}_{t<\tau_{{}^cB_{R_2}}} \exp\left\{\frac{1}{\sigma}\int_0^t \left(\overrightarrow{v}(X_u)\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}X_u} - \frac{|\overrightarrow{v}(X_u)|^2}{2}\,\mathrm{d}u\right)\right\}\right]. \quad (88)$$

8.2 Demi-tours au bord

L'équation (88) nous laisse à penser qu'on va pouvoir écrire $p_*^t(x,y')-p_*^t(x,y)$ comme un $O(\delta)$, puisque son second membre peut se réecrire comme l'espérance, sous Q, de deux quantités qui deviennent très proches quand $\delta \longrightarrow 0$. À une exception près toutefois : $\mathbb{1}_{\tau'_{{}^cB_{R_2}}}$ peut être égale à 0 tandis que $\mathbb{1}_{\tau_{{}^cB_{R_2}}}$ serait égale à 1, ou vice-versa. En effet, si la particule X vient à s'approcher très près de ∂B_{R_2} sans toutefois franchir cette frontière, il se peut que X', elle, la franchisse, auquel cas une des deux particules sera tuée et pas l'autre — le phénomène inverse est également possible. Nous voulons montrer que néanmoins, ces phénomènes de « demi-tour au bord » deviennent suffisamment improbables quand δ tend vers 0.

Nous avons d'abord besoin d'introduire quelques notations :

Définition 25. *On appelle B'_{R_2} la boule B_{R_2} décalée du vecteur $\overrightarrow{y'y}$; on note $B^*_{R_2}$ l'enveloppe convexe de $B_{R_2} \cup B'_{R_2}$, et $B^{**}_{R_2} = B_{R_2} \cap B'_{R_2}$.*
On note $\partial^+ B_{R_2} = B_{R_2} \smallsetminus B'_{R_2}$, et $\partial^- B_{R_2} = B^*_{R_2} \smallsetminus B_{R_2}$ ([7]). On note enfin $\partial^* B_{R_2} = \partial^+ B_{R_2} \cup \partial^- B_{R_2} = B^*_{R_2} \smallsetminus B^{**}_{R_2}$.
Par souci de légèreté, en l'absence d'ambiguïté nous omettrons les indices R_2.

On a alors immédiatement :

Avis 26.

$$\left\{\begin{array}{l} \{t < \tau_{{}^cB}\} \smallsetminus \{t < \tau'_{{}^cB}\} \subset \{\tau_{\overline{\partial^+ B}} < t\} \cap \{t < \tau_{{}^cB^*}\} \\ \{t < \tau'_{{}^cB}\} \smallsetminus \{t < \tau_{{}^cB}\} \subset \{\tau_{\overline{\partial^- B}} < t\} \cap \{t < \tau_{{}^cB^*}\}, \end{array}\right. \quad (89)$$

donc

$$\{t < \tau_B\} \triangle \{t < \tau'_B\} \subset \{\tau_{\overline{\partial^* B}} < t\} \cap \{t < \tau_{{}^cB^*}\}. \quad (90)$$

[7] À noter que $\partial^+ B$ et $\partial^- B$ ne jouent pas tout-à-fait des rôles symétriques.

Notons *1/2-tr au b.* l'événement $\{\tau_{\overline{\partial^* B}} < t\} \cap \{t < \tau_{{}^cB^*}\}$. On écrit que :

