Quatrième partie

Flambage de M^c Kean - Vlasov

Résumé

On considère une assemblée de particules soumises à un potentiel attractif non singulier à courte portée, en présence de bruit. Les particules sont supposées suffisamment denses pour que le système puisse être décrit par une équation aux dérivées partielles (*équation de Vlasov*), avec des frottements suffisamment forts pour que l'évolution soit du premier ordre (*équation de M^c Kean*). On sait alors que la dynamique du système est équivalente à la descente du gradient de l'énergie libre sur la « variété riemannienne de dimension infinie » associée à la métrique de Wasserstein W_2. On s'intéresse au cas où la condition initiale de la densité du système est uniforme sur $\mathbb{R}^d$. Cet état est toujours un équilibre, mais la stabilité de l'équilibre dépend de la température. Notre objectif est de déterminer à quelle température survient la transition de phase, et de minorer l'énergie d'activation dans les situations de stabilité, ce qui recquiert de prendre en compte les non-linéarités du système.

Pour minorer la fonctionnelle d'entropie, on fait agir sur la densité de particules un noyau markovien qui fait de celle-ci une fonction bornée. Cet argument passe par le démonstration d'un résultat nouveau sur la continuité du plongement de la « variété riemannienne » de Wasserstein dans un espace linéaire classique. Nos principaux résultats sont présentés au § 5 : sous des hypothèses de régularité suffisantes sur le potentiel d'interaction, on parvient ainsi à déterminer rigoureusement la température de transition de phase du système, en minorant l'énergie d'activation avec un exposant critique non-trivial. Certaines d'améliorations de ces résultats, notamment sur l'affaiblissement des hypothèses, sont encore en cours d'étude ; j'expose brièvement mes projets au § 6.

Conventions et notations

Homogénéité physique

Dans toute cette partie de la thèse, nous travaillerons sur des grandeurs physiques *dimensionnées* ; on notera $x \;\; [\mathsf{X}]$ pour dire que la grandeur x a pour homogénéité la dimension X. Nous utiliserons les quatre dimensions de base suivantes :

- Quantité de matière N ;
- Longueur L ;
- Énergie E ;
- Temps T.

On notera $\mathscr{N} \;\; [\mathsf{N}^{-1}]$ le nombre d'Avogadro.

Divers

- Dans toute cette partie de la thèse, « l'espace physique » désignera l'espace affine $\mathbb{R}^d$, d'homogénéité physique L, la dimension d étant un entier fixé. Cet espace est muni de sa structure Euclidienne : pour deux vecteurs $v, w \in \mathbb{R}^d$, la norme de v est notée $|v| \;\; [\mathsf{L}]$ et le produit scalaire de v et w est noté $v \cdot w \;\; [\mathsf{L}^2]$. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ est notée $dx \;\; [\mathsf{L}^d]$.
- Dans ce travail, le caractère π sera utilisé pour noter des mesures de Radon ; quand nous aurons besoin d'invoquer la constante d'Archimède, nous noterons celle-ci $\mathring{\pi}$ pour faire le distinguo.
- Toutes nos fonctions seront sous-entendues réelles, sauf transformation de Fourier où elles pourront être complexes.
- Quand nous dirons d'une fonction f sur $\mathbb{R}^d$ qu'elle est *gentille*, cela signifiera par exemple qu'elle est dans l'espace de Schwartz, i.e. qu'elle est infiniment différentiable et que toutes ses dérivées sont intégrables.
- Le crochet de dualité $\langle f, \mu \rangle$, pour $f \;\; [\mathsf{X}]$ une fonction gentille [‖] et $\mu \;\; [\mathsf{N}]$ une mesure de Radon, désigne $\int f(x)\, d\mu(x) \;\; [\mathsf{X}.\mathsf{N}]$.
- Pour deux fonctions gentilles $f \;\; [\mathsf{X}]$ et $g \;\; [\mathsf{Y}]$ sur $\mathbb{R}^d$, on note

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x)\, dx \qquad [\mathsf{X}.\mathsf{Y}.\mathsf{L}^d]. \tag{A}$$

- La transformée de Fourier d'une fonction gentille $f \;\; [\mathsf{X}]$ sur $\mathbb{R}^d$ est notée $\hat{f} \;\; [\mathsf{X}.\mathsf{L}^d]$. Nous suivons la convention usuelle en mathématiques :

$$\hat{f}(\xi \;\; [\mathsf{L}^{-1}]) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi \cdot x} f(x)\, dx. \tag{B}$$

- La différentielle d'une fonction gentille $f \;\; [\mathsf{X}]$ est notée $Df \;\; [\mathsf{X}.\mathsf{L}^{-1}]$ (à valeurs vectorielles).
- Pour $\mu \;\; [\mathsf{X}]$ une mesure sur un espace mesurable X, Y un autre espace mesurable et $f : X \to Y$ une fonction mesurable, on désigne par $f \# \mu \;\; [\mathsf{X}]$ la mesure-image de μ par f, i.e. la mesure sur Y caractérisée par $(f \# \mu)(B) = \mu(f^{-1}(B))$.

Espaces fonctionnels

☛ *Attention, certaines conventions utilisées ici ne sont pas standardes !*

[‖]. On étendra implicitement la notation au cas de fonctions moins régulières dans la mesure où cela fera sens.

0.9 Définition. Pour $s \in \mathbb{N}, p \in [1,+\infty)$, f [X] une fonction gentille sur $\mathbb{R}^d$, on définit la norme (homogène)

$$\|f\|_{s,p} := \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |D^s f(x)|^p dx \Big)^{1/p} \qquad [\mathsf{X}.\mathsf{L}^{d/p-s}]. \tag{C}$$

Pour $p = \infty$, on définit de même $\|f\|_{s,\infty} := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |D^s f(x)|$ [X.L^{-s}].

Dans le cas où $s \in [0,+\infty) \smallsetminus \mathbb{N}$, on étend la définition en posant formellement

$$|D^s f(x)|^p := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|D^{\lfloor s\rfloor} f(y) - D^{\lfloor s\rfloor} f(x)|^p}{|y-x|^{d+p(s-\lfloor s\rfloor)}}\, dy. \tag{D}$$

L'espace obtenu par complétion de la norme $\|\cdot\|_{s,p}$ est noté $\dot{W}^{s,p}$ et appelé *espace de Sobolev homogène* d'indices (s,p). Pour $s = 0$, $\dot{W}^{0,p}$ sera simplement noté L^p, et $\|f\|_{0,p}$ sera simplement noté $\|f\|_p$. ♢

0.10 Définition. Toujours pour f gentille, pour $(s_1,p_1),(s_2,p_2) \in [0,+\infty) \times [1,+\infty]$, on définit la norme (*inhomogène*)

$$\|f\|_{\substack{s_1,p_1\\ s_2,p_2}} := \|f\|_{s_1,p_1} \vee \|f\|_{s_2,p_2}, \tag{E}$$

et on note $W^{\substack{n_1,p_1\\ n_2,p_2}}$ l'espace obtenu par complétion de celle-ci. Cet espace sera appelé *espace de Sobolev inhomogène* d'indices (s_1,p_1) et (s_2,p_2). ♢

☛ *On veillera à ce que $\|f\|_{s,p}$ notera ici une norme homogène, alors que d'habitude cette notation est utilisée pour ce que nous noterions ici $\|f\|_{\substack{s,p\\ 0,p}}$.*

0.11 Notation. Le dual d'un espace de Banach W sera noté W' ; on le munira de sa topologie forte. ♢

1 Objet de l'étude

Introduction : Flambage

En 1948, un travail original d'A. Turing sur la morphogénèse animale [81] expliqua comment les taches d'un léopard (par exemple) pouvaient se former sans avoir à supposer aucun plan d'organisation supérieur : des espèces chimiques de distribution initiale uniforme, dont les concentrations évoluent sous des équations de réaction-diffusion, font en effet apparaître spontanément, dans certaines conditions, des motifs prononcés. À une autre échelle, on sait également que la formation des grandes structures cosmologiques (galaxies etc.) s'est faite à partir d'un univers primordial essentiellement homogène et isotrope, cette fois-ci *via*-ci un mécanisme d'effondrement gravitationnel régi par une équation de Vlasov - Poisson [60, §§ 4.1 - 5]. On parle de *brisure spontanée de symétrie* pour désigner cette apparition d'hétérogénéité *ex nihilo*. Le principe est que, bien que des raisons de symétrie fassent que la situation homogène est un équilibre, cet équilibre est *instable* et évoluera donc vers des équilibres stables qui, eux, ne seront pas symétriques.

Dans le cas du *flambage* d'une poutre [29], qui relève de cette famille de phénomènes, la stabilité ou non de l'équilibre symétrique dépend d'un paramètre du système — en l'occurrence, de la force exercée sur la poutre. Il se produit ainsi un phénomène de *transition de phase* au moment où cette force dépasse une certaine valeur critique, caractérisé par le retournement de la convexité de la fonctionnelle d'énergie au point symétrique. En dimension finie, ce genre de transition de phase est bien décrit par la *théorie des catastrophes* [23].

Dans cette partie de la thèse, nous allons étudier mathématiquement un exemple (relativement simple) de modèle *infinidimensionnel* où une structure spatiale hétérogène apparaît par brisure spontanée de symétrie après une transition de phase. Notre approche visera une rigueur mathématique complète ; en particulier, nous considèrerons nos objets d'étude *non localement* (par quoi j'entends « au-delà de leur développement limité »).

1.a Le modèle

Dans l'espace physique $\mathbb{R}^d$ $[\mathsf{L}]$, on considère un ensemble de particules ponctuelles soumises à trois types de forces :

- D'une part, un potentiel d'interaction v $[\mathsf{E.N}^{-2}]$;
- D'autre part, un bruit blanc gaussien dû à l'agitation thermique, à température T $[\mathsf{E.N}^{-1}]$;
- Enfin, une force de friction linéaire en la vitesse, dont le coefficient sera noté $\mathcal{N}^{-1}J$, avec J $[\mathsf{E.N}^{-1}.\mathsf{L}^{-2}.\mathsf{T}]$.

Dans la mesure où cela ne change pas le système physique, nous supposerons toujours v symétrique. Le cas qui nous intéresse est celui où le potentiel d'interaction est *non singulier*, *à courte portée* et *attractif*. Pour se fixer les idées, le lecteur pourra se représenter v comme $\mathscr{C}^\infty$, à support compact et négatif ; en fait, pour définir notre modèle, nous aurons simplement besoin de supposer v de classe $\mathscr{C}^1$ et intégrable. On notera informellement L_0 la *portée* de v, càd. l'échelle typique sur laquelle se font sentir les forces — dans le cas où v est à support compact, ce pourra être par exemple le diamètre du support de v. Nous définissons

1.1 Notation.

$$V := \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} \big(-\hat{v}(\xi)\big) \qquad [\mathsf{E.N}^{-2}.\mathsf{L}^d]. \tag{F}$$

◇

1.2 Hypothèse. On supposera qu'on a $V > 0$ — c'est ainsi qu'on comprendra l'hypothèse selon laquelle « le potentiel d'interaction est attractif »). ◇

1.3 Remarque. Dans la plupart des situations physiques rencontrées, ce seront les phénomènes à grande échelle qui détermineront la transition de phase, càd. qu'on aura $V = -\hat{v}(0)$, i.e. :

$$V = \int_{\mathbb{R}^d} \big(-v(x)\big)\,dx. \tag{G}$$

Ce sera en particulier le cas si v est négatif, ce que nous supposerons la plupart du temps. ♡

Nous supposons que la répartition des particules est suffisamment dense (à l'échelle de L_0) pour qu'on puisse la décrire par une représentation continue : notons ainsi μ $[\mathsf{N}]$ la mesure de répartition des particules, et $m(x) := d\mu(x)/dx$ $[\mathsf{N.L}^{-d}]$ sa densité au point x. Nous supposons également que les frottements auxquels sont soumis les particules sont suffisamment importants pour qu'on puisse décrire la dynamique du système par une équation du premier ordre [∗]. La densité m évolue alors selon l'*équation de Mc Kean - Vlasov* suivante :

$$\partial_t m = J^{-1}\nabla\cdot\big(T\nabla m + m\nabla(v*m)\big). \tag{H}$$

[∗]. Pour donner un sens précis à cette affirmation, il faudrait également tenir compte de la densité typique des particules : si celle-ci est R $[\mathsf{N.L}^{-d}]$, pour que la dynamique puisse être décrite au premier ordre, il faut avoir, notant Masse $[\mathsf{E.L}^{-2}.\mathsf{T}^2.\mathsf{N}^{-1}]$ la masse molaire des particules, $J^2 \gg \mathit{Masse}\cdot L_0^{-2}VR$.

