

Autour du mouvement brownien

Rémi Peyre

21 mars 2007

Résumé

Le document suivant constitue les notes d'une série d'exposés donnés du 7 au 21 mars 2007 dans le cadre du séminaire étudiant de l'ÉNS Lyon, destiné à des non-probabilistes. Le thème général est l'étude des processus aléatoires continus et s'organise en deux parties, respectivement appelées « Mouvement brownien dans \mathbb{R}^d » et « Calcul stochastique »

Le plan de la première partie est le suivant. Dans une première subsection, on introduit le mouvement brownien comme une sorte de marche aléatoire universelle, jusqu'à en arriver à une définition rigoureuse. Les propriétés élémentaires du mouvement brownien sont passées en revue dans une deuxième subsection. Enfin, la troisième subsection de cet exposé explique le lien entre mouvement brownien et laplacien, tant du point de vue du générateur que de celui du générateur dual. Pour le plan de cette partie, j'ai essayé de rester le plus proche possible de ma vision personnelle des choses, de sorte que j'hésiterais à désigner un ouvrage de référence. Je me suis en partie appuyé sur mes notes de cours de J-F. Le Gall, dont on trouvera une version informatisée en [1], mais je conseillerais plutôt au néophyte l'approche plus concrète de R. Bass [2].

Dans la deuxième partie, on parle de calcul stochastique : j'ai essayé d'introduire ce domaine de la façon la plus intuitive possible, mais sans trop faire l'impasse sur la rigueur pour autant. Pour les sources, je me suis appuyé sur mes notes manuscrites du cours de M2 d'Olivier Raimond, ainsi que sur [2] dont j'apprécie la légèreté du style, mais la référence incontestée du sujet est [5]. L'essentiel de cette partie est assez didactique : notion de martingale continue, variation quadratique, intégrales d'Itô et de Stratonovitch. Puis en guise d'application, nous montrons comment la formule d'Itô permet de montrer l'invariance conforme du mouvement brownien. Ainsi, on peut donner une construction explicite de la représentation conforme d'un ouvert simplement connexe de \mathbb{R}^2 .

1 Mouvement brownien dans \mathbb{R}^d

☛ Dans toute cette partie, on travaille dans l'espace euclidien \mathbb{R}^d , où $d \geq 1$ est un entier fixé. Les vecteurs de \mathbb{R}^d sont notés avec une flèche, et les matrices de $\mathbb{R}^{d \times d}$ en gras.

1.1 Construction du mouvement brownien

1.1.1 Rappels : la loi des grands nombres, le théorème-limite central

Théorème 1.1.1 (loi des grands nombres). Soit \vec{X} une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d , de classe L^1 (c'est-à-dire que chacune des composantes de ce vecteur est L^1). On se donne $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que \vec{X} . Alors,

$$p.s. \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{X}_i \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[\vec{X}], \quad (1)$$

où l'espérance du vecteur \vec{X} n'est rien d'autre que le vecteur dont chaque composante est l'espérance de la composante correspondante de \vec{X} .

Théorème 1.1.2 (théorème-limite central). Soit \vec{X} une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d , de classe L^2 , centrée, i.e. $\mathbb{E}[\vec{X}] = \vec{0}$. Soit \mathbf{C} la matrice de covariance de \vec{X} : notant $\vec{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$, \mathbf{C} est une matrice symétrique dont les coefficients sont définis par :

$$C_{ij} = \mathbb{E}[X^{(i)} X^{(j)}]. \quad (2)$$

On se donne $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que \vec{X} . Alors,

$$\frac{1}{N^{1/2}} \sum_{i=1}^N \vec{X}_i \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(\mathbf{C}), \quad (3)$$

où $\mathcal{N}(\mathbf{C})$ est le vecteur gaussien de covariance \mathbf{C} , dont la définition est rappelée ci-dessous. (Rappelons également que la convergence en loi d'une suite de variables $(\vec{Y}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers une variable \vec{Z} signifie que, pour $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée quelconque, $\mathbb{E}[f(\vec{Y}_n)] \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[f(\vec{Z})]$).

Définition 1.1.3. On appelle vecteur gaussien réduit tout vecteur aléatoire \vec{X} de \mathbb{R}^d dont la loi possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par :

$$\frac{d\mathbb{P}(\vec{X} = \vec{v})}{dv} = (2\pi)^{-d/2} e^{-|\vec{v}|^2/2}. \quad (4)$$

Pour $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ une matrice, le vecteur aléatoire $\mathbf{M}\vec{v}$ a une loi qui ne dépend que de $\mathbf{M}^t \mathbf{M}$, laquelle matrice est d'ailleurs sa covariance ; $\mathbf{M}\vec{v}$ (ou, plus précisément, sa loi) est appelé le vecteur gaussien de covariance $\mathbf{M}^t \mathbf{M}$.

1.1.2 Motivation

Comme il est bien connu, l'expression « mouvement brownien » vient du nom du biologiste Robert Brown qui, en 1827, observa au sein de grains de pollens les mouvements très irréguliers de poussières microscopiques [3]. Nous allons plutôt nous poser une question abstraite : « À quoi ressemble une marche au hasard dans \mathbb{R}^d , vue de loin ? ».