$$\left| \frac{e^{-|\overrightarrow{xy}|^2/2\sigma t}}{(2\pi\sigma t)^{d/2}} Q \left[\mathbb{1}_{t < \tau_{{}^cB_{R_2}}} \exp\left\{ \frac{1}{\sigma} \int_0^t \left(\overrightarrow{v}(X_u) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}X_u} - \frac{|\overrightarrow{v}(X_u)|^2}{2} \mathrm{d}u \right) \right\} \right] \right.$$
$$\left. - \frac{e^{-|\overrightarrow{xy}|^2/2\sigma t}}{(2\pi\sigma t)^{d/2}} Q \left[\mathbb{1}_{t < \tau'_{{}^cB_{R_2}}} \exp\left\{ \frac{1}{\sigma} \int_0^t \left(\overrightarrow{v}(X_u) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}X_u} - \frac{|\overrightarrow{v}(X_u)|^2}{2} \mathrm{d}u \right) \right\} \right] \right|$$
$$\leqslant \underbrace{\frac{e^{-|\overrightarrow{xy}|^2/2\sigma t}}{(2\pi\sigma t)^{d/2}} Q \left[\mathbb{1}_{1/2\text{-}tr\ au\ b.} \exp\left\{ \frac{1}{\sigma} \int_0^t \left(\overrightarrow{v}(X_u) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}X_u} - \frac{|\overrightarrow{v}(X_u)|^2}{2} \mathrm{d}u \right) \right\} \right]}_{(*)}. \tag{91}$$

Un raisonnement analogue à celui du § 6 nous montre que $(*)$ est une sorte de « densité de demi-tour au bord », i.e. que $(*)$ vérifie pour tout $A \subset B_{R_\varepsilon}$ mesurable :

$$\int_A (*)\,\mathrm{d}y = \mathbb{P}_x(1/2\text{-}tr\ au\ b. \text{ et } X_t \in A). \tag{92}$$

Cela va nous permettre d'obtenir un majorant de $(*)$ sur B_ε : on va montrer qu'il existe une constante c_1 indéprendante de A telle que

$$\mathbb{P}_x(1/2\text{-}tr\ au\ b. \text{ et } X_t \in A) \leqslant c_1|A|, \tag{93}$$

d'où on tirera $(*) \leqslant c_1$ pour tout $y \in B_\varepsilon$.

En utilisant la propriété de Markov avec les temps d'arrêts $\tau_{\overline{\partial^* B}}$ et $\inf\{u \geqslant \tau_{\overline{\partial^* B}}\,;\, X_u \in \overline{B_{R_1}}\}$, on s'aperçoit que

$$\mathbb{P}(1/2\text{-}tr\ au\ b. \text{ et } X_t \in A) \leqslant \sup_{x' \in \overline{\partial^* B}} \mathbb{P}_{x'}\left(\tau_{\overline{B_{R_1}}} < \tau_{{}^cB^*}\right) \cdot \sup_{\substack{x'' \in \partial B_{R_1} \\ u > 0}} \mathbb{P}_{x''}\left(X_u \in A\right). \tag{94}$$

Dans le second membre de (94), le facteur de droite est majoré par $K_5|A|$ d'après les majorations du § 7.2. Il nous reste donc à majorer le facteur de gauche.

On commence par une observation géométrique :

Avis 27. *Soit $x' \in \overline{\partial^* B}$. Soit $\overrightarrow{\imath}$ le vecteur unitaire $\overrightarrow{ox'}/|ox'|$. Alors, pour $z \in \mathbb{R}^d$:*

$$\begin{cases} \overrightarrow{x'z} \cdot \overrightarrow{\imath} \geqslant \delta & \Rightarrow \quad z \notin B^*\,; \\ z \in \overline{B_{R_1}} & \Rightarrow \quad \overrightarrow{x'z} \cdot \overrightarrow{\imath} \leqslant -(R_2 - R_1 - 2\varepsilon). \end{cases} \tag{95}$$

Cette observation va nous permettre de nous ramener à un mouvement brownien unidimensionnel, par une technique de couplage analogue à celle de la démonstration de la proposition 18, et que par conséquent nous ne détaillerons pas ici. Toujours est-il que, notant $w_{0,-W}$ la loi d'un mouvement brownien unidimensionnel issu de 0 et soumis à une dérive constante $-W$, il vient que :

$$\mathbb{P}_{x'}\left(\tau_{\overline{B_{R_1}}} < \tau_{{}^cB*}\right) \leqslant w_{0,-W}\left(\tau_{\{-(R_2-R_1-2\varepsilon)\}} < \tau_{\{\delta\}}\right). \tag{96}$$