1.4 Remarque. Ce genre d'équation se rencontre dans le modèle de Keller - Segel quasi-stationnaire [42], avec dans ce cas un potentiel v singulier et une mesure initiale μ_0 de masse finie — alors qu'ici nous considérons des mesures de masse infinie avec un potentiel régulier — ; la question est alors de savoir si la diffusion va l'emporter ou si, au contraire, les particules vont se regrouper en des points de mesure non nulle. Dolbeaut & Perthame [27] ont montré que les deux régimes pouvaient exister : en deçà d'une certaine température de transition, les particules forment des singularités en temps fini, tandis qu'au-delà le comportement du système devient diffusif. En outre, la température de transition de phase dépend uniquement de la masse totale de μ_0. ♡

1.b Descente de gradient

Otto [59] a montré que la dynamique de (H) pouvait s'interpréter comme une descente de gradient dans une « variété riemannienne ». La fonctionnelle de Lyapounov correspondant à cette descente de gradient est l'*énergie libre* du système :

$$\mathscr{F} := \mathscr{U} + T\mathscr{S} \qquad [\mathsf{E}], \tag{I}$$

où $\mathscr{U}$ est l'*énergie interne* :

$$\mathscr{U} := \frac{1}{2}\int_{(\mathbb{R}^d)^2} v(x-y)\,d\mu(x)d\mu(y) \qquad [\mathsf{E}], \tag{J}$$

et $\mathscr{S}$ est l'*entropie* [†] (définie à constante additive près) :

$$\mathscr{S} := \int_{\mathbb{R}^d} \log m(x)\,d\mu(x) \qquad [\mathsf{N}]. \tag{K}$$

1.c Espace de Wasserstein

L'espace fonctionnel associé à la descente de gradient d'Otto est, comme nous l'avons dit, une pseudo variété riemannienne (de dimension infinie, avec des singularités) ; seule sa structure métrique nous importera ici. Cette métrique est celle associé à la distance de Wasserstein W_2, dont nous rappelons la définition ci-dessous.

1.5 Définition ([84, définition 7.1.1])**.** Soient μ, ν [N] deux mesures positives σ-finies sur $\mathbb{R}^d$. Un *couplage* entre μ et ν est une mesure γ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dont les deux marginales sont respectivement μ et ν. Le *coût quadratique* de ce couplage est

$$I[\gamma] := \int_{(\mathbb{R}^d)^2} |y-x|^2\,d\gamma(x,y) \qquad [\mathsf{N.L}^2]. \tag{L}$$

Notant $\Gamma(\mu,\nu)$ l'ensemble des couplages entre μ et ν [‡], la *distance de Wasserstein* $W_2(\mu,\nu)$ entre μ et ν est alors définie comme

$$W_2(\mu,\nu) := \inf_{\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)} I[\gamma]^{1/2} \qquad [\mathsf{N}^{1/2}.\mathsf{L}]. \tag{M}$$

(On montre facilement qu'il s'agit effectivement d'une distance (à valeurs dans $[0,+\infty]$) sur l'ensemble des mesures sur $\mathbb{R}^d$). ◇

[†]. Qu'un physicien appellerait « néguentropie ».

[‡]. Éventuellement vide si μ et ν n'ont pas la même masse totale.

Notre objectif étant de regarder ce qui se passe au voisinage d'une distribution uniforme, il est alors naturel de se placer dans un espace que j'appellerai dans la suite *espace de Wasserstein*, défini ci-dessous :

1.6 Notation. Dans toute la suite de ce travail, on se fixe une densité non triviale $0 < R < \infty$ $[\mathsf{N}.\mathsf{L}^{-d}]$. Nous appellerons « mesure uniforme », notée λ, la mesure de densité uniforme R par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$d\lambda(x) := R\,dx \qquad [\mathsf{N}]. \tag{N}$$

Lorsqu'on considèrera une mesure de distribution de particules μ $[\mathsf{N}]$, on lui associera implicitement la mesure signée (de même homogénéité)

$$\pi := \mu - \lambda; \tag{O}$$

de même, on associera à la densité m $[\mathsf{N}.\mathsf{L}^{-d}]$ de la mesure μ la densité p (de même homogénéité) de la mesure π :

$$p(x) := m(x) - R. \tag{P}$$

$\diamondsuit$

1.7 Définition (espace de Wasserstein)**.** L'*espace de Wassertein*, noté $\mathbf{F}$, est l'ensemble des mesures μ telles que $W_2(\lambda,\mu) < \infty$, muni de la distance de Wasserstein W_2. $\diamondsuit$

1.8 Remarque. L'espace de Wasserstein est foncièrement *non linéaire*. Ainsi, si deux mesures μ_1, μ_2 de $\mathbf{F}$ sont associées repectivement à π_1, π_2, on prendra garde que cela n'a même pas de sens de parler de « $W_2(\pi_1,\pi_2)$ », vu que les mesures π_1 et π_2 ne sont pas positives. $\heartsuit$

$\mathbf{F}$ est en fait l'espace naturellement adapté non seulement à l'étude de la dynamique continue du système, mais aussi à celle des *fluctuations* de la dynamique réelle du système autour de cette équation — car il faut garder à l'esprit qu'en réalité, le modèle est constitué d'un nombre très grand mais fini de particules. Une façon d'exprimer cela est la proposition immédiate suivante :

1.9 Proposition. *Soit $f\colon (\mathbb{R}^d)^k \to \mathbb{R}$ $[\mathsf{X}.\mathsf{N}^{-k}]$ une fonction de k variables d'espace invariante par permutation des variables, de classe $\mathscr{C}^2$; pour μ $[\mathsf{N}]$ une mesure sur $\mathbb{R}^d$, notons*

$$F(\mu) := \langle f, \mu^{\otimes k}\rangle = \int_{(\mathbb{R}^d)^k} f(x_1,\dots,x_k)\,d\mu(x_1)\cdots d\mu(x_k) \qquad [\mathsf{X}]. \tag{Q}$$

Considérons N particules $X_1,\dots,X_N \in \mathbb{R}^d$, chacune étant soumise à une agitation brownienne de variation quadratique par unité de temps (dans chaque direction) TJ^{-1} $[\mathsf{L}^2.\mathsf{T}^{-1}]$, et notons

$$\hat{\mu} := \mathscr{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\delta}_{X_i} \qquad [\mathsf{N}] \tag{R}$$

leur distribution empirique. Alors la fonctionnelle $F(\mu)$ est soumise à des fluctuations dont la variation quadratique par unité de temps est égale à $\mathscr{N}^{-1}TJ^{-1}|\nabla_{\mathbf{F}}F(\mu)|^2$ $[\mathsf{X}^2.\mathsf{T}^{-1}]$, où le gradient de la fonctionnelle F dans $\mathbf{F}$ est défini formellement par :

$$|\nabla_{\mathbf{F}}F(\mu)| := \varlimsup_{\varepsilon\searrow 0}\left\{\frac{|F(\nu)-F(\mu)|}{W_2(\mu,\nu)} :\ 0 < W_2(\mu,\nu) \leqslant \varepsilon\right\} \qquad [\mathsf{X}.\mathsf{N}^{-1/2}.\mathsf{L}^{-1}]^{[\S]}. \tag{S}$$

En d'autres termes, les fluctuations de $\hat{\mu}$ sont analogues à celles d'un « mouvement brownien » (de dimension infinie) sur la « variété riemannienne » $\mathbf{F}$, dont la variation quadratique par unité de temps est $\mathscr{N}^{-1}J^{-1}T$ $[\mathsf{N}.\mathsf{L}^2.\mathsf{T}^{-1}]$. $\clubsuit$

[§]. On calcule que

$$|\nabla_{\mathbf{F}}F(\mu)|^2 = k^2\int_{\mathbb{R}^d} \|\langle\nabla_{x_1}f, \boldsymbol{\delta}_y \otimes \hat{\mu}^{\otimes(k-1)}\rangle\|^2\,d\mu(y). \tag{T}$$

Cela dit, compte tenu de l'interprétation en descente de gradient, nous oublierons en général les aspects dynamiques du modèle pour nous concentrer sur la structure statique de $\mathscr{F}$ dans **F**.

1.d Stabilité

Notre but est d'étudier la stabilité du système autour de l'équilibre λ. Commençons par observer que, pour μ une fonction de **F**, les expressions (J) et (K) sont infinies *stricto sensu* ; il faut donc les *renormaliser* (en leur enlevant formellement une constante) afin de leur donner une expression convergente. Dans la suite de ce travail, on prendra donc :

$$\mathscr{U}(\mu) := \frac{1}{2}\int_{(\mathbb{R}^d)^2} v(y-x)\big(m(x)m(y)-R^2\big)\,dx\,dy\,; \tag{U}$$

$$\mathscr{S}(\mu) := \int_{\mathbb{R}^d} \log\big(R^{-1}m(x)\big)\,d\mu(x). \tag{V}$$

Cette renormalisation, faite de sorte que $\mathscr{U}(\lambda), \mathscr{S}(\lambda) = 0$, donne également des expressions sympathiques en fonction de π : posant, pour p [N.L^{-d}],

$$\Phi(p) := (R+p)\log\big(1+R^{-1}p\big) - p \qquad [\mathsf{N.L}^{-d}], \tag{W}$$

on a [¶] :

$$\mathscr{U} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (v*p)(x)\,d\pi(x); \tag{X}$$

$$\mathscr{S} = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi\big(p(x)\big)\,dx. \tag{Y}$$

1.10 Remarque. On a $\Phi(p) \geqslant 0$ pour tout p, et $\Phi(p) \overset{p\to 0}{\sim} \frac{1}{2}R^{-1}p^2$. ♡

On définit rigoureusement la stabilité de la façon suivante :

1.11 Définition (stabilité)**.** Pour une température T donnée, nous dirons que l'équilibre homogène est *stable* quand la fonctionnelle $\mathscr{F}$ sur **F** atteint un minimum local en λ, i.e. quand il existe un voisinage de λ dans **F** sur lequel on a $\mathscr{F}(\mu) \geqslant \mathscr{F}(\lambda)$. ♢

1.12 Remarque. À mes yeux, la « bonne » définition de la stabilité [‖] est plutôt la suivante : un équilibre est stable quand tout chemin Lipschitzien $\gamma\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbf{F}$ issu de λ vérifie $\mathscr{F}(\gamma(t)) \geqslant \mathscr{F}(\lambda)$ au voisinage de 0 — ce qui est un peu moins contraignant que la définition 1.11.

Le même genre de remarque vaudra pour la définition 1.13. ♡

Quand l'équilibre est stable, la définition suivante nous permet de *quantifier* la stabilité de l'équilibre :

1.13 Définition (énergie d'activation)**.** Quand l'équilibre homogène est stable, son *énergie d'activation* E_{a} [E] est définie comme le supremum des valeurs E vérifiant la propriété suivante : sur la composante connexe de λ au sein du sous-ensemble de **F** constitué par les fonctions $\{\mu\colon \mathscr{F}(\mu) \leqslant \mathscr{F}(\lambda) + E\}$, $\mathscr{F}$ atteint un minimum global en λ. ♢

[¶]. Pour obtenir (X) et (Y), on utilise que pour $\mu \in \mathbf{F}$ on a formellement $\int_{\mathbb{R}^d} d\pi(x) = 0$ — je précise « formellement », car $\int \pi$ n'est pas définie proprement sur **F** dès que $d > 2$.

[‖]. Établie d'après des considérations sur des situations similaires en dimension finie.

1.14 Remarque. L'énergie d'activation indique l'énergie minimale qu'il faut fournir au système pour passer de l'état λ à un autre état plus stable. Pour $E_{\mathrm{a}} = 0$, il vaudrait d'ailleurs mieux qualifier l'équilibre λ de *métastable*, puisque la moindre « pichenette » suffit alors à briser cet équilibre.

On peut aussi interpréter l'énergie d'activation en termes de probabilité de flambage spontané : pour un système initialement homogène, en l'absence d'intervention extérieure il faudra attendre un temps (très long !) de l'ordre de $\exp(\mathcal{N} E_{\mathrm{a}}/T)$ fois le temps typique de l'évolution (macroscopique) du système [*] avant d'observer une brisure spontanée de symétrie du seul effet des fluctuations. ♡

1.15 Remarque. Pour peu que la formule (G) s'applique, l'état homogène ne correspond jamais à un minimum absolu de la fonctionnelle $\mathscr{F}$. Considérons en effet la mesure $\mu^\dagger$ obtenue à partir de la mesure λ ainsi : sur une grande boule (de rayon $\gg L_0$) de volume noté B $[\mathsf{L}^d]$, on porte la densité de la mesure à AR pour un certain $A \gg 1$ [1], la masse nécessaire à cette opération ayant été prélevée sur une boule encore plus grande de volume $(A-1)B$. Alors, au premier ordre en B, l'énergie interne (renormalisée) de cette mesure est $-\frac{1}{2}(A-1)AR^2VB$ et son entropie est $-(A\log A)RB$, d'où

$$\mathscr{F}(\mu^\dagger) \sim AR\big(-\tfrac{1}{2}(A-1)RV + (\log A)T\big)B, \tag{Z}$$

qui est strictement négatif pour peu que A soit choisi suffisamment grand.

À partir de cet exemple, on peut même montrer la propriété un peu plus forte selon laquelle l'énergie d'activation de l'équilibre homogène est toujours finie. ♡

Ainsi, nous avons maintenant un objectif mathématique précis : déterminer pour quelles valeurs de T l'équilibre homogène est stable, et minorer l'énergie d'activation dans les situations de stabilité.

2 Minoration de l'énergie libre

☛ *Dans cette section et les suivantes, nous supposons le potentiel v négatif sur tout $\mathbb{R}^d$. (Le cas général sera étudié au § 5.c).*

Pour montrer que l'énergie libre $\mathscr{F}$ atteint un minimum en λ, il nous faut *minorer* judicieusement cette quantité au voisinage de 0. Nous allons donc chercher des minorations de $\mathscr{U}$ et de $\mathscr{S}$.