Soit donc \vec{X} un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^d de classe L^2 , centré et de covariance \mathbf{C} . Soient $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots$ des copies indépendantes de \vec{X} . Alors on peut définir un processus à temps discret $(M_t)_{t \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d (dont on choisit un point O comme origine) par :

$$\overrightarrow{OM}_t = \sum_{i=1}^t \vec{X}_i. \quad (5)$$

Maintenant, nous voulons étudier le comportement de ce processus « vu de loin ». Comme le théorème-limite central nous dit que M_t va s'éloigner de O d'une distance de l'ordre de $t^{1/2}$, il y a une renormalisation toute trouvée par laquelle nous pouvons définir un processus $(M_t^\lambda)_{t \in (1/\lambda)\mathbb{N}}$, pour $\lambda > 0$:

$$\overrightarrow{OM}_t^\lambda = \lambda^{-1/2} \overrightarrow{OM}_{\lambda t}. \quad (6)$$

Nous avons envie d'étudier le processus M^λ pour λ très grand, dans l'idée de voir apparaître à la limite la loi d'un processus à temps continu $(M_t^\infty)_{t \geq 0}$.

À quoi doit ressembler un tel processus? D'une part, le théorème-limite central nous dit que la loi du vecteur $\overrightarrow{M_t M_{t'}}$, pour $t \leq t'$, doit converger vers $\mathcal{N}((t' - t)\mathbf{C})$. D'autre part, par passage à la limite on voit que la trajectoire du processus après l'instant t (en prenant M_t^∞ pour point de départ) sera indépendante de la trajectoire du processus avant cet instant.

Donc, un mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$, s'il est possible de le définir, devra vérifier le

Théorème 1.1.4. *Pour $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, la loi de $(\overrightarrow{B_{t_0} B_{t_1}}, \overrightarrow{B_{t_1} B_{t_2}}, \dots, \overrightarrow{B_{t_{n-1}} B_{t_n}})$ est le produit de vecteur gaussiens indépendants de lois respectives $\mathcal{N}((t_1 - t_0)\mathbf{C}), \dots, \mathcal{N}((t_n - t_{n-1})\mathbf{C})$.*

On appellera mouvement brownien *standard* le mouvement brownien dont la covariance est l'identité. Il nous suffit alors de donner une construction du mouvement brownien standard puisque, si $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard et \mathbf{M} une matrice de $\mathbb{R}^{d \times d}$, le processus $(B'_t)_{t \geq 0}$ défini par $\overrightarrow{OB'_t} = \mathbf{M} \overrightarrow{OB_t}$ est un mouvement brownien de covariance $\mathbf{M}^t \mathbf{M}^{\top}$ (1).

1.1.3 Une construction du mouvement brownien

Soit $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}_+ ; \exists p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N} \ x = \frac{p}{2^q}\}$ l'ensemble des nombres dyadiques positifs; on note $\mathbb{D} = \bigsqcup_{i \geq 0} \mathbb{D}^{(i)}$, avec $\mathbb{D}^{(0)} = \mathbb{N}$, $\mathbb{D}^{(1)} = \frac{1}{2}\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $\mathbb{D}^{(2)} = \frac{1}{4}\mathbb{N} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{N}$, etc. Il n'existe qu'une loi possible du mouvement brownien sur l'ensemble des points dyadiques, puisque nous connaissons la loi du mouvement brownien sur tous les ensembles finis (2). Voici comment on peut construire effectivement une telle loi (3) :

1. Cela permet bien de construire des mouvements browniens de n'importe quelle covariance, puisque tout matrice réelle symétrique \mathbf{C} peut se mettre sous la forme $\mathbf{M}^t \mathbf{M}$.
2. Si nous avons pris les dyadiques dans un premier temps, plutôt que \mathbb{R}_+ directement, c'est parce que la tribu sur \mathbb{R}_+ engendrée par les cylindres ne permet pas de mesurer certaines propriétés des trajectoires à temps continu, par exemple la continuité.
3. La méthode que nous décrivons ici est particulièrement bien adaptée aux simulations car on peut augmenter progressivement sa résolution.

1^{re}étape : On prend des vecteurs aléatoires gaussiens réduits ⁽⁴⁾ indépendants $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$, et pour $t \in \mathbb{N}$, on définit

$$\overrightarrow{OB}_t = \sum_{i=1}^t \vec{v}_i. \quad (7)$$

Il est évident que $(B_t)_{t \in \mathbb{N}}$ vérifie la loi du mouvement brownien.

2^eétape : Pour $t \in \mathbb{D}^{(1)}$, on donne à B_t la loi

$$B_t = \frac{B_{t-1/2} + B_{t+1/2}}{2} + \mathcal{N}\left(\frac{1}{4}\mathbf{I}_d\right), \quad (8)$$

et on fixe ainsi la loi de chaque $x \in \mathbb{D}^{(1)}$ de manière indépendante. On vérifie par le calcul que c'est bien ainsi qu'on récupère sur $\frac{1}{2}\mathbb{N}$ la loi demandée.

3^eétape : On recommence la seconde étape pour fixer la valeur de B_t pour $t \in \mathbb{D}^{(2)}$, puis $t \in \mathbb{D}^{(3)}$, et ainsi de suite. À l'étape i , la loi d'un point d'abscisse $t \in \mathbb{D}^{(i)}$ est fixée comme :

$$B_t = \frac{B_{t-1/2^i} + B_{t+1/2^i}}{2} + \mathcal{N}\left(\frac{1}{2^{i+1}}\mathbf{I}_d\right). \quad (9)$$

Et maintenant que nous avons défini une fonction $B : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^d$, y a-t-il un moyen naturel d'étendre cette fonction à tout \mathbb{R}_+ ? Oui! C'est le

Théorème 1.1.5. *Presque-sûrement, la fonction sur \mathbb{D} que nous venons de définir est continue. On peut donc la prolonger par continuité⁽⁵⁾ en une fonction $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$, laquelle vérifie le théorème 1.1.4, à cause de la satisfaction de ce théorème par la fonction restreinte à \mathbb{D} et de la continuité de B .*

Démonstration. Nous allons