Or, sous la loi $w_{0,-W}$, $e^{\frac{2W}{\sigma}x_u}$ est une martingale, comme on le vérifie par la formule d'Itô. Il s'ensuit, puisque le mouvement brownien avec dérive finit presque-sûrement par quitter $]-(R_2-R_1-2\varepsilon),\delta[$, que

$$w_{0,-W}\left(\tau_{\{-(R_2-R_1-2\varepsilon)\}}<\tau_{\{\delta\}}\right)=\frac{e^{\frac{2W}{\sigma}\delta}-1}{e^{\frac{2W}{\sigma}\delta}-e^{-\frac{2W}{\sigma}(R_2-R_1-2\varepsilon)}}=O(\delta). \tag{97}$$

Finalement, pour $y\in B_\varepsilon$:

$$(*)\leqslant K_5O(\delta)=O(\delta). \tag{98}$$

8.3 Termes de couplage

Maintenant, nous voulons majorer

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{e^{-|\overrightarrow{xy'}|^2/2\sigma t}}{(2\pi\sigma t)^{d/2}}Q\left[\mathbb{1}_{t<\tau'_{{}^cB_{R_2}}}\exp\left\{\frac{1}{\sigma}\int_0^t\left(\overrightarrow{v}(X'_u)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}X_u}+\overrightarrow{v}(X'_u)\cdot\overrightarrow{yy'}\,\frac{\mathrm{d}u}{t}-\frac{|\overrightarrow{v}(X'_u)|^2}{2}\,\mathrm{d}u\right)\right\}\right]\\
&\qquad-\frac{e^{-|\overrightarrow{xy}|^2/2\sigma t}}{(2\pi\sigma t)^{d/2}}Q\left[\mathbb{1}_{t<\tau'_{{}^cB_{R_2}}}\exp\left\{\frac{1}{\sigma}\int_0^t\left(\overrightarrow{v}(X_u)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}X_u}-\frac{|\overrightarrow{v}(X_u)|^2}{2}\,\mathrm{d}u\right)\right\}\right]\Bigg|\\
&\leqslant Q\Bigg[\mathbb{1}_{t<\tau'_{{}^cB_{R_2}}}\Bigg|\frac{e^{-|\overrightarrow{xy'}|^2/2\sigma t}}{(2\pi\sigma t)^{d/2}}\exp\left\{\frac{1}{\sigma}\int_0^t\left(\overrightarrow{v}(X'_u)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}X_u}+\overrightarrow{v}(X'_u)\cdot\overrightarrow{yy'}\,\frac{\mathrm{d}u}{t}-\frac{|\overrightarrow{v}(X'_u)|^2}{2}\,\mathrm{d}u\right)\right\}\\
&\qquad\qquad-\frac{e^{-|\overrightarrow{xy}|^2/2\sigma t}}{(2\pi\sigma t)^{d/2}}\exp\left\{\frac{1}{\sigma}\int_0^t\left(\overrightarrow{v}(X_u)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}X_u}\,\frac{\mathrm{d}u}{t}-\frac{|\overrightarrow{v}(X_u)|^2}{2}\,\mathrm{d}u\right)\right\}\Bigg|\Bigg].
\end{aligned} \tag{99}$$

Pour borner ce genre d'expression, on utilise un lemme élémentaire très pratique, qui permet de séparer la majoration en plusieurs termes :

Lemme 28. *Soient $a,a',b,b'\geqslant 0$, on a :*

$$|a'b'-ab|\leqslant|a'-a|b+|b'-b|a'. \tag{100}$$

Preuve. On utilise simplement l'identité $a'b'-ab=(a'-a)b+(b'-b)a$. □

Avant de nous lancer dans les calculs, remarquons que si, comme nous l'avons suggéré, ε est suffisamment petit pour avoir $R_2+2\varepsilon\leqslant R$, on a sous l'événement $\{t<\tau'_{{}^cB_{R_2}}\}$ que $X_u,X'_u\in B_R$ pour tout $u\in[0,t]$.