2.a Entropie

Rappelons que l'entropie du système est $\mathscr{S} = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(p(x))\,dx$, où $\Phi(p)$ est défini par (W) ; pour minorer $\mathscr{S}$, il semble donc naturel de minorer $\Phi(\cdot)$. On a vu que $\Phi(p)$ était équivalent à $\frac{1}{2}R^{-1}p^2$ au voisinage de 0, mais il n'y a pas de minoration quadratique globale. On introduit donc un paramètre $\eta \in (0,+\infty)$ $[\mathsf{N}.\mathsf{L}^{-d}]$, et on décompose p en $p_2 + p_1$, où

$$\begin{cases} p_2 := \mathbf{1}_{|p| \leqslant \eta}\, p; \\ p_1 := \mathbf{1}_{|p| > \eta}\, p. \end{cases} \tag{AA}$$

L'étude de la fonction Φ donne alors que pour tout p,

$$\Phi(p) \geqslant \frac{\Phi(\eta)}{\eta^2} p_2^2 + \frac{\Phi(\eta)}{\eta} |p_1|. \tag{AB}$$

[*]. NdA : Ce temps typique est $L_0^2 R^{-1} J V^{-1}$ $[\mathsf{T}]$.

Intégrant (AB), on obtient une première minoration de $\mathscr{S}$:

$$\mathscr{S} \geqslant \frac{\Phi(\eta)}{\eta^2} \|p_2\|_2^2 + \frac{\Phi(\eta)}{\eta} \|p_1\|_1. \tag{AC}$$

Remarquez que quand $\eta \searrow 0$, on a $\Phi(\eta)/\eta^2 \searrow \frac{1}{2}R^{-1}$ et $\Phi(\eta)/\eta \searrow 0$.

Nous allons maintenant établir une seconde minoration de $\mathscr{S}$. L'idée est d'utiliser un résultat classique sur les chaînes de Markov :

2.1 Théorème ([20, § 4.4.2]). *Si P est le noyau d'une chaîne de Markov admettant une mesure invariante μ sur un espace Ω, alors pour toute mesure ν sur Ω, l'entropie relative [20, § 2.3] de ν par rapport à μ est décroissante sous l'action de P :*

$$D_{\mathrm{KL}}(\nu P \| \mu) \leqslant D_{\mathrm{KL}}(\nu \| \mu). \tag{AD}$$

♣

Nous allons appliquer le théorème 2.1 dans le cadre suivant : la chaîne de Markov que nous considérons est la marche aléatoire sur $\mathbb{R}^d$ dont les pas sont distribués suivant la mesure de probabilité K définie par

$$dK(x) := \frac{-v(x)}{V} dx^{[\dagger]}, \tag{AE}$$

et la mesure invariante de cette chaîne que nous considérons est la mesure uniforme λ. Dans ce cas, sous l'action du noyau de la chaîne, la densité m est transformée en $V^{-1}v * m$, de sorte que p est transformée en $V^{-1}v * p$. (AD) donne alors :

$$\mathscr{S}(p) \geqslant \mathscr{S}(V^{-1}v * p). \tag{AF}$$

Bien que cette borne n'ait pas l'air très intéressante, il se trouvera que $v * p$ peut être contrôlé bien plus facilement que p. Pour l'instant, contentons-nous d'appliquer (AC) à (AF) sous la forme du

2.2 Lemme. *Si $\|v * p\|_\infty \leqslant V\eta$, alors*

$$\mathscr{S} \geqslant \frac{\Phi(\eta)}{\eta^2} V^{-2} \|v * p\|_2^2. \tag{AG}$$

♣

2.b Énergie interne

Nous voulons maintenant minorer $\mathscr{U}$. D'après (X), on a $\mathscr{U} = \frac{1}{2}\langle p, v * p\rangle_{L^2}$; en décomposant p en $p_2 + p_1$ dans le facteur de gauche, on en déduit que

$$-\mathscr{U} \leqslant \frac{1}{2}(\|v * p\|_\infty \|p_1\|_1 + \|p_2\|_2 \|v * p\|_2), \tag{AH}$$

d'où par application de l'inégalité de Young :

$$-\mathscr{U} \leqslant \frac{\|v * p\|_\infty}{2} \|p_1\|_1 + \frac{V}{4} \|p_2\|_2^2 + \frac{1}{4V} \|v * p\|_2^2. \tag{AI}$$

[†]. K est bien une mesure de probabilité car nous avons supposé v négatif, ce qui fait que d'une part la mesure K est positive, d'autre part qu'elle est d'intégrale 1 au vu de la remarque 1.3.

Dans cette formule, sous réserve que $\|v*p\|_\infty \leqslant V\eta$, on a par le lemme 2.2 :

$$\frac{1}{4V}\|v*p_2\|_2^2 \leqslant \frac{\eta^2}{\Phi(\eta)}\frac{V}{4}\mathscr{S}, \tag{AJ}$$

et sous réserve que $\|v*p\|_\infty \leqslant V\eta/2$ (condition impliquant que la précédente), par (AC) :

$$\frac{\|v*p\|_\infty}{2}\|p_1\|_1 + \frac{V}{4}\|p_2\|_2^2 \leqslant \frac{\eta^2}{\Phi(\eta)}\frac{V}{4}\mathscr{S}. \tag{AK}$$

Au final,

$$\|v*p\|_\infty \leqslant \frac{V\eta}{2}\ \ [\mathsf{E.N^{-1}}] \quad\Rightarrow\quad -\mathscr{U} \leqslant \frac{\eta^2}{\Phi(\eta)}\frac{V}{2}\mathscr{S}, \tag{AL}$$

ce qui donne la minoration suivante sur $\mathscr{F}$:

$$\|v*p\|_\infty \leqslant \frac{V\eta}{2}\ \ [\mathsf{E.N^{-1}}] \quad\Rightarrow\quad \mathscr{F} \geqslant \Big(T - \frac{\eta^2}{\Phi(\eta)}\frac{V}{2}\Big)\mathscr{S}, \tag{AM}$$

où nous rappelons que $\mathscr{S}$ est toujours positive.

3 Plongement de l'espace de Wasserstein dans un espace de Sobolev

Travailler dans l'espace $\mathbf{F}$ est délicat, car celui-ci a uniquement une structure métrique et pas linéaire. Dans cette section, nous allons montrer qu'on peut voir $\mathbf{F}$ comme une partie d'un espace de Banach classique ; plus précisément, nous allons chercher des espaces de mesures $\mathbf{E}$ pour lesquels le plongement canonique [‡] de $\mathbf{F}$ dans $\mathbf{E}$ est continu.

3.1 Notation. Pour $\alpha \in [0,1]$, nous notons $\overset{1,2}{\mathbf{W}^{2-\alpha,2/\alpha}} =: \mathbf{W}_\alpha$. ♢

3.a Un théorème simple

3.2 Théorème. *Le plongement canonique de* $\mathbf{F}$ *dans* $\mathbf{W}'_0$ *— plus précisément, l'application* $\mu \mapsto \pi$ *— est continu en* λ. ♣

Démonstration. Soit f $[X]$ une fonction de $\mathbf{W}_0$ [§] et soit T un plan de transport de λ vers $\mu \in \mathbf{F}$, c'est-à-dire que T est une application de $\mathbb{R}^d$ (affine) dans $\mathbb{R}^d$ (vectoriel) et qu'on considère la mesure de couplage entre λ et $\mu := (\mathrm{Id}+T)\#\lambda$ portée par le graphe de $(\mathrm{Id}+T)$. On introduit le raccourci $u(x) := T(x)/|T(x)|$ [1], un vecteur unitaire qui indique la direction dans laquelle le point x se déplace au cours de l'opération de transport.

On écrit :

$$|\langle f,\pi\rangle| = \Big|\int_{\mathbb{R}^d}\big(f(x+T(x)) - f(x)\big)\,d\lambda(x)\Big| \leqslant R\int_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{r=0}^{|T(x)|}|Df(x+ru(x))|\,dr\,dx \qquad [\mathsf{X.N}], \tag{AN}$$

à comparer au coût de transport qui est

$$I[T] = \int_{\mathbb{R}^d}|T(x)|^2\,d\lambda(x) = 2R\int_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{r=0}^{|T(x)|} r\,dr\,dx \qquad [\mathsf{N.L^2}]. \tag{AO}$$

[‡]. $\mathbf{F}$ et $\mathbf{E}$ étant tous les deux des espaces de distributions tempérées, le plongement canonique de $\mathbf{F}$ dans $\mathbf{E}$ est l'application qui correspond à l'injection canonique quand on la voit dans l'espace des distributions.

[§]. Rappelons que $\mathbf{W}_0 = \overset{1,2}{W^{2,\infty}}$, càd. que les éléments de $\mathbf{W}_0$ sont les fonctions dont la dérivée est lipschitzienne et de carré intégrable.

En comparant les deux expressions, on s'aperçoit qu'il est intéressant de considérer la valeur de $|Df(x+ru(x))|/2r$, quantité que nous noterons $e(x,r)$ [X.L^{-2}]. Notant $\Omega := \{(x \in \mathbb{R}^d, r\ [L])\colon 0 \leqslant r \leqslant |T(x)|\}$ et $d\gamma(x,r) := 2Rr\,dxdr$ [N.L^2], on peut alors résumer les lignes précédentes en :

$$I[T] = \int_{(x,r)\in\Omega} d\gamma(x,r); \tag{AP}$$

$$|\langle f,\pi\rangle| \leqslant \int_{(x,r)\in\Omega} e(x,r)\,d\gamma(x,r). \tag{AQ}$$

On va maintenant utiliser un lemme de couplage :

3.3 Lemme. *Soit γ [X] une mesure (positive) σ-finie sur un espace mesurable Ω, et $e\colon\ \Omega \to \mathbb{R}_+$ [Y.X^{-1}] une fonction mesurable. On suppose qu'il existe une fonction $Y_*\colon\ \mathbb{R}_+$ [Y.X^{-1}] $\to \mathbb{R}_+$ [Y], de classe $\mathscr{C}^1$ et décroissante avec $Y_*(e) \overset{e\to\infty}{\to} 0$, telle que pour tout $\theta \in \mathbb{R}_+$,*

$$\int_{\{e(\omega)\geqslant\theta\}} e(\omega)\,d\gamma(\omega) \leqslant Y_*(\theta). \tag{AR}$$

Définissons à partir de Y_* la fonction $\mathscr{C}^1$ décroissante $X_*\colon\ \mathbb{R}_+$ [Y.X^{-1}] $\to \mathbb{R}_+$ [X] par

$$X_*(\theta) := \int_\theta^\infty \frac{-Y_*'(\sigma)}{\sigma}\,d\sigma; \tag{AS}$$

on a alors :

$$\int_\Omega e(\omega)\,d\gamma(\omega) \leqslant (Y_* \circ X_*^{-1})\Big(\int_\Omega d\gamma(\omega)\Big). \tag{AT}$$

♣

Démonstration. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}_+$ [Y.X^{-1}], posons $\Omega_\theta := \{\omega \in \Omega\colon\ e(\omega) \geqslant \theta\}$, et définissons

$$\begin{cases} X(\theta) := \int_{\Omega_\theta} d\gamma(\omega) \quad [\mathrm{X}]; \\ Y(\theta) := \int_{\Omega_\theta} e(\omega)\,d\gamma(\omega) \quad [\mathrm{Y}]. \end{cases} \tag{AU}$$

La condition (AR) se réécrit alors "$\forall\theta\ \ Y(\theta) \leqslant Y_*(\theta)$". Maintenant, comme X et Y sont des fonctions monotones de θ, on peut également exprimer θ et Y en fonction de X, ou θ et X en fonction de Y. Comme les fonctions $\theta \mapsto Y$ et Y_* sont décroissantes, en inversant ces fonctions, (AR) devient équivalente à "$\forall y\ \ \theta(y) \leqslant Y_*^{-1}(y)$" ; le lemme consiste alors à montrer que, notant $x_0 := X(\theta = 0)$, on a $Y(x_0) \leqslant (Y_* \circ X_*^{-1})(x_0)$. En fait, nous allons carrément prouver cette propriété pour tout x. En inversant les fonctions (qui, cette fois-ci, sont croissantes), la propriété est équivalente à montrer que pour tout y, on a $X(y) \geqslant (X_* \circ Y_*^{-1})(y)$.

Dérivant (AU), on a

$$dY = \theta\,dX, \tag{AV}$$

d'où

$$X(y) = \int_y^\infty \frac{1}{\theta(\acute{y})}\,d\acute{y} \geqslant \int_y^\infty \frac{1}{Y_*^{-1}(\acute{y})}\,d\acute{y} = \int_y^\infty -d(X_* \circ Y_*^{-1}) = (X_* \circ Y_*^{-1})(y), \tag{AW}$$

ce qui est le résultat annoncé. ♠

Grâce au lemme 3.3, nous devons maintenant majorer $\int_{(x,r)\in\Omega_\theta} |Df(x+ru(x))|\,dxdr$ (où Ω_θ est défini comme dans le lemme) pour θ [X.L^{-2}] arbitraire — on supposera juste $\theta > \frac{1}{2}\|f\|_{2,\infty}$.

