Transition de phase atypique pour un potentiel de Vlasov

Rémi Peyre

1er mai 2011

1 Position du problème

La distribution des particules est représentée par une mesure μ sur $\mathbb{R}^n$, dont la densité est notée m. On note μ_0 la mesure uniforme de densité m_0. On travaille dans l'espace des distributions à distance de Wasserstein quadratique finie de μ_0, noté $\mathbf{F}$ et muni de la distance de Wasserstein notée d. Pour une mesure μ, on associe automatiquement la mesure $\pi := \mu - \mu_0$, de densité notée p.

On définit l'énergie libre $\mathcal{F} := \mathcal{U} + T\mathcal{S}$, T étant la température. Cette énergie est définie en fonction d'un potentiel d'interaction W sur $\mathbb{R}^n$, symétrique, supposé négatif et dans l'espace de Schwartz. On a :

$$\mathcal{U} := \frac{1}{2} \iint W(x-y)\, d\pi(x) d\pi(y); \tag{1}$$

$$\mathcal{S} := \int \big[m(x) \log\big(m(x)/m_0\big) - p(x)\big]\, dx. \tag{2}$$

On note $I := -\int_{\mathbb{R}^n} W(z) dz$.

On définit l'énergie d'activation par

$$E_{\mathrm{a}}(T) := \inf \Big\{ \sup_{t\in[0,1]} \big\{\mathcal{F}\big(\gamma(t)\big) - \mathcal{F}(\mu_0)\big\} \ : \\ \gamma\colon [0,1] \to \mathbf{F} \text{ lipschitzien}, \ \gamma(0) = \mu_0,\ \mathcal{F}(\gamma_1) < \mathcal{F}(\mu_0) \Big\}. \tag{3}$$

On sait alors que la température critique est $T_{\mathrm{c}} = m_0 I$, au sens où $E_{\mathrm{a}} = 0$ pour $T < T_{\mathrm{c}}$ et $E_{\mathrm{a}} > 0$ pour $T > T_{\mathrm{c}}$. Notre objectif est de détailler le comportement de E_{a} au voisinage de T_{c}. On note $\tau = T - T_{\mathrm{c}}$.

Dans ce texte, on notera c une constante non triviale (éventuellement dimensionnée) ne dépendant que des données du problème (en particulier, ne dépendant ni de f, ni de τ), dont la valeur précise ne nous importe pas. Aussi bien la grandeur que l'homogénéité notée par cette constante est susceptible de changer à chaque utilisation du symbole.

2 La fonctionnelle à minorer

Comme la fonctionnelle $\mathcal{F}$ est compliquée à étudier, on cherche $\tilde{F} \leqslant \mathcal{F}$ plus sympathique et qui coïncide avec $\mathcal{F}$ en μ_0. Introduisons une fonction h (il en existe) vérifiant les propriétés suivantes :

– h est une densité de probabilité ;
– h est régulière : on supposera ici que la fonction $\sup_{B(\cdot,r)} |D^k h|$ est intégrable pour un r arbitraire.
– La transformée de Fourier que h est strictement positive, à queues lourdes.

On notera dans la suite $f := h * p$.

On a alors $\mathcal{S}(p) \geqslant \mathcal{S}(f) \geqslant \|f\|_2^2/2m_0 - \|f\|_3^3/6m_0^2$. Maintenant, soit r une longueur fixée dans toute la suite du texte. On a alors $-\mathcal{U} \leqslant I\|f\|^2 - cG(f)$, où

$$G(f) := \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (r^2\xi \wedge 1)|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \Big)^{1/2}. \tag{4}$$

Au final,

$$\mathcal{F} \geqslant \tilde{\mathcal{F}} := c\tau\|f\|_2^2 + cG(f)^2 - cT\|f\|_3^3. \tag{5}$$

Notons que dans le cas qui nous intéresse, T évoluera sur une plage bornée, donc on peut l'intégrer aux constantes c.

3 Fonctions sur réseaux

Fixons-nous une base orthonormale $(u_1, \ldots, u_n)$. J'appelle réseau une partie de $\mathbb{R}^n$ de la forme $x_0 + r\mathbb{Z}^n$. Dans la suite, x_0 sera vu comme un élément du quotient $\mathbb{R}^n/r\mathbb{Z}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. Pour Λ un réseau et $f_{|\Lambda}$ une fonction définie sur ce réseau, et $p \geqslant 1$ un exposant, on pose

$$\|f_{|\Lambda}\|_p := \Big(\sum_{x\in\Lambda} |f(x)|^p \Big)^{1/p}, \tag{6}$$

avec l'extension habituelle pour $p = \infty$. On a évidemment

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{T}^n} \|f_{|x_0+r\mathbb{Z}^n}\|_p^p dx_0. \tag{7}$$

On note $\nabla_r f$ la fonction vectorielle définie par $(\nabla_r f)(x) := \big(f(x + ru_i) - f(x)\big)_{1\leqslant i\leqslant r}$, de sorte que la fonction discrète $\nabla_r f_{|\Lambda}$ s'exprime en fonction de $f_{|\Lambda}$. L'utilité des réseaux est de ramener la fonctionnelle G à quelque chose d'agréable :

$$G(f)^2 \geqslant \int_{\mathbb{T}^n} \|\nabla_r f_{|x_0+r\mathbb{Z}^n}\|_2^2 dx_0. \tag{8}$$

3.1 Lemme (Sobolev discret)**.** *Soient $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$ des exposants. Pour toute fonction $f_{|\Lambda}$ définie sur un réseau,*

$$\|f_{|\Lambda}\|_q \leqslant c\|f_{|\Lambda}\|_p^{1-\theta} \|\nabla_r f_{|\Lambda}\|_p^\theta, \tag{9}$$

où $\theta = n(1/p - 1/q) \wedge 1$.