Pour commencer, on observe que

$$|e^{-|\overrightarrow{xy'}|^2/2\sigma t}-e^{-|\overrightarrow{xy}|^2/2\sigma t}|\leqslant e^{-|\overrightarrow{xy'}|^2/2\sigma t}|e^{4R_2\delta/\sigma t}-1|\ : \tag{101}$$

en effet $|\overrightarrow{xy'}|^2-|\overrightarrow{xy}|^2=(\overrightarrow{xy}+\overrightarrow{xy'})\cdot\overrightarrow{yy'}$, d'où $\left||\overrightarrow{xy'}|^2-|\overrightarrow{xy}|^2\right|\leqslant(|\overrightarrow{xy}|+|\overrightarrow{xy'}|)\delta\leqslant 4R_2\delta$. Comme, pour $|x|\leqslant a$, on a $|e^x-1|\leqslant e^a-1$, (101) s'ensuit en factorisant par $e^{-|\overrightarrow{xy'}|^2/2\sigma t}$.

De (101), on déduit par le lemme 28 :

$$\begin{aligned}|p_*^t(x,y')-p_*^t(x,y)| \leqslant O(\delta) + \frac{e^{-|\overrightarrow{xy'}|^2/2\sigma t}}{(2\pi\sigma t)^{d/2}} \cdot (e^{4R_2\delta/\sigma t}-1)\cdot e^{W^2 t/\sigma + 4WR/\sigma} \\ + \frac{e^{-|\overrightarrow{xy'}|^2/2\sigma t}}{(2\pi\sigma t)^{d/2}} \times \\ Q\Bigg[\mathbb{1}_{t<\tau'_{{}^c B_{R_2}}} \Bigg| \exp\Bigg\{\frac{1}{\sigma}\int_0^t \Bigg(\overrightarrow{v}(X'_u)\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}X_u} + \overrightarrow{v}(X'_u)\cdot \frac{\overrightarrow{yy'}}{t}\,\mathrm{d}u - \frac{|\overrightarrow{v}(X'_u)|^2}{2}\,\mathrm{d}u\Bigg)\Bigg\} \\ - \exp\Bigg\{\frac{1}{\sigma}\int_0^t \Bigg(\overrightarrow{v}(X_u)\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}X_u} - \frac{|\overrightarrow{v}(X_u)|^2}{2}\,\mathrm{d}u\Bigg)\Bigg\}\Bigg|\Bigg],\end{aligned} \tag{102}$$

où on a utilisé implicitement la majoration

$$Q\left[\mathbb{1}_{t<\tau'_{{}^c B_{R_2}}} \exp\left\{\frac{1}{\sigma}\int_0^t \left(\overrightarrow{v}(X_u)\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}X_u} - \frac{|\overrightarrow{v}(X_u)|^2}{2}\,\mathrm{d}u\right)\right\}\right] \leqslant e^{W^2 t/\sigma + 4WR/\sigma}, \tag{103}$$

qui résulte d'un travail tout-à-fait similaire à celui du § 7.1.

Passons à l'étape suivante. On aura remarqué que le couplage fait apparaître un terme en plus dans l'intégrale en exponentielle, dû à la dérive supplémentaire que doit subir la particule pour arriver en y'. En utilisant la majoration triviale

$$t < \tau'_{{}^c B_{R_2}} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{\sigma}\int_0^t \overrightarrow{v}(X'_u)\cdot \frac{\overrightarrow{yy'}}{t}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{W\delta}{\sigma}, \tag{104}$$

on obtient que

$$\begin{aligned}|p_*^t(x,y')-p_*^t(x,y)| \leqslant O(\delta) \\ + \frac{e^{-|\overrightarrow{xy'}|^2/2\sigma t}}{(2\pi\sigma t)^{d/2}} \left(e^{4R_2\delta/\sigma t} + e^{W\delta/\sigma} - 2\right) e^{W^2 t/\sigma + 4WR/\sigma} \\ + \frac{e^{-|\overrightarrow{xy'}|^2/2\sigma t}}{(2\pi\sigma t)^{d/2}} \times Q\Bigg[\mathbb{1}_{t<\tau'_{{}^c B_{R_2}}} \Bigg| \exp\Bigg\{\frac{1}{\sigma}\int_0^t \Bigg(\overrightarrow{v}(X'_u)\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}X_u} - \frac{|\overrightarrow{v}(X'_u)|^2}{2}\,\mathrm{d}u\Bigg)\Bigg\} \\ - \exp\Bigg\{\frac{1}{\sigma}\int_0^t \Bigg(\overrightarrow{v}(X_u)\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}X_u} - \frac{|\overrightarrow{v}(X_u)|^2}{2}\,\mathrm{d}u\Bigg)\Bigg\}\Bigg|\Bigg].\end{aligned} \tag{105}$$