Or "$(x,r) \in \Omega_\theta$" signifie que $|Df(x+ru(x))| \geqslant 2\theta r$, d'où $|Df(x)| \geqslant (2\theta - \|f\|_{2,\infty})r$, ou encore $r \leqslant (2\theta - \|f\|_{2,\infty})^{-1}|Df(x)|$. On a en outre $|Df(x+ru(x))| \leqslant |Df(x)| + r\|f\|_{2,\infty}$, d'où la majoration :

$$\begin{aligned}\int_{(x,r)\in\Omega_\theta} |Df(x+ru(x))|\,dx &\leqslant \int_{r\leqslant \frac{|Df(x)|}{2\theta-\|f\|_{2,\infty}}} (|Df(x)| + r\|f\|_{2,\infty})\,dxdr \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\frac{|Df(x)|^2}{2\theta - \|f\|_{2,\infty}} + \frac{\|f\|_{2,\infty}|Df(x)|^2}{2(2\theta - \|f\|_{2,\infty})^2}\Big)\,dx \\ &= \Big(\frac{1}{2\theta - \|f\|_{2,\infty}} + \frac{\|f\|_{2,\infty}}{2(2\theta - \|f\|_{2,\infty})^2}\Big)\|f\|_{1,2}^2. \qquad (\mathtt{AX})\end{aligned}$$

On est alors en mesure d'appliquer le lemme 3.3 avec $Y_*(\theta) = R\|f\|_{1,2}^2((2\theta - \|f\|_{2,\infty})^{-1} + \frac{1}{2}\|f\|_{2,\infty}(2\theta - \|f\|_{2,\infty})^{-2})$, et on trouve $X_*(\theta) = R\|f\|_{1,2}^2/(2\theta - \|f\|_{2,\infty})^2$, d'où *in fine* :

$$|\langle f,\pi\rangle| \leqslant \sqrt{R}\|f\|_{1,2} I[T]^{1/2} + \frac{1}{2}\|f\|_{2,\infty} I[T], \qquad (\mathtt{AY})$$

et donc en prenant l'infimum sur les plans de transport de λ à μ :

$$|\langle f,\pi\rangle| \leqslant \sqrt{R}\|f\|_{1,2} W_2(\lambda,\mu) + \frac{1}{2}\|f\|_{2,\infty} W_2(\lambda,\mu)^2. \qquad (\mathtt{AZ})$$

On a donc, pour $W_2(\lambda,\mu) \leqslant \varepsilon$, $|\langle f,\pi\rangle| \leqslant (\sqrt{R} + \varepsilon/2)W_2(\lambda,\mu)\|f\|_{\mathbf{W}_0}$ [*inhomogène*]. Dans le mesure où cela est vrai pour toute f, cela signifie que $\|\pi\|_{\mathbf{W}_0'} \leqslant (\sqrt{R} + \varepsilon/2)W_2(\lambda,\mu)$, ce qui montre bien que le plongement canonique de $\mathbf{F}$ dans $\mathbf{W}_0'$ est continu (et même lipschitzien) en λ. ♠

3.4 Remarque. L'étude linéarisée de l'espace de Wasserstein [84, § 7.6] montre qu'on a en fait $W_2(\lambda,\mu) \overset{\mu\to\lambda}{\sim} \sqrt{R}\|p\|_{-1,2}$, où $\|\cdot\|_{-1,2}$ est la norme de Sobolev homogène hilbertienne d'ordre -1. La formule (AZ) est donc optimale au premier ordre, au sens où le terme dominant $\sqrt{R}\|f\|_{1,2}W_2(\mu,\nu)$ ne peut être amélioré. ♡

3.b Un théorème plus fin

Nous allons maintenant donner un théorème qui améliore le théorème 3.2 sur les points suivants :

- On montre que le plongement de $\mathbf{F}$ est continu partout, et plus seulement en λ ;
- L'espace d'arrivée $\mathbf{E}$ est strictement plus fin que dans le cas précédent ; en outre, il est cette fois-ci réflexif (pour $\alpha > 0$).

3.5 Notation. On pose

$$\bar{\alpha} := \frac{2}{d+2}. \qquad (\mathtt{BA})$$

♢

3.6 Théorème. *Pour $\alpha < \bar{\alpha}$, le plongement canonique de* $\mathbf{F}$ *dans* $\mathbf{W}_\alpha'$ *est continu (partout).* ♣

3.7 Remarque. On retrouve le théorème 3.2 comme corollaire pour $\alpha = 0$. Pour $\alpha \leqslant \alpha'$, la théorie de l'interpolation [3, Chap. 6] énonce par ailleurs qu'on a un plongement continu $\mathbf{W}_{\alpha'}' \to \mathbf{W}_\alpha'$, de sorte que le théorème 3.6 est d'autant plus fort que α est grand. ♡

Démonstration. Considérons un plan de transport en deux étapes (T_1, T_2), c'est-à-dire qu'un point situé en x est envoyé d'abord en $x + T_1(x)$, puis en $x + T_1(x) + T_2(x)$. Notons μ_1, μ_2 les images successives de λ par ce plan de transport, i.e. $\mu_1 := (\mathrm{Id}+T_1)\#\lambda$, $\mu_2 := (\mathrm{Id}+T_1+T_2)\#\lambda$; notons I_1 le coût de la première partie du plan de transport, et I_2 le coût de la seconde partie, i.e. $I_1 := \int_{\mathbb{R}^d} |T_1(x)|^2\, d\lambda(x)$, $I_2 := \int_{\mathbb{R}^d} |T_2(x)|^2\, d\lambda(x)$ [N.L^2]. Notre objectif sera, pour une fonction gentille f [X], de majorer $|\langle f, \mu_2-\mu_1\rangle|$ par une expression de la forme $G(I_1,I_2)\|f\|_{\mathbf{W}_\alpha}$, où G est croissante en chacune de ses deux variables avec $G(a,b)<\infty$ pour tous $a,b<\infty$ et $G(a,b) \overset{b\searrow 0}{\to} 0$ pour tout a fixé. Une telle majoration entraînera le théorème de la même façon que dans le théorème 3.2, et montrera même que le plongement de $\mathbf{F}$ dans $\mathbf{W}'_\alpha$ est uniformément continu sur tout borné.

On a

$$\langle f, \mu_2-\mu_1\rangle = R\int_{\mathbb{R}^d} \big(f(x+T_1(x)+T_2(x)) - f(x+T_1(x))\big)\,dx \qquad [\mathrm{X.N}]; \tag{BB}$$

dans la suite, nous poserons pour alléger les notations

$$f(x+T_1(x)+T_2(x)) - f(x+T_1(x)) =: \Delta_2 f(x) \qquad [\mathrm{X}]. \tag{BC}$$

Pour $0<\beta\leqslant 1$ [1] un paramètre que nous ne fixons pas encore, notons

$$q(x) := \beta|T_1(x)|^2 + |T_2(x)|^2 \qquad [\mathrm{L}^2], \tag{BD}$$

et sur $\Omega := \mathbb{R}^d$, définissons la mesure

$$d\gamma(x) := q(x)\,d\lambda(x) \qquad [\mathrm{N.L}^2], \tag{BE}$$

de sorte que $\int_{\mathbb{R}^d} d\gamma(x) = \beta I_1 + I_2$. On définit maintenant

$$e(x) := \frac{|\Delta_2 f(x)|}{q(x)} \qquad [\mathrm{X.L}^{-2}], \tag{BF}$$

de sorte que

$$|\langle f, \mu_2-\mu_1\rangle| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} e(x)\,d\gamma(x). \tag{BG}$$

L'idée est alors, comme dans la preuve précédente, d'appliquer le lemme 3.3 — même si l'espace d'intégration Ω sera différent.

Pour la suite de la preuve, nous avons besoin de « mailler » $\mathbb{R}^d$:

3.8 Définition. Dans la suite du texte, l'espace physique est muni d'un repère orthonormé arbitraire, et on fixe une longueur de référence arbitraire $0<L_0<\infty$ [L].

Un *cube* de $\mathbb{R}^d$ désignera un ensemble s'écrivant en coordonnées sous la forme $Q = \prod_{i=1}^d [x_i, x_i+a]$ pour un $a\in(0,\infty)$ [L] qu'on appellera le *côté* du cube, noté $a(Q)$.

Un cube Q sera dit *dyadique* quand $a(Q)$ est de la forme $2^v L_0$ pour un $v\in\mathbb{Z}$ et que les $x_i/(2^v L_0)$ sont tous entiers ou demi-entiers (i.e. tous dans $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$). ♢

On a le lemme suivant :

3.9 Lemme. *Toute boule de $\mathbb{R}^d$ de rayon $r\in(0,\infty)$* [L] *est contenue dans un cube dyadique Q tel que $(2r\leqslant)\,a(Q)\leqslant 8r$.* ♣

Démonstration. Si $r = L_0/4$, la boule est contenue dans le cube dyadique de côté L_0 dont le centre est le point du réseau $\frac{1}{2}L_0\mathbb{Z}^d$ le plus proche du centre de la boule. Par homothétie, si $r = 2^v L_0$ pour v entier, la boule est contenue dans un cube dyadique de côté $4r$. Enfin dans le cas où r est quelconque, il existe un $r'\in[r,2r]$ de la forme $2^v L_0$, et pour cet r' la boule de rayon r est contenue dans une boule de rayon r', elle-même contenue dans un cube dyadique de côté $4r'\leqslant 8r$. ♠

Soit $\theta > 0$ [X.L^{-2}]. Pour $x \in \Omega_\theta$, notant $y_1 := x + T_1(x)$ et $y_2 := y_1 + T_2(x)$, on a $|f(y_2) - f(y_1)| \geqslant \theta(\beta|y_1 - x|^2 + |y_2 - y_1|^2)$. Or notant $r := |y_1 - x| \vee \beta^{-1/2}|y_2 - y_1|$, on a $q(x) \geqslant \beta r^2$, de sorte que x, y_1 et y_2 sont dans la boule centrée sur y_1 de rayon r (rappelons qu'on suppose $\beta \leqslant 1$) et vérifient $|y_2 - y_1| \leqslant \beta^{1/2} r$ et $|f(y_2) - f(y_1)| \geqslant \beta\theta r^2$. Par le lemme 3.9, il existe donc un cube dyadique $Q \ni x, y_1, y_2$ tel que

$$\begin{cases} |y_2 - y_1| \leqslant \beta^{1/2} a(Q)/2; \\ |f(y_2) - f(y_1)| \geqslant \beta\theta a(Q)^2/64. \end{cases} \tag{BH}$$

3.10 Définition. Pour $0 < \beta \leqslant 1$ [1], $\theta > 0$ [X.L^{-2}], un cube dyadique Q sera dit (β,θ)-*correct* quand il contient deux points x_1, x_2 à distance $\leqslant \beta^{1/2} a(Q)$ tels que $|f(x_2) - f(x_1)| \geqslant \beta\theta a(Q)^2$. Dans la suite, on sous-entendra toujours que les cubes (β,θ)-corrects sont dyadiques. ♢

Avec ce vocabulaire *ad hoc*, la formule (BH) établit l'

3.11 Avis. *Pour tout $x \in \Omega_\theta$, il existe un cube (dyadique) $(\beta/4, \theta/16)$-correct de côté $\geqslant 2\beta^{-1/2}|T_2(x)|$ qui contient x et ses deux images successives par le plan de transport.* ♣

3.12 Définition. Un cube (dyadique) Q est dit (β,θ)-*maximal* quand il est (β,θ)-correct et qu'il n'est contenu dans aucun autre cube (β,θ)-correct. ♢

3.13 Remarque. Comme f est supposée gentille, donc bornée, la taille des cubes (β,θ)-corrects est bornée, de sorte que tout cube (β,θ)-correct est contenu dans au moins un cube (β,θ)-maximal. ♡

3.14 Lemme. *Si Q est un cube dyadique (β,θ)-maximal et $x_1, x_2 \in Q$ avec $|x_2 - x_1| \leqslant \beta^{1/2} a(Q)$, alors $|f(x_2) - f(x_1)| < 4\beta\theta a(Q)^2$.* ♣

Démonstration. Tout cube dyadique est contenu dans un cube dyadique de côté double ; soit donc $Q' \supset Q$ avec $r(Q') = 2a(Q)$. L'hypothèse sur (x_1, x_2) nous assure *a fortiori* que $x_1, x_2 \in Q'$ avec $|x_2 - x_1| \leqslant \beta^{1/2} r(Q')$; par conséquent, si par l'absurde on avait $|f(x_2) - f(x_1)| \geqslant 4\beta\theta a(Q)^2 = \beta\theta a(Q')^2$, Q' serait (β,θ)-correct, ce qui contredirait l'hypothèse de maximalité. ♠

Dans l'avis 3.11, comme l'hypothèse sur le côté du cube reste trivialement valide quand on passe à un cube plus grand, on peut appliquer le lemme 3.14 pour obtenir l'

3.15 Avis. *Tout point $x \in \Omega_\theta$ est contenu dans un cube $(\beta/4, \theta/16)$-maximal Q tel que*

$$|\Delta_2 f(x)| \leqslant \frac{\beta}{16}\theta a(Q)^2. \tag{BI}$$

♣

3.16 Corollaire. *Notant $\mathcal{Q}$ l'ensemble des cubes $(\beta/4, \theta/16)$-maximaux,*

$$\int_{\Omega_\theta} e(x)\, d\gamma(x) \leqslant \frac{\beta}{16} R\theta \sum_{Q \in \mathcal{Q}} a(Q)^{d+2}. \tag{BJ}$$

♣

3.17 Lemme. *Il existe des constantes (C_0, C_1) $[(1,1)]$ finies ne dépendant que de (d et) α telles que, si Q est un cube (β,θ)-correct,*

$$\int_Q (C_0 \beta^{-1}\theta^{-2}|Df(x)|^2 + C_1 \beta^{-1/\alpha}\theta^{-2/\alpha}|D^{2-\alpha} f(x)|^{2/\alpha})\, dx \geqslant a(Q)^{d+2}. \tag{BK}$$

♣

Démonstration. Dans un premier temps, supposons que Q est le cube centré en 0 et de côté L_0. Comme nous avons supposé $\alpha < \bar{\alpha}$, l'inégalité de Sobolev [1, théorème 4.12] appliquée à Df sur Q [¶] énonce qu'il existe une constante $c < \infty$ [*inhomogène*] telle que $\|f\|_{1,\infty} \leqslant c\|f\|_{\mathbf{W}_\alpha}$, soit en termes homogènes qu'il existe des constantes (c_0, c_1) $[(\mathsf{L}^{-d/2}, \mathsf{L}^{1-(d/2+1)\alpha})]$ finies telles que

$$\sup_Q |Df| \leqslant c_0\Big(\int_Q |Df(x)|^2\,dx\Big)^{1/2} \vee c_1\Big(\int_Q |D^{2-\alpha}f(x)|^{2/\alpha}\,dx\Big)^{\alpha/2}. \qquad \text{(BL)}$$

Comme le cube est (β,θ)-correct, il existe $x \in Q$ pour lequel $|Df(x)| \geqslant \beta^{1/2}\theta L_0$, de sorte que (BL) se traduit par

$$\int_Q |Df(x)|^2\,dx \geqslant c_0^{-2}\beta\theta^2 L_0^2 \qquad \text{ou} \qquad \int_Q |D^{2-\alpha}f(x)|^{2/\alpha}\,dx \geqslant c_1^{-2/\alpha}\beta^{1/\alpha}\theta^{2/\alpha}L_0^{2/\alpha}; \qquad \text{(BM)}$$

dans un cas comme dans l'autre, (BK) est vérifiée avec $C_0 := L_0^d c_0^2$ et $C_1 := L_0^{d+2-2/\alpha}c_1^{2/\alpha}$.