4 Régularité de f

4.1 Lemme. *Avec les hypothèses de régularité faites sur h,*

$$\|D^k f\|_\infty \leqslant c(1 + c\|f\|_\infty) \tag{10}$$

Dans la suite du texte, on note $\varepsilon = 1/(2k+1)$.

4.2 Corollaire. *Si f est de la forme $h * p$, alors pour tout réseau Λ,*

$$\|f_{|\Lambda}\|_{2+1/k} \leqslant c\|f\|_2^{1-\varepsilon}(1 \vee c\|f\|_\infty^\varepsilon). \tag{11}$$

On peut appliquer ce résultat sur lui-même pour en obtenir une nouvelle version. En effet, prenant x_0 tel que $|f(x_0)| = \|f\|_\infty$ (à un chouïa près), on a

$$\|f\|_\infty \leqslant \|f_{|x_0+r\mathbb{Z}^n}\|_\infty \leqslant \|f_{|x_0+r\mathbb{Z}^n}\|_{2+1/k} \leqslant c\|f\|_2^{1-\varepsilon}(1 \vee c\|f\|_\infty^\varepsilon), \tag{12}$$

d'où $\|f\|_\infty \leqslant c\|f\|_2^{1-\varepsilon}(1 \vee \|f\|_2^\varepsilon)$, ce qu'on peut injecter dans la formule pour obtenir :

$$\|f_{|\Lambda}\|_{2+1/k} \leqslant c\|f\|_2^{1-\varepsilon}(1 \vee c\|f\|_2^\varepsilon). \tag{13}$$

Comme f a sa dérivée k-ième bornée, il en va de même de $\nabla_r f$, de sorte qu'on peut appliquer la formule précédent à cette fonction, ce qui donne

$$\forall \Lambda \quad \|\nabla_r f_{|\Lambda}\|_{2+1/k} \leqslant cG(f)^{1-\varepsilon}(1 \vee c\|f\|_2^\varepsilon). \tag{14}$$

5 Borne sur $\|f\|_3$

On va maintenant borner $\|f\|_3$ en fonction de $\|f\|_2$ et $G(f)$. Il suffit de mettre à bout les observations précédentes :

$$\begin{aligned}
\|f\|_3 = \Big(\int_{\mathbb{T}^n} \|f_{|x_0+r\mathbb{Z}^n}\|_3^3 dx_0 \Big)^{1/3} \\
&\leqslant r^{n/3} \sup_\Lambda \|f_{|\Lambda}\|_3 \\
&\leqslant c \sup_\Lambda \|f_{|\Lambda}\|_{2+1/k}^{1-\theta} \|\nabla_r f_{|\Lambda}\|_{2+1/k}^\theta \\
&\leqslant c\|f\|_2^{(1-\varepsilon)(1-\theta)} G(f)^{(1-\varepsilon)\theta} (1 \vee c\|f\|_2^\varepsilon),
\end{aligned} \tag{15}$$

où $\theta = (n/6 - \varepsilon) \wedge 1$.

On se retrouve enfin avec l'estimation suivante :

$$\mathcal{F} \geqslant c\tau\|f\|_2^2 + cG(f) - c\|f\|_2^{3(1-\varepsilon)(1-\theta)} G(f)^{3(1-\varepsilon)\theta} (1 \vee c\|f\|_2^{3\varepsilon}), \tag{16}$$

dont il faut minorer l'énergie d'activation.

6 Énergie d'activation

On a maintenant une expression réduite $\tilde{\mathcal{F}}(X,Y) = c\tau X^2 + cY^2 - cX^{3(1-\varepsilon)(1-\theta)} \times Y^{3(1-\varepsilon)\theta}(1 \vee cX^{3\varepsilon})$, dont on veut majorer l'énergie d'activation en fonction de τ.

On introduit $R = X \vee \tau^{-1/2} Y$. L'inégalité de Young donne alors

$$\tilde{\mathcal{F}}(X,Y) \geqslant c\tau R^2 - c\tau^{3(1-\varepsilon)\theta/2} R^{3(1-\varepsilon)} (1 \vee cR^{3\varepsilon}), \tag{17}$$

dont l'énergie d'activation est

$$c\tau^{3(1-\varepsilon)(1-\theta)/(1-3\varepsilon)} \wedge c\tau^{3(1-\theta+\varepsilon\theta)}. \tag{18}$$

On peut faire tendre k vers l'infini et donc ε vers 0, de sorte que l'exposant dans la dernière formule tend vers $3(1-\theta)$; rappelons que $\theta = (n/6 - \varepsilon) \wedge 1$. Au final on a démontré :

6.1 Théorème. *Quand* $T \searrow T_{\mathrm{c}}$, $\overline{\lim} \log E_{\mathrm{a}} / \log(T - T_c) \leqslant (3 - n/2)_+$.

Par ailleurs il est relativement facile, en trouvant un chemin explicite, de montrer que la borne est en fait atteinte.