Au terme suivant ! Nous observons qu'on a :

$$\begin{aligned}&\big||\overrightarrow{v}(X'_u)|^2 - |\overrightarrow{v}(X_u)|^2\big| \\ &= |\overrightarrow{v}(X_u)+\overrightarrow{v}(X'_u)|\cdot|\overrightarrow{v}(X'_u)-\overrightarrow{v}(X_u)| \leqslant 2W\cdot k|\overrightarrow{X_u X'_u}| \leqslant 2Wk\delta,\end{aligned} \tag{106}$$

d'où toujours par les mêmes arguments :

$$\begin{aligned}
&|p_*^t(x,y') - p_*^t(x,y)| \leqslant O(\delta) + \\
&\quad \frac{e^{-|\overrightarrow{xy'}|^2/2\sigma t}}{(2\pi\sigma t)^{d/2}} \left(e^{4R_2\delta/2\sigma t} + e^{W\delta/\sigma} + e^{2Wk\delta/\sigma} - 3\right) e^{W^2 t/\sigma + 4WR/\sigma} \\
&\quad + \frac{e^{-|\overrightarrow{xy'}|^2/2\sigma t}}{(2\pi\sigma t)^{d/2}} Q\left[\mathbb{1}_{t<\tau'_{cB_{R_2}}} \left| e^{\frac{1}{\sigma}\int_0^t \overrightarrow{v}(X'_u)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}X_u}} - e^{\frac{1}{\sigma}\int_0^t \overrightarrow{v}(X_u)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}X_u}} \right|\right].
\end{aligned} \tag{107}$$

(on a utilisé implicitement que $e^{-\int_0^t \frac{|\overrightarrow{v}(X_u)|^2}{2\sigma}\,\mathrm{d}u} \leqslant 1$).

Il nous reste à majorer

$$Q\left[\mathbb{1}_{t<\tau'_{cB_{R_2}}} \left| e^{\frac{1}{\sigma}\int_0^t \overrightarrow{v}(X'_u)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}X_u}} - e^{\frac{1}{\sigma}\int_0^t \overrightarrow{v}(X_u)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}X_u}} \right|\right]. \tag{108}$$

Cette fois-ci, on ne peut plus utiliser le lemme 28 car les majorants à l'intérieur de l'intégrale ne sont plus constants. Qu'à cela ne tienne ! On écrit que par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned}
&(108) \leqslant \\
&Q\left[\mathbb{1}_{t<\tau'_{cB_{R_2}}} e^{\frac{2}{\sigma}\int_0^t \overrightarrow{v}(X_u)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}X_u}}\right]^{1/2} \cdot Q\left[\mathbb{1}_{t<\tau'_{cB_{R_2}}} \left(e^{\frac{1}{\sigma}\int_0^t\left(\overrightarrow{v}(X'_u)-\overrightarrow{v}(X_u)\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}X_u}} - 1\right)^2\right]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{109}$$

Ainsi nous voyons apparaître des semimartingales dans l'exponentielle, que nous allons contrôler par les mêmes méthodes qu'au § 7.1.