Dans le cas général, si Q est centré en 0 et de côté r [L], on transforme la fonction f sur Q en une fonction $\breve{f}$ sur le cube $\breve{Q}$ du cas précédent en posant

$$\breve{f}(x) := \Big(\frac{L_0}{r}\Big)^2 f\Big(\frac{r}{L_0}x\Big). \qquad \text{(BN)}$$

Cette transformation conserve la propriété d'être (β,θ)-correct (au sens où $\breve{Q}$ est (β,θ)-correct pour $\breve{f}$), ainsi que l'inégalité (BK) dont elle multiplie chacun des membres par $(L_0/r)^{d+2}$, de sorte que la validité du lemme sur $\breve{Q}$ entraîne sa validité sur Q. Enfin si Q n'est pas centré en 0, on s'y ramène par une translation, ce qui conserve trivialement la (β,θ)-correction et (BK). ♠

3.18 Lemme. *Tout point de $\mathbb{R}^d$ (de coordonnées toutes non dyadiques) est contenu dans au plus 2^d carrés (β,θ)-maximaux différents.* ♣

Démonstration. Pour $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant d} \in \mathbb{R}^d$ (non dyadique) et Q un cube dyadique centré en c, j'appelle *quartier de x dans Q*, noté $\operatorname{sgn}_Q(x)$, le d-uplet $(\operatorname{sgn}(x_i - c_i))_{1\leqslant i\leqslant d} \in \{\pm1\}^d$. Or pour tout $s \in \{\pm1\}^d$, il existe un unique cube dyadique (β,θ)-maximal Q tel que $\operatorname{sgn}_Q(x) = s$: en effet, pour tout r de la forme $2^v L_0$, il existe un unique cube dyadique $Q_v(x,s)$ de côté r contenant x avec $\operatorname{sgn}_{Q_v(x,s)} = s$, et la suite des $(Q_v(x,s))_{v\in\mathbb{Z}}$ est (strictement) croissante pour l'inclusion, de sorte qu'un seul des ces cubes peut être (β,θ)-maximal. ♠

Grâce aux lemmes 3.17 et 3.18, l'avis 3.16 donne :

$$\int_{\Omega_\theta} e(x)\,d\gamma(x) \leqslant \frac{2^d R}{16}\big(2^{10}C_0\theta^{-1}\|f\|_{1,2}^2 + 2^{10\alpha}C_1\beta^{1-1/\alpha}\theta^{1-2/\alpha}\|f\|_{2-\alpha,2/\alpha}^{2/\alpha}\big). \qquad \text{(BO)}$$

On peut maintenant appliquer le lemme 3.3. Dans les calculs qui suivent, la définition des constantes C_0 et C_1 est susceptible de changer à chaque ligne, mais ce seront toujours des constantes adimensionnées ne dépendant que de α. On trouve :

$$\begin{aligned} X_*(\theta\ [\mathsf{X.L}^{-2}]) &= R\int_\theta^\infty \big(C_0\|f\|_{1,2}^2\theta^{-3} + C_1\beta^{1-1/\alpha}\|f\|_{2-\alpha,2/\alpha}^{2/\alpha}\theta^{-2/\alpha-1}\big)\,d\theta \\ &\geqslant (C_0R\|f\|_{1,2}^2\theta^{-2}) \vee (C_1\beta^{1-1/\alpha}R\|f\|_{2-\alpha,2/\alpha}^{2/\alpha}\theta^{-2/\alpha}) \qquad [\mathsf{N.L}^2]; \qquad \text{(BP)} \end{aligned}$$

$$X_*^{-1}(x\ [\mathsf{N.L}^2]) \geqslant C_0R^{1/2}\|f\|_{1,2}x^{-1/2} \vee C_1\beta^{(\alpha-1)/2}R^{\alpha/2}\|f\|_{2-\alpha,2/\alpha}x^{-\alpha/2} \qquad [\mathsf{X.L}^{-2}]; \qquad \text{(BQ)}$$

[¶]. Le cube vérifie la condition de cône, de sorte qu'on peut bien y appliquer l'inégalité de Sobolev.

$$
\begin{aligned}
(Y_* \circ X_*^{-1})(x\ \ [\mathsf{N.L}^2]) \leqslant \Big(C_0 R^{1/2} \|f\|_{1,2} x^{1/2} \wedge C_0' \beta^{(1-\alpha)/2} R^{1-\alpha/2} \frac{\|f\|_{1,2}}{\|f\|_{2-\alpha,2/\alpha}} \|f\|_{1,2} x^{\alpha/2}\Big) + \\
\Big(C_1' \beta^{1-1/\alpha} R^{3/2-1/\alpha} \Big(\frac{\|f\|_{2-\alpha,2/\alpha}}{\|f\|_{1,2}}\Big)^{2/\alpha} \|f\|_{1,2} x^{1/\alpha-1/2} \wedge C_1 \beta^{(\alpha-1)/2} R^{\alpha/2} \|f\|_{2-\alpha,2/\alpha} x^{1-\alpha/2}\Big) \\
\leqslant C_0 R^{1/2} \|f\|_{1,2} x^{1/2} + C_1 \beta^{(\alpha-1)/2} R^{\alpha/2} \|f\|_{2-\alpha,2/\alpha} x^{1-\alpha/2}. \quad \text{(BR)}
\end{aligned}
$$

Fixant $\beta = (I_2/I_1) \wedge 1$, on trouve enfin :

$$
|\langle f, \mu_2 - \mu_1 \rangle| \leqslant C_0 R^{1/2} \|f\|_{1,2} (I_1 \wedge I_2)^{1/2} + C_1 R^{\alpha/2} \|f\|_{2-\alpha,2/\alpha} I_1^{(1-\alpha)/2} (I_1 \wedge I_2)^{1/2}, \quad \text{(BS)}
$$

qui est bien une expression de la forme désirée — cela montre même que le plongement de $\mathbf{F}$ dans $\mathbf{W}'_\alpha$ est lipschitzien sur tout borné. ♠

4 Minoration d'une norme L^2 par la norme L^∞

Pour minorer l'énergie d'activation, nous aurons besoin de résultats de minoration de $\|v * p\|_2$ en fonction de $\|v * p\|_\infty$. *A priori* cela paraît impossible, mais en fait p n'est pas arbitraire : on sait en effet que la mesure μ est positive, ce qui va nous permettre de nous en sortir.

4.1 Lemme. *Supposons que v est (négatif et) gentil ; en particulier, qu'on a $\|D^2 v\|_\infty < \infty$ et $|D^2 v(x)| \overset{|x|\to\infty}{=} O(|x|^{-\kappa})$ pour un $\kappa > d$. Alors il existe une constante $C < \infty$ $[\mathsf{L}^{d/2}]$ ne dépendant que de v telle que pour toute mesure* positive *μ,*

$$
\|v * p\|_2 \geqslant C \|v * m\|_\infty^{-d/4} \|v * p\|_\infty^{1+d/4}. \quad \text{(BT)}
$$

♣

4.2 Remarque. Noter l'homogénéité de C, qui ne dépend que de la portée de v et pas de son intensité. ♡

Démonstration. Commençons par définir la « variance L^p » d'une fonction :

4.3 Définition. Pour $f\colon\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\ \ [\mathsf{X}]$ une fonction mesurable, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on définit la seminorme

$$
\|f\|_{\overline{p}} := \inf_{a \in \mathbb{R}} \|f - a\|_p \qquad [\mathsf{X.L}^{d/p}]. \quad \text{(BU)}
$$

♢

Avec cette définition, on a $\|v * p\|_2 = \|v * m\|_{\overline{2}}$ et $\|v * p\|_\infty = \|v * m\|_{\overline{\infty}}$, de sorte que (BT) se réécrit :

$$
\|f * v\|_{\overline{2}} \geqslant C \left(\frac{\|f * v\|_{\overline{\infty}}}{\|f * v\|_\infty}\right)^{d/4} \|f * v\|_{\overline{\infty}}. \quad \text{(BV)}
$$

Pour établir (BV), nous allons montrer l'existence d'une constante $c < \infty$ $[\mathsf{L}^{-2}]$ telle que $\|D^2(f * v)\|_\infty \leqslant c \|f * v\|_\infty$; la conclusion s'ensuivra, comme nous le montrons ci-dessous, avec

$$
C = \Big(\int_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ |x| \leqslant \sqrt{2}}} (1 - |x|^2/2)^2 dx\Big)^{1/2} c^{-d/4\,[\|]}. \quad \text{(BW)}
$$

Notant $f * v =: g$ pour alléger les notations, soit en effet a qui minimise $\|g-a\|_2$, de sorte que $\|g\|_{\overline{2}} = \|g-a\|_2$. Par définition de $\|g\|_{\overline{\infty}}$, ou l'argument minimum ou l'argument maximum de g [*] vérifie $|f(x)-a| \geqslant \|f\|_{\overline{\infty}}$ — mettons ici qu'il s'agit de l'argument maximum, noté x_0. On a $Dg(x_0) = 0$, d'où par l'inégalité de Taylor - Lagrange, puisqu'on suppose démontré $\|D^2 g\|_\infty \leqslant c\|g\|_\infty$, $g(x) - a \geqslant g(x_0) - \frac{1}{2}\|g\|_\infty |x-x_0|^2 - a \geqslant \|g\|_{\overline{\infty}} - \frac{1}{2}c\|g\|_\infty |x-x_0|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$. En intégrant,

$$\begin{aligned} \|g\|_{\overline{2}}^2 = \|g-a\|_2^2 \geqslant \int_{\mathbb{R}^d} (g(x)-a)_+^2 \, dx \\ \geqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left(\|g\|_{\overline{\infty}} - \tfrac{1}{2}c\|g\|_\infty |x-x_0|^2\right)_+^2 dx \\ = \|g\|_{\overline{\infty}}^2 c^{-d/2} \left(\frac{\|g\|_{\overline{\infty}}}{\|g\|_\infty}\right)^{d/2} \int_{\substack{x\in\mathbb{R}^d \\ |x|\leqslant\sqrt{2}}} {}^{[1]} (1-|x|^2/2)^2 dx. \end{aligned} \tag{BX}$$

Prouvons donc l'existence de la constante c. On se donne un noyau régularisant K de la forme

$$K(x \ [L]) = (L_0^{-2}|x|^2 + 1)^{-\kappa'/2} \qquad [1], \tag{BY}$$

pour un paramètre arbitraire $\kappa' \in (d, \kappa]$, de sorte que K soit intégrable mais avec des queues polynomiales suffisamment lourdes.

D'après les hypothèses faites sur v, il existe alors une constante $c_1(v) < \infty \ [\mathsf{E}.\mathsf{N}^{-2}.\mathsf{L}^{-2}]$ telle que $|D^2 v(x)| \leqslant c_1 K(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^d$. D'autre part, vu que $(-v)$ est positive intégrale et globalement non nulle, il existe une constante $c_2(v) < \infty \ [\mathsf{E}^{-1}.\mathsf{N}^2.\mathsf{L}^{-d}]$ telle que $(K*(-v))(x) \geqslant c_2^{-1} K(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^d$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \|D^2(f*v)\|_\infty = \|f * D^2 v\|_\infty \underset{f\geqslant 0}{\leqslant} \|f * |D^2 v|\|_\infty \leqslant c_1 \|f*K\|_\infty \\ \leqslant c_1 c_2 \|f*(K*(-v))\|_\infty = c_1c_2\|K*(f*v)\|_\infty \leqslant c_1c_2\|K\|_1 \|f*v\|_\infty, \end{aligned} \tag{BZ}$$

de sorte que $c = c_1 c_2 \|K\|_1$ convient. ♠

☛ *On pourra consulter le § 6.b pour des pistes de prolongement de la méthode exposée ci-dessus.*

5 Résultats principaux

☛ *Dans cette section, v n'est plus supposé négatif* a priori*, sauf mention explicite du contraire.*

5.a Température de transition

Commençons par énoncer une minoration de la température de transition qui découle simplement de l'étude du système linéarisé :

5.1 Proposition. *Pour $T < RV$, l'équilibre uniforme est instable* [†]. ♣

[‖]. On pourrait calculer explicitement le préfacteur de $c^{-d/4}$, mais cela n'aurait aucun intérêt ; retenons simplement qu'il s'agit d'une constante absolue (ne dépendant que de d).