Comme nous nous sommes arrangés pour avoir $X_u, X'_u \in B_R$ sous $\{t < \tau'_{cB_{R_2}}\}$, on a alors que sous cette condition $|\overrightarrow{v}(X_u)|, |\overrightarrow{v}(X'_u)| \leqslant W$ et $|\overrightarrow{v}(X'_u) - \overrightarrow{v}(X_u)| \leqslant k\delta$. On utilise alors exactement les mêmes arguments que dans le § 7.1 pour aboutir à :

Proposition 29. *1. Sur l'événement $\{t < \tau'_{cB_{R_2}}\}$, la variable aléatoire $\frac{2}{\sigma}\int_0^t \overrightarrow{v}(X_u)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}X_u}$ coïncide avec une décomposition $\mathcal{X}_\mathrm{d} + \mathcal{X}_\mathrm{m}$ ([8]), où $\mathcal{X}_\mathrm{d}$ et $\mathcal{X}_\mathrm{m}$ sont deux variables aléatoires vérifiant respectivement :*

$$Q\text{-}p.s. \quad |\mathcal{X}_\mathrm{d}| \leqslant 8\frac{RW}{\sigma} \tag{110}$$

et

$$\forall\lambda\in\mathbb{R} \quad Q\left[e^{\lambda\mathcal{X}_\mathrm{m}}\right] \leqslant e^{\left(4\frac{W^2 t}{\sigma}\right)\lambda^2}. \tag{111}$$

2. De même, sur $\{t < \tau'_{cB_{R_2}}\}$, l'intégrale $\frac{1}{\sigma}\int_0^t (\overrightarrow{v}(X'_u) - \overrightarrow{v}(X_u))\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}X_u}$ s'écrit $\mathcal{Y}_\mathrm{d} + \mathcal{Y}_\mathrm{m}$, avec

$$Q\text{-}p.s. \quad |\mathcal{Y}_\mathrm{d}| \leqslant 4\frac{Rk\delta}{\sigma} \tag{112}$$

et

$$\forall\lambda\in\mathbb{R} \quad Q\left[e^{\lambda\mathcal{Y}_\mathrm{m}}\right] \leqslant e^{\frac{k^2\delta^2 t}{\sigma}\lambda^2}. \tag{113}$$

[8] d comme « dérive » et m comme « martingale », NdA.

On en déduit dans un premier temps :

$$Q\left[\mathbb{1}_{t<\tau'_{c_{B_{R_2}}}} e^{\frac{2}{\sigma}\int_0^t \overrightarrow{v}(X_u)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}X_u}}\right]^{1/2} \leqslant e^{4\frac{RW}{\sigma}+2\frac{W^2 t}{\sigma}}. \tag{114}$$

Pour contrôler le facteur de droite du second membre de (109), on a besoin d'un lemme *ad hoc* :

Lemme 30. *Soit $\mathcal{Y}$ une variable aléatoire de loi P, vérifiant*

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\quad P[e^{\lambda\mathcal{Y}}]\leqslant e^{c_1\frac{\lambda^2}{2}} \tag{115}$$

pour une constante $c_1\geqslant 0$. Alors :

$$P\left[(e^{\mathcal{Y}}-1)^2\right]\leqslant e^{2c_1}+2e^{c_1/2}-3. \tag{116}$$

Preuve. Il suffit de vérifier l'inégalité analytique

$$\forall y\in\mathbb{R}\quad (e^y-1)^2\leqslant e^{2y}+2e^{-y}-3 \tag{117}$$

et d'utiliser (115) avec $\lambda=2$ et $\lambda=-1$. $\square$

On écrit alors

$$Q\left[\left(e^{\mathcal{Y}_\mathrm{d}+\mathcal{Y}_\mathrm{m}}-1\right)^2\right]=Q\left[\left(e^{\mathcal{Y}_\mathrm{d}}\left(e^{\mathcal{Y}_\mathrm{m}}-1\right)+\left(e^{\mathcal{Y}_\mathrm{d}}-1\right)\right)^2\right]$$
$$\leqslant 2Q\left[e^{2\mathcal{Y}_\mathrm{d}}\left(e^{\mathcal{Y}_\mathrm{m}}-1\right)^2+\left(e^{\mathcal{Y}_\mathrm{d}}-1\right)^2\right] \tag{118}$$

pour en déduire dans un deuxième temps :

$$Q\left[\mathbb{1}_{t<\tau'_{c_{B_{R_2}}}}\left(e^{\frac{1}{\sigma}\int_0^t\left(\overrightarrow{v}(X'u)-\overrightarrow{v}(X_u)\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}X_u}}-1\right)^2\right]^{1/2}\leqslant$$
$$\sqrt{2}\left(e^{8\frac{kR\delta}{\sigma}}\left(e^{4\frac{k^2t\delta^2}{\sigma}}+2e^{\frac{k^2t\delta^2}{\sigma}}-3\right)+\left(e^{\frac{4kR\delta}{\sigma}}-1\right)^2\right)^{1/2}. \tag{119}$$

Donc, en récapitulant tout, on a enfin notre formule de couplage :

$$|p_*^t(x,y')-p_*^t(x,y)|\leqslant O(\delta)+$$
$$\frac{e^{-|\overrightarrow{xy'}|^2/2\sigma t}}{(2\pi\sigma t)^{d/2}}\left\{\left(e^{\frac{4R_2\delta}{2\sigma t}}+e^{\frac{W\delta}{\sigma}}+e^{\frac{2Wk\delta}{\sigma}}-3\right)e^{\frac{4WR}{\sigma}+\frac{W^2t}{\sigma}}\right.$$
$$\left.+\sqrt{2}e^{4\frac{RW}{\sigma}+2\frac{W^2t}{\sigma}}\left(e^{8\frac{kR\delta}{\sigma}}\left(e^{4\frac{k^2t\delta^2}{\sigma}}+2e^{\frac{k^2t\delta^2}{\sigma}}-3\right)+\left(e^{4\frac{kR\delta}{\sigma}}-1\right)^2\right)^{1/2}\right\}. \tag{120}$$

Hélas, nous rencontrons le même écueil qu'avec la formule (48) que nous avions obtenue au § 7.1, à savoir que notre majorant va mal se comporter quand $t\longrightarrow\infty$, ce qui nous interdit de l'utiliser pour définir $\kappa(t)$, car (38) ne serait pas vérifiée.
À même mal, même remède ! Nous allons utiliser la décroissance exponentielle de $\mathbb{P}^*$ jointe à la relation de Chapman-Kolomogorov pour transformer (120) en un résultat exponentiellement décroissant en t, donc convergent par intégration.

8.4 Contrôle aux temps grands

D'abord, commençons par vérifier que la formule (120) se comporte bien aux temps petits, i.e. qu'elle donne une borne uniforme en x et t pour $x \in \partial B_{R_1}$ et $t \leqslant K_3$. Nous avons besoin pour ce faire de deux lemmes analytiques élémentaires :

Lemme 31.

1. *Pour* $a > 0$ *:*
$$\sup_{t \geqslant 0} \frac{e^{-a/t}}{t^{d/2}} = \left(\frac{d}{2ea}\right)^{d/2}. \tag{121}$$

2. *Pour* $a > b > 0$ *:*
$$\sup_{t \geqslant 0} e^{-a/t}(e^{b/t} - 1) \leqslant b \left(\frac{d+2}{2e(a-b)}\right)^{d/2+1}. \tag{122}$$

Preuve. Le n° 1 vient simplement d'une étude de fonction ; le n° 2 s'obtient à partir du n° 1 et de l'inégalité $e^c - 1 \leqslant ce^c$ pour $c \geqslant 0$. □

On tire alors de (120), pour $x \in \partial B_{R_1}$, $y, y' \in B_\varepsilon$, $t \leqslant K_3$, pour δ suffisamment petit :

$$|p_*^t(x,y') - p_*^t(x,y')| \leqslant O(\delta) + \left\{ \frac{1}{(2\pi\sigma)^{d/2}} \cdot \frac{2R_2\delta}{\sigma} \left(\frac{d+2}{2e\left((R_1-\varepsilon)^2/2\sigma - 2R_2\delta/\sigma\right)} \right)^{d/2+1} \right.$$
$$\left. + \left(\frac{d\sigma}{e(R_1-\varepsilon)^2}\right)^{d/2} \left(e^{W\delta/\sigma} + e^{2Wk\delta/\sigma} - 2\right) \right\} \times e^{4WR/\sigma + W^2K_3/\sigma} + \left(\frac{d\sigma}{e(R_1-\varepsilon)^2}\right)^{d/2} \times$$
$$\sqrt{2}e^{4RW/\sigma + 2W^2K_3/\sigma} \left\{ e^{8kR\delta/\sigma}\left(e^{4k^2K_3\delta^2/\sigma} + 2e^{k^2K_3\delta^2/\sigma} - 3\right) + \left(e^{4kR\delta/\sigma} - 1\right)^2 \right\}^{1/2}$$
$$= O(\delta). \tag{123}$$