[*]. Les extrema de g sont en effet atteints, ou alors on a $\|g\|_{\overline{2}} = \infty$ et (BV) est triviale.

[†]. L'instabilité est même valable au sens de la remarque 1.12.

Démonstration. Cette preuve repose sur la linéarisation du système au voisinage de λ ; aussi allons-nous nous placer non pas dans $\mathbf{F}$, mais dans un espace vectoriel topologique qui se plonge continûment dans cet espace (au voisinage de λ) — mettons, dans l'espace des fonctions p gentilles telles que $\int_{\mathbb{R}^d} p(x)\,dx = 0$.

Rappelons que l'expression (X) présente l'énergie libre sous forme d'une forme quadratique de p :

$$\mathscr{U}(\mu) = \frac{1}{2}\langle v * p, p\rangle_{L^2}. \tag{CA}$$

Or l'expression (Y) de l'entropie se bilinéarise formellement au voisinage de λ en

$$\mathscr{S}(\mu) \overset{p\to 0}{\sim} \frac{1}{2R}\langle p, p\rangle_{L^2}, \tag{CB}$$

de sorte qu'au final $\mathscr{F}$ se bilinéarise en la forme quadratique

$$\mathscr{F}(\mu) \overset{p\to 0}{=} \frac{1}{2}\langle (v + R^{-1}T\boldsymbol{\delta}_0) * p, p\rangle_{L^2} + o(p^2), \tag{CC}$$

où le "$o(p^2)$" est à prendre au sens de Gâteaux, i.e. le long de chaque droite issue de 0. À cause de la différentiation au sens de Gâteaux, même si la forme quadratique qui apparaît dans (CC) est (strictement) positive, cela ne suffit pas à assurer la stabilité de l'état λ au sens de la définition (1.11) ; en revanche, il suffit de montrer l'existence d'une fonction p telle que $\langle (v + R^{-1}T\boldsymbol{\delta}_0) * p, p\rangle_{L^2} < 0$ pour démontrer que l'équilibre est instable.

Pour étudier cette forme quadratique, on passe dans le domaine de Fourier, où on a

$$\frac{1}{2}\langle (v + R^{-1}T\boldsymbol{\delta}_0) * p, p\rangle_{L^2} = \frac{1}{4\mathring{\pi}}\langle (\hat{v} + R^{-1}T)\bar{\hat{p}}, \hat{p}\rangle_{L^2}, \tag{CD}$$

de sorte que cette forme quadratique sera positive si et seulement si $\hat{v}(\xi) + R^{-1}T \geqslant 0\ \ \forall\xi$, i.e. si $-V + R^{-1}T \geqslant 0$, d'où la proposition. ♠

5.2 Théorème. *Si v est négatif avec $v \in \mathbf{W}_\alpha$ pour un $\alpha < \bar{\alpha}$, alors l'équilibre homogène est stable dès que $T > RV$.* ♣

Démonstration. On commence par le

5.3 Lemme. *Sous les hypothèses du théorème 5.2, la fonctionnelle $\mu \mapsto \|v * p\|_\infty$ de $\mathbf{F}$ dans $\mathbb{R}_+$ est continue en λ.* ♣

Démonstration. D'après le théorème 3.2 (ou 3.6 si $\alpha > 0$), il suffit de démontrer que la fonctionnelle $\pi \mapsto \|v * p\|_\infty$ est continue en 0 *vue comme une fonction sur* $\mathbf{W}'_\alpha$. Notant τ^x l'opérateur de translation par $x \in \mathbb{R}^d$ (tel que $\tau^x v(y) = v(y-x)$), on a $(v * p)(x) = \langle \tau^x v, \pi\rangle$, d'où $\|v * p\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\langle \tau^x v, \pi\rangle|$; or τ^x est clairement une isométrie de $\mathbf{W}_\alpha$, donc $|\langle \tau^x v, \pi\rangle| \leqslant \|\tau^x v\|_{\mathbf{W}_\alpha} \|\pi\|_{\mathbf{W}'_\alpha} = \|v\|_{\mathbf{W}_\alpha} \|\pi\|_{\mathbf{W}'_\alpha}$, d'où

$$\|v * p\|_\infty \leqslant \|v\|_{\mathbf{W}_\alpha} \|\pi\|_{\mathbf{W}'_\alpha}, \tag{CE}$$

ce qui montre la continuité de la fonctionnelle en 0. ♠

D'après le lemme 5.3, pour tout $\eta > 0$ $[\mathrm{N.L}^{-d}]$ on a donc au voisinage de λ que $\|v * p\|_\infty \leqslant V\eta/2$, de sorte qu'on peut appliquer la formule (AM), qui nous donne que l'équilibre uniforme est stable dès que $T > \eta^2 V/2\Phi(\eta)$. En faisant tendre η vers 0, $\eta^2/\Phi(\eta)$ tend vers $2R$, de sorte qu'en prenant η suffisamment petit on a bien la stabilité de l'équilibre dès que $T > VR$. ♠

5.4 Corollaire. *Si v est négatif avec $v \in \mathbf{W}_\alpha$ pour $\alpha < \bar{\alpha}$, alors la transition de phase du système survient à la température RV.* ♣

5.b Énergie d'activation

5.5 Théorème. *Si v est négatif et dans $\mathbf{W}_0$, avec en outre $|D^2v(x)| \overset{|x|\to\infty}{=} O(|x|^{-\kappa})$ pour un $\kappa > d$, alors pour $T > RV$ l'équilibre uniforme a une énergie d'activation non nulle, qui est minorée au voisinage de la température critique par $C(T-RV)^{3+d/2} + o((T-RV)^{3+d/2})$ pour une certaine constante $C > 0$* $[\mathsf{N}^{3+d/2}.\mathsf{E}^{-(2+d/2)}]$. ♣

Démonstration. Prenons η suffisamment petit pour que $T > \eta^2 V/2\Phi(\eta)$, et notons ici $V\eta/2 =: h$ $[\mathsf{E}.\mathsf{N}^{-1}]$. De la même façon que pour le lemme 5.3, mais en remplaçant cette fois le théorème 3.2 par le théorème 3.6, nous avons que la fonctionnelle $\mu \mapsto \|v * \pi\|_\infty$ est continue sur $\mathbf{F}$ tout entier ; par conséquent, $\{\|v * p\|_\infty < h\}$ et $\{\|v * p\|_\infty > h\}$ sont deux ouverts disjoints, qui avec l'ensemble $\{\|v * p\|_\infty = h\}$ partitionnent $\mathbf{F}$.

Supposons que pour un E_a $[\mathsf{E}]$, nous sachions démontrer que sur $\{\|v*p\|_\infty = h\}$ on ait $\mathscr{F} \geqslant E_\mathrm{a}$. Alors, pour $E < E_\mathrm{a}$, les ensembles $\{\mathscr{F} \leqslant E$ et $\|v*p\|_\infty < h\}$ et $\{\mathscr{F} \leqslant E$ et $\|v*p\|_\infty > h\}$ seront deux ouverts de $\{\mathscr{F} \leqslant E\}$ le partitionnant ; par conséquent la composante connexe de λ dans cet ensemble est contenue dans $\{\|v*p\|_\infty < h\}$. Il s'ensuit que $\mathscr{F}$ est positive sur cette composante connexe, donc y atteint son miminum global en λ, ce qui prouve que E_a est un minorant de l'énergie d'activation du système. Nous voulons donc trouver E_a aussi grand que possible tel que, pour un η bien choisi tel que $\eta^2 V/2\Phi(\eta) < T$,

$$\|v * p\|_\infty = h \;\Rightarrow\; \mathscr{F}(\mu) \geqslant E_\mathrm{a}. \tag{CF}$$

Or pour $\|v * p\|_\infty = h$, on sait en combinant (AM) et (AG) que

$$\mathscr{F}(\mu) \geqslant \left(\frac{\Phi(\eta)T}{\eta^2 V^2} - \frac{1}{2V}\right)\|v * p\|_2^2. \tag{CG}$$

En outre, on peut appliquer le lemme 4.1 en observant que $\|v * m\|_\infty \geqslant \|v * R\|_\infty = RV$ (attendu que m est une perturbation de la fonction constante égale à R), d'où :

$$\|v * p\|_2 \geqslant \frac{C' \ [\mathsf{L}^{d/2}]}{(RV)^{d/4}} h^{1+d/4}. \tag{CH}$$

En combinant (CG) et (CH), on obtient alors qu'on peut choisir

$$E_\mathrm{a} = \frac{(C')^2 V^2}{4\cdot(2R)^{d/2}}\left(\frac{\Phi(\eta)T}{\eta^2V^2} - \frac{1}{2V}\right)\eta^{2+d/2}. \tag{CI}$$

Développant $T = RV + \varepsilon$, il nous reste à optimiser η en fonction de ε. Un développement à l'ordre 3 de la fonction Φ donne

$$\frac{\Phi(\eta)}{\eta^2} \overset{\eta\to 0}{=} \frac{1}{2R} - \frac{\eta}{6R^2} + o(\eta), \tag{CJ}$$

de sorte qu'en prenant $\eta = \frac{3d+12}{d+6}V^{-1}\varepsilon$, on trouve bien le résultat annoncé, avec

$$C = \frac{R(C')^2}{d+6}\left(\frac{3d+12}{(2d+12)RV}\right)^{2+d/2}. \tag{CK}$$

♠

5.c Cas où v n'est pas négatif

Les calculs du § 2 recquièrent que v soit négatif afin que le produit de convolution par v puisse être vu comme l'action du noyau d'une chaîne de Markov. Cependant on voudrait également pouvoir minorer $\mathscr{F}$ quand v est positif par endroits — *a priori* cela devrait même être encore plus facile ! Une idée naturelle serait de décomposer v en ses parties négative et positive, mais on aurait des ennuis du fait que v_- et v_+ n'ont pas la même régularité que v.

Il s'avère plus fructeux de plutôt chercher un potentiel w négatif qui « minore » v au sens où l'énergie libre associée à w minore celle associée à v, et pour lequel on ait (presque) la même température de transition que pour v.

5.6 Proposition. *Soient v et w deux potentiels d'interaction sur $\mathbb{R}^d$, et notons $\mathscr{F}_v$ et $\mathscr{F}_w$ les fonctionnelles d'energie libre respectives associées. Pour toute température, on a $\mathscr{F}_v \geqslant \mathscr{F}_w$ sur tout $\mathbf{F}$ si (et seulement si) $-\hat{v}(\xi) \leqslant -\hat{w}(\xi)$ sur tout $\mathbb{R}^d$ [L^{-1}].* ♣

Démonstration. Dans la différence $(\mathscr{F}_v - \mathscr{F}_w)$, les termes d'entropie s'annulent, de sorte que $\mathscr{F}_v(\mu) - \mathscr{F}_w(\mu) = \mathscr{U}_v(\mu) - \mathscr{U}_w(\mu) = \frac{1}{2}\langle (v-w) * p, p\rangle_{L^2} = \frac{1}{4\pi}\langle (\hat{v}-\hat{w})\bar{\hat{p}}, \hat{p}\rangle$, dont l'étude du signe est immédiate. ♠

5.7 Corollaire. *Si v est dans l'espace de Schwartz, alors la transition de phase du système survient à la température RV, et l'énergie d'activation est strictement positive dès qu'on est au-delà de cette température.* ♣

Démonstration. Pour démontrer le corollaire 5.7, il suffit de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un potentiel w vérifiant les hypothèses du théorème 5.5 (à savoir, w est négatif et dans $\mathbf{W}_0$ avec $|D^2 w(x)| \overset{|x|\to\infty}{=} O(|x|^{-\kappa'})$ pour un $\kappa' > d$) tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ [L^{-1}], on ait $-\hat{v}(\xi) \leqslant -\hat{w}(\xi) \leqslant V + \varepsilon$. En effet, de la première inégalité on tirera par la proposition 5.6 que $\mathscr{F}_v \geqslant \mathscr{F}_w$, et donc qu'à toute température l'énergie d'activation pour v est plus grande que celle pour w ; et de la seconde inégalité on tirera que le "V" du potentiel w est égal à $V + \varepsilon$, de sorte que $\mathscr{F}_w$ et *a fortiori* $\mathscr{F}_v$ présente une énergie d'activation en λ non nulle dès que $T > R(V+\varepsilon)$.