Comme, pour δ suffisamment petit, il existe une constante K_8 telle que $|O(\delta)| \leqslant K_8|\delta|$, il s'ensuit que $p_*^t(x,\cdot)$ est K_8-lipschitzienne sur B_ε, et ce pour tout $x \in \partial B_{R_1}$; on peut donc prendre $\kappa(t) = K_8$ pour $t \in]0, K_3]$.

Maintenant, pour traiter le cas où $t > K_3$, on va utiliser la relation de Chapman-Kolmogorov. L'astuce consiste à remarquer que, pour t fixé égal à K_3, on peut obtenir une majoration de $p^t(x,y)$ indépendante de $x \in B_{R_2}$:

$$\forall x \in B_{R_2} \quad \forall y \in B_\varepsilon \quad |p_*^{K_3}(x,y') - p_*^{K_3}(x,y)| \leqslant O(\delta) +$$
$$\frac{1}{(2\pi\sigma K_3)^{d/2}} \left\{ \left(e^{\frac{4R_2\delta}{2\sigma K_3}} + e^{\frac{W\delta}{\sigma}} + e^{\frac{2Wk\delta}{\sigma}} - 3\right) e^{4\frac{WR}{\sigma} + \frac{W^2K_3}{\sigma}} \right.$$
$$\left. \sqrt{2}e^{4\frac{RW}{\sigma} + 2\frac{W^2K_3}{\sigma}} \left\{ e^{8\frac{kR\delta}{\sigma}} \left(e^{4\frac{k^2K_3\delta^2}{\sigma}} + 2e^{\frac{k^2K_3\delta^2}{\sigma}} - 3 \right) + \left(e^{4\frac{kR\delta}{\sigma}} - 1\right)^2 \right\}^{1/2} \right\}$$
$$= O(\delta). \tag{124}$$

On écrit alors $t = (t - K_3) + K_3$ pour obtenir, par la relation de Chapman-Kolmogorov :

$$\begin{aligned}
&\forall t > K_3 \quad \forall x \in \partial B_{R_1} \quad \forall y, y' \in B_\varepsilon \\
&\quad |p_*^t(x,y') - p_*^t(x,y)| = \left| \int_{B_{R_2}} p_*^{t-K_3}(x,x') \left(p_*^{K_3}(x',y') - p_*^{K_3}(x',y)\right) \mathrm{d}x' \right| \\
&\qquad \overset{(54)}{\leqslant} K_1 e^{-K_2 t} \sup_{x' \in B_{R_2}} |p_*^{K_3}(x',y') - p_*^{K_3}(x',y)| \overset{(124)}{\leqslant} K_1 e^{-K_2 t} O(\delta).
\end{aligned} \tag{125}$$

Puisque $|O(\delta)| \leqslant K_9|\delta|$ pour δ suffisamment petit, $p_*^t(x,\cdot)$ est $K_1K_9e^{-K_2t}$-lipschitzienne sur B_ε pour tous $x \in \partial B_{R_1}$, $t > K_3$, et donc on peut prendre $\kappa(t) = K_1K_9e^{-K_2t}$ pour $t > K_3$. Finalement, on a bien obtenu une expression de $\kappa(t)$ vérifiant (37) et (38), ce qui achève notre démonstration du théorème 1.

Références

[1] R. F. Bass, *Diffusions and Elliptic Operators*, Springer, 1998.

[2] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of second order*, seconde édition, Springer-Verlag, 1983.

[3] W. Feller, *An Introduction to probability theory and its applications*, J. Wiley, 1968.

[4] D. Revuz & M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, 1991.