Pour un paramètre $\kappa > d+2$ arbitraire, définissons successivement les fonctions g_1 et f_1 : $\mathbb{R}^d$ [1] $\to \mathbb{R}$ par

$$g_1(\xi) := \frac{(1+|\xi|^2)^{-\kappa/2}}{\left(\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^{-\kappa}\, d\xi\right)^{1/2}}; \tag{CL}$$

$$f_1 := g_1 * g_1. \tag{CM}$$

Les propriétés suivantes de f_1 sont immédiates :

5.8 Proposition.

(i) *f_1 est positive, équivalente quand $|\xi| \to \infty$ à $c|\xi|^{-\kappa}$ (pour une constante $c > 0$ dont la valeur exacte nous importe peu), et atteint sa valeur maximale 1 au point 0.*

(ii) *La transformée de Fourier $\hat{f_1}$ est réelle positive, appartient à $\mathbf{W}_0$, et sa dérivée seconde décroît plus vite que tout polynôme quand $|x| \to \infty$.*

♣

Maintenant, la fonction $-\hat{v}$ est bornée supérieurement par V (par définition de V) et décroît plus vite que tout polynôme (puisque v est supposé dans l'espace de Schwartz) ; par conséquent d'après la proposition 5.8-(i), pour $L < \infty$ $[\mathsf{L}^{-1}]$ suffisamment grand, définissant

$$f(\xi \ [\mathsf{L}^{-1}]) := (V+\varepsilon) f_1(\xi/L), \tag{CN}$$

on a $-\hat{v}(\xi) \leqslant f(\xi) \leqslant V+\varepsilon \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$. Introduisons alors w comme la transformée de Fourier inverse de $-f$. Comme f se déduit de f_1 par des homothéties de rapports positifs sur les espaces de départ et d'arrivée, elle hérite de f_1 les propriétés de la proposition 5.8-(ii), donc le potentiel w est négatif et dans $\mathbf{W}_0$ avec une décroissance plus rapide que tout polynôme, et satisfait ainsi les hypothèses du théorème 5.5, ce que nous voulions. ♠

6 Travaux en cours

Le travail que je viens de présenter est encore en cours à l'heure actuelle, et j'escompte plusieurs améliorations substantielles avant de proposer mes résultats pour publication. Hélas, les délais de soutenance étant trop courts pour mener ces perfectionnements à terme d'ici la fin de ma thèse, je me vois contraint ici de seulement évoquer ces pistes de recherche sans les traiter. [‡]

Les questions présentées ci-dessous peuvent être considérées comme mon plan de travail pour les mois à venir. Certaines d'entr'elles ne demanderont si tout va bien qu'un approfondissement sur certains résultats et techniques d'analyse — difficile à réaliser en période de bouclage, au mois d'août et sans internet ☺ — ; d'autres en revanche sont plus spéculatives.

6.a Sur le plongement optimal de F

Je pense que la condition "$\alpha < \overline{\alpha}$" du théorème 3.6 n'est pas optimale. Plus précisément, il me semble qu'en utilisant des inégalités de type Sobolev plus poussées, le théorème 3.6 devrait pouvoir être adapté pour tout $\alpha < 2\overline{\alpha}$.

En effet, dans notre démonstration du lemme 3.17, nous avons utilisé la condition de (β,θ)-correction seulement pour dire que $\|f\|_{1,\infty} \geqslant \beta^{1/2}\theta L_0$. Or la contrainte de (β,θ)-correction est au départ une condition de type L^∞ non pas sur Df, mais sur f elle-même, et on perd très vraisemblablement à omettre cela.

On devrait ainsi avoir le résultat suivant :

6.1 Conjecture. *Supposons $\alpha < 2\overline{\alpha}$. Alors pour un cube Q fixé, il existe une constante $c < \infty$ [inhomogène] telle que toute fonction f régulière sur Q vérifie*

$$\sup f - \inf f \leqslant c \|f\|_{\mathbf{W}_\alpha}. \tag{CO}$$

♣

6.2 Corollaire. *Sous la même hypothèse, il existe des constantes C_0 et C_1 telles que pour tout cube (β,θ)-correct,*

$$\int_Q \big(C_0 \beta^{-2}\theta^{-2} |Df(x)|^2 + C_1 \beta^{-2/\alpha}\theta^{-2/\alpha} |D^{2-\alpha} f(x)|^{2/\alpha}\big)\, dx \geqslant a(Q)^{d+2}. \tag{CP}$$

♣

[‡]. Cela dit, dans la mesure où une thèse de mathématiques est une forme de période d'essai au travail de chercheur, il m'a semblé qu'il pouvait aussi être intéressant pour le jury d'avoir une image instantanée du travail en question.

La validité de la conjecture 6.1 entraînerait la continuité (lipschitzienne) en λ du plongement de $\mathbf{F}$ dans $\mathbf{W}'_\alpha$ pour tout $\alpha < 2\overline{\alpha}$. Par contre, cela ne suffit pas à avoir la continuité globale.

En poussant plus loin, on pourrait chercher tirer de l'hypothèse de (β,θ)-correction une contrainte de type «L^∞ sur la dérivée fractionnaire $D^\eta f$» pour un $\eta \in (0,1]$. On devrait alors obtenir le lemme suivant :

6.3 Conjecture. *Pour $\eta \in (0,1]$, $\alpha < (2-\eta)\overline{\alpha}$, il existe des constantes C_0 et C_1 telles que pour tout cube (β,θ)-correct,*

$$\int_Q \left(C_0\beta^{-1}\theta^{-2}|Df(x)|^2 + C_1\beta^{(\eta-2)/\alpha}\theta^{-2/\alpha}|D^{2-\alpha}f(x)|^{2/\alpha}\right)dx \geqslant a(Q)^{d+2}. \tag{CQ}$$

♣

La conjecture 6.3 entraîne la continuité du plongement dans $\mathbf{W}'_\alpha$ dès que $\alpha < 2\overline{\alpha}$, mais cette fois-ci il ne s'agira que d'une continuité $((2-\alpha/\overline{\alpha})\wedge 1)$-hölderienne [§]. Comme nous le verrons, cette restriction n'est pas un artefact dû à la preuve mais bien un phénomène incontournable.

6.4 Remarque. En dimension $d = 1$ on a $2\overline{\alpha} = 4/3 > 1$, de sorte qu'on peut alors prendre $\alpha = 1$ pour obtenir un plongement (continu en λ et $\frac{1}{2}$-hölderien ailleurs) de $\mathbf{F}$ dans l'espace *homogène* $\mathbf{W}_1 = \dot{W}^{1,2}$. ♡

La limite $2\overline{\alpha}$ est optimale, car $\mathbf{F}$ ne peut pas être plongé dans $\mathbf{W}_{2\overline{\alpha}}$. En effet, on peut obtenir pour un coût de transport arbitrairement faible à partir de la mesure uniforme une mesure π de la forme $n\boldsymbol{\delta}_{x_0} - f(x)dx$ (où $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $n > 0$ [N]) pour f [N.L^{-d}] une fonction gentille, et une telle mesure n'est pas dans $\mathbf{W}'_{2\overline{\alpha}}$ [1, exemple 4.43].

Par ailleurs, une fois qu'on a créé un atome pour μ, on peut déplacer (dans l'espace physique) cet atome d'une distance r au prix d'un déplacement W_2 de la mesure μ qui va en $O(r)$ quand $r \to 0$. Comme la différence entre deux diracs de même masse distants de r a quant à elle une norme dans $\mathbf{W}'_\alpha$ qui va en $r^{(2-\alpha/\overline{\alpha})\wedge 1}$ quand $r \to 0$, il s'ensuit que la continuité du plongement de $\mathbf{F}$ dans $\mathbf{W}'_\alpha$ en une mesure ayant un atome est au mieux $((2-\alpha/\overline{\alpha})\wedge 1)$-hölderienne. Ainsi les résultats de plongement obtenus si nous parvenons à mener notre programme à bien seront essentiellement optimaux.

Cela dit, ce n'est pas parce que le théorème 3.2 cesse d'être valide pour $\alpha \geqslant 2\overline{\alpha}$ qu'il en est forcément de même pour le théorème 5.2 sur la stabilité de l'équilibre homogène. Il serait donc intéressant de chercher des contre-exemples à ce théorème pour voir à quel point les hypothèses de régularité sur v y sont nécessaires.

6.b Sur l'énergie d'activation

Retour sur le § 4 Pour minorer l'énergie d'activation, j'ai utilisé au § 4 une technique consistant à minorer $\|v * p\|_2$ en fonction de $\|v * p\|_\infty$. Malheureusement, le lemme 4.1 sur lequel repose cette méthode recquiert une hypothèse supplémentaire forte sur v. Cette hypothèse correspond à une contrainte d'intégrabilité sur $D^2 v$; plus précisément, on a en fait besoin qu'il existe une fonction A intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et un rayon $r > 0$ tels que $|y-x| \leqslant r \;\Rightarrow\; |D^2 f(x)| \leqslant A(y)$. (Cette contrainte est un peu plus faible que celle du lemme, mais je l'avais éludée car elle n'est guère éclairante et conduit à une démonstration plus technique). On peut en tout cas trouver des contre-exemples montrant

[§]. Plus exactement, pour tout $\varepsilon > 0$ le plongement sera $((2-\alpha/\overline{\alpha}-\varepsilon)\wedge 1)$-hölderien (sur les bornés).

qu'une hypothèse de ce type est indispensable pour que le lemme 4.1 s'applique. Il est à noter que cette contrainte apparemment surprenante se retrouve également pour démontrer la continuité de la fonctionnelle $\mathscr{U}$ sur $\mathbf{F}$, de sorte que son sens est sans doute plus profond qu'il n'y paraît.

Cela dit, peut-être peut-on contourner le lemme 4.1 et minorer quand même l'énergie d'activation pour des potentiels v ne satisfaisant pas l'hypothèse d'intégrabilité sur $D^2 v$. Une idée serait d'essayer d'appliquer à cette situation la technique du § 5.c, à savoir de trouver un potentiel w tel que $-\hat{w}$ majore $-\hat{v}$, ayant la même température de transition, et vérifiant pour sa part l'hypothèse supplémentaire. Dans quelles conditions est-ce possible ?

Je signalerai enfin que le lemme 4.1, qui a été écrit à partir d'hypothèses sur $D^2 v$, devrait pouvoir s'adapter sous des hypothèses du même genre sur $D^\eta v$ pour un $\eta \in (0,2]$. Ainsi, si v est dans $\mathbf{W}'_\alpha$ et vérifie une hypothèse d'intégrabilité supplémentaire appropriée, on devrait pouvoir obtenir une formule du genre de (BT) avec l'exposant $d/4$ remplacé par $\frac{2\overline{\alpha}-\alpha}{2\overline{\alpha}} d/4$, et donc au final un exposant de $3+\frac{2\overline{\alpha}-\alpha}{2\overline{\alpha}} d/2$ dans la version correspondante du théorème 5.5. Toutefois, compte tenu des remarques précédente et suivante il est probable que cela n'ait que peu d'intérêt.

Exposant critique pour l'énergie d'activation D'autre part, j'ai établi au théorème 5.5 que l'énergie d'activation apparaissait avec un exposant de $(3+d/2)$ au plus, mais j'ignore quelle est la valeur optimale de cet exposant. Il s'agit là selon moi d'une question particulièrement importante. Dans le cas d'une brisure spontanée de symétrie en dimension finie en tout cas, la théorie des catastrophes montre que l'exposant critique générique est 3, ce qui suggère une amélioration possible. Il serait intéressant de déjà mener des calculs et simulations numériques pour se faire une idée de la véritable valeur de l'exposant critique, puis si possible de démontrer le résultat ainsi conjecturé.

6.c Sur les potentiels d'interaction non négatifs

J'ai donné au § 5.c une technique pour établir la température de transition de phase dans le cas général où v n'est pas négatif. Nous avons ainsi vu qu'on récupérait la formule du théorème 5.2 pour v suffisamment gentille. Peut-on améliorer ce résultat ?

Voici d'abord un point qui pourrait s'avérer intéressant pour les questions d'énergie d'activation. La fonction f_1 que j'ai donnée étant strictement inférieure à 1 dès que $\xi \neq 0$, nous sommes obligés d'augmenter sans cesse la valeur de L à mesure que ε tend vers 0, ce qui entraîne une augmentation ennuyeuse de l'exposant du théorème 5.5 (bien que je n'aie pas abordé cette question tout à l'heure). Pour supprimer cet écueil, il suffirait de remplacer la fonction f_1 par une fonction ayant un plateau. J'aimerais donc que la réponse à la question suivante soit positive :

6.5 Question. *Existe-t-il un fonction f_1 qui satisfasse les propriétés de la proposition 5.8 et qui en outre soit constante au voisinage de* 0 *?* ♣

Un défi plus ambitieux est d'affaiblir les hypothèses de régularité sur v dans le théorème 5.7 (du moins pour l'aspect « température de transition » de ce théorème). L'idéal serait d'étendre ce résultat pour tout $v \in \mathbf{W}_\alpha$, ce qui soulève la question suivante :

6.6 Question. *Soit $\alpha \in [0,1]$. Pour toute fonction $v \in \mathbf{W}_\alpha$, existe-t-il une fonction $w \in \mathbf{W}_\alpha$ négative telle que $-\hat{w}(\xi) \geqslant -\hat{v}(\xi)\ \ \forall \xi$ et que $\int(-w)$ soit arbitrairement proche* [¶] *de V ?* ♣

[¶]. Voire égal, ce qui répondrait du même coup au premier point de cette sous-section.

Références bibliographiques

[1] ADAMS, R. A., AND FOURNIER, J. J. F. *Sobolev spaces*, second ed., vol. 140 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] AIZENMANN, M., BARSKY, D., AND FERNÁNDEZ, R. The phase transition in a general class of Ising-type models is sharp. *J. Stat. Phys. 47* (1987), 343–374.

[3] BERGH, J., AND LÖFSTRÖM, J. *Interpolation spaces. An introduction*, vol. 223 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1976.

[4] BILLINGSLEY, P. *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons Inc., 1968.

[5] BILLINGSLEY, P. *Probability and measure*, third ed. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., 1995.

[6] BIRD, G. A. Direct simulation and the Boltzmann equation. *Phys. Fluids 13*, 10 (1970), 2676–2681.

[7] BOLLEY, F., GUILLIN, A., AND VILLANI, C. Quantitative concentration inequalities for empirical measures on non-compact spaces. *Prob. Theory and Related Fields 137* (2007), 541–593.

[8] BOLTZMANN, L. Weitere Studien über das Wärmegleichgenicht unter Gasmoläkuler. *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften 66* (1872), 275–370. Voir [13] pour une traduction en anglais.

[9] BRADLEY, R. C. Equivalent measures of dependence. *J. Multivariate Anal. 13*, 1 (1983), 167–176.

[10] BRADLEY, R. C. On the spectral density and asymptotic normality of weakly dependent random fields. *J. Theoret. Probab. 5*, 2 (1992), 355–373.

[11] BRADLEY, R. C. Basic properties of strong mixing conditions. A survey and some open questions. *Probab. Surv. 2* (2005), 107–144 (electronic). Update of the 1986 original.

[12] BRADLEY, R. C. *Introduction to strong mixing conditions. Vol. 1–3*. Kendrick Press, Heber City, UT, 2007.

[13] BRUSH, S. Further studies on the thermal equilibrium of gas molecules. *Kinetic theory 2* (1966), 88–175.

[14] BRYC, W. Conditional moment representations for dependent random variables. *Electron. J. Probab. 1*, article no. 7 (1996), 14 pp.

[15] BULINSKIĬ, A. V. Measures of dependence that are close to the maximum correlation coefficient. *Soviet Math. Dokl. 30*, 1 (1984), 249–252.

[16] CARLEMAN, T. Sur la théorie de l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann. *Acta Math. 60*, 1 (1933), 91–146.

[17] CARLEN, E. A., GABETTA, E., AND TOSCANI, G. Propagation of smoothness and the rate of exponential convergence to equilibrium for a spatially homogeneous Maxwellian gas. *Comm. Math. Phys. 199*, 3 (1999), 521–546.

[18] CARNE, T. K. A transmutation formula for Markov chains. *Bul. Sci. Math. (2) 109* (1985), 399–405.

[19] CHAMPION, T., DE PASCALE, L., AND JUUTINEN, P. The ∞-Wasserstein distance : local solutions and existence of optimal transport maps. *SIAM J. Math. Anal. 40*, 1 (2008), 1–20.

[20] COVER, T. M., AND THOMAS, J. A. *Elements of information theory*, second ed. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], 2006.

[21] CSÁKI, P., AND FISCHER, J. On the general notion of maximal correlation. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 8* (1963), 27–51.

[22] DEDECKER, J. A central limit theorem for stationary random fields. *Probab. Theory Related Fields 110*, 3 (1998), 397–426.

[23] DEMAZURE, M. *Catastrophes et Bifurcations*. Ellipses, 1989.

[24] DESVILLETTES, L. Boltzmann's kernel and the spatially homogeneous Boltzmann equation. *Rivista di Matematica dell'Università di Parma 6*, 4* (2001), 1–22.

[25] DOBRUSHIN, R. L., AND SHLOSMAN, S. Completely analytical interactions : constructive description. *J. Statist. Phys. 46*, 5-6 (1987), 983–1014.

[26] DOBRUŠIN, R. L. Markov processes with a large number of locally interacting components : The invertible case and certain generalizations. *Problemy Peredači Informacii 7*, 3 (1971), 57–66.

[27] DOLBEAULT, J., AND PERTHAME, B. Optimal critical mass in the two-dimensional Keller-Segel model in $\mathbb{R}^2$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris 339*, 9 (2004), 611–616.

[28] DUDLEY, R. M. *Uniform central Limit Theorems*. No. 63 in Cambridge Studies in avanced mathematics. Cambridge university Press, 1999.

[29] EULER, L. Sur la force des colonnes. *Mem. Acad. Sci. Berlin 13* (1759), 252–282.

[30] FERNANDEZ, B., AND MÉLÉARD, S. A Hilbertian approach for fluctuations on the McKean-Vlasov model. *Stochastic Process. Appl. 71*, 1 (1997), 33–53.

[31] FOURNIER, N., AND MÉLÉARD, S. Monte-Carlo approximations and fluctuations for 2D Boltzmann equations without cutoff. *Markov Process. Related Fields 7*, 1 (2001), 159–191.

[32] GARDNER, R. J. The Brunn-Minkowski inequality. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 39*, 3 (2002), 355–405.

[33] GHYS, É., AND DE LA HARPE, P. Infinite groups as geometric objects (after Gromov). In *Ergodic theory, symbolic dynamics, and hyperbolic spaces (Trieste, 1989)*, Oxford Sci. Publ. Oxford Univ. Press, 1991, pp. 299–314.

[34] GILBARG, D., AND TRUDINGER, N. S. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[35] GLAUBER, R. J. Time-dependent statistics of the Ising model. *J. Mathematical Phys. 4* (1963), 294–307.

[36] GRAHAM, C., AND MÉLÉARD, S. Stochastic particle approximations for generalized Boltzmann models and convergence estimates. *Ann. Probab. 25*, 1 (1997), 115–132.

[37] GRIMMETT, G. *The random-cluster model*, vol. 333 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 2006.

[38] GUGGENHEIMER, H. W. *Differential geometry*. Dover Publications Inc., 1977. Corrected reprint of the 1963 edition.

[39] HORN, R. A., AND JOHNSON, C. R. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, 1990. Corrected reprint of the 1985 original.

[40] IBRAGIMOV, I. A. A note on the central limit theorems for dependent random variables. *Theory of Probability and its Applications 20*, 1 (1975), 135–141.

[41] IOANA, A. Cocycle superrigidity for profinite actions of property (T) groups. Preprint available at `arXiv:0805.2998v1`, 2008.

[42] JÄGER, W., AND LUCKHAUS, S. On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis. *Trans. Amer. Math. Soc. 329*, 2 (1992), 819–824.

[43] KAC, M. Foundations of kinetic theory. In *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954–1955, vol. III* (1956), University of California Press, pp. 171–197.

[44] KANTOROVITCH, L. On the translocation of masses. *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) 37* (1942), 199–201.

[45] KOLMOGOROV, A. N., AND ROZANOV, Y. A. On strong mixing conditions for stationary Gaussian processes. *Theory of Probability and its Applications 5*, 2 (1960), 204–208.

[46] LANCASTER, H. O. Some properties of the bivariate normal distribution considered in the form of a contingency table. *Biometrika 44* (1957), 289–292.

[47] LIGGETT, T. M. *Interacting particle systems*, vol. 276 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1985.

[48] LUNT, J., LYONS, T. J., AND ZHANG, T. S. Integrability of functionals of Dirichlet processes, probabilistic representations of semigroups, and estimates of heat kernels. *J. Funct. Anal. 153*, 2 (1998), 320–342.

[49] LYONS, R. Probabilities on trees and networks. `http://mypage.iu.edu/~rdlyons/prbtree/book.pdf`.

[50] LYONS, T. J., AND WEIAN, Z. A crossing estimate for the canonical process on a Dirichlet space and a tightness result. In *Colloque Paul Lévy sur les Processus Stochastiques (Palaiseau, 1987)* (1988), pp. 249–271. *Astérisque* # 157–158.

[51] MALRIEU, F. Logarithmic Sobolev inequalities for some nonlinear PDE's. *Stochastic Process. Appl. 95*, 1 (2001), 109–132.

[52] MARTINELLI, F. Lectures on Glauber dynamics for discrete spin models. In *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1997)*, vol. 1717 of *Lecture Notes in Math.* Springer, 1999, pp. 93–191.

[53] MARTINELLI, F., AND OLIVIERI, E. Approach to equilibrium of Glauber dynamics in the one phase region. I. The attractive case. *Comm. Math. Phys. 161*, 3 (1994), 447–486.

[54] MARTINELLI, F., OLIVIERI, E., AND SCHONMANN, R. H. For 2-D lattice spin systems weak mixing implies strong mixing. *Comm. Math. Phys. 165*, 1 (1994), 33–47.

[55] MAXWELL, J. On the Dynamical Theory of Gases. *Philosophical transactions of the Royal Society of London 157* (1867), 49–88.

[56] MÉLÉARD, S. Asymptotic behaviour of some interacting particle systems ; McKean-Vlasov and Boltzmann models. In *Probabilistic models for nonlinear partial differential equations (Montecatini Terme, 1995)*, vol. 1627 of *Lecture Notes in Math.* Springer, 1996, pp. 42–95.

[57] MINLOS, R. A., AND SINAĬ, J. G. Investigation of the spectra of stochastic operators that arise in lattice gas models. *Teoret. Mat. Fiz. 2*, 2 (1970), 230–243.

[58] OLLIVIER, Y. Ricci curvature of Markov chains on metric spaces. *J. Funct. Anal. 256*, 3 (2009), 810–864.

[59] OTTO, F. The geometry of dissipative evolution equations : the porous medium equation. *Comm. Partial Differential Equations 26*, 1-2 (2001), 101–174.

[60] PADMANABHAN, T. *Structure formation in the universe*. Cambridge University Press, 1993.

[61] PEIERLS, R. On Ising's model of ferromagnetism. *Proc. Cambridge Philos. Soc. 32* (1936), 477–481.

[62] PELIGRAD, M. On the central limit theorem for ρ-mixing sequences of random variables. *Ann. Probab. 15*, 4 (1987), 1387–1394.

[63] PERCIVAL, D. B., AND WALDEN, A. T. *Spectral analysis for physical applications*. Cambridge University Press, 1993.

[64] PEYRE, R. Le théorème « $\mathbb{Z}$ contre $\mathbb{Z}$ » est optimal partout. Notes personnelles.

[65] PEYRE, R. Pas de règle de chaîne pour les corrélations maximales, même dans un cas très gentil. Notes personnelles.

[66] PEYRE, R. A probabilistic approach to Carne's bound. *Potential Anal. 29*, 1 (2008), 17–36.

[67] PEYRE, R. Some ideas about quantitative convergence of collision models to their mean field limit. *J. Stat. Phys. 136*, 6 (2009), 1105–1130.

[68] PEYRE, R. Hilbertian decorrelations. `arXiv:1004.1602v1`, 2010. Version préliminaire.

[69] PULVIRENTI, M., WAGNER, W., AND ZAVELANI ROSSI, M. B. Convergence of particle schemes for the Boltzmann equation. *European J. Mech. B Fluids 13*, 3 (1994), 339–351.

[70] RANKIN, R. A. *The modular group and its subgroups*. The Ramanujan Institute, Madras, 1969.

[71] REVUZ, D., AND YOR, M. *Continuous martingales and Brownian motion*, vol. 293 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1999.

[72] ROBERT, A. Functional analysis and NSA. In *Developments in nonstandard mathematics (Aveiro, 1994)*, vol. 336 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.* Longman, 1995, pp. 73–90.

[73] ROSENBLATT, M. A central limit theorem and a strong mixing condition. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 42* (1956), 43–47.

[74] ROSENBLATT, M. *Markov processes. Structure and asymptotic behavior*, vol. 184 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1971.

[75] RUDIN, W. *Real and complex analysis*, third ed. McGraw-Hill Book Co., 1987.

[76] SCHWARZ, L. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann, 1997.

[77] SERRE, D. *Les matrices, théorie et pratique*. Dunod, 2001.

[78] SPOHN, H. *Large scale dynamics of interacting particles*. Texts and monographs in physics. Springer, 1991.

[79] SZNITMAN, A.-S. Équations de type de Boltzmann, spatialement homogènes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 66*, 4 (1984), 559–592.

[80] SZNITMAN, A.-S. Topics in propagation of chaos. In *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989*, vol. 1464 of *Lecture Notes in Math.* Springer, 1991, pp. 165–251.

[81] TURING, A. M. The chemical basis of morphogenesis. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, B 237*, 641 (1952), 37–72.

[82] VAROPOULOS, N. TH. Long range estimates for Markov chains. *Bul. Sci. Math. (2) 109* (1985), 225–252.

[83] VILLANI, C. A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. In *Handbook of mathematical fluid dynamics, Vol. I.* North-Holland, 2002, pp. 71–305.

[84] VILLANI, C. *Topics in optimal transportation*, vol. 58 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2003.

[85] VILLANI, C. Hypocoercivity. *Mem. Amer. Math. Soc. 202*, 950 (2009), iv+141 pp.

[86] WAGNER, W. A convergence proof for Bird's direct simulation Monte Carlo method for the Boltzmann equation. *J. Statist. Phys. 66*, 3-4 (1992), 1011–1044.

[87] WEIDMANN, J. *Linear operators in Hilbert spaces*, vol. 68 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1980. Translated from the German by Joseph Szücs.

[88] WITHERS, C. S. Central limit theorems for dependent variables. I. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 57*, 4 (1981), 509–534.

[89] WITSENHAUSEN, H. S. On sequences of pairs of dependent random variables. *SIAM J. Appl. Math. 28* (1975), 100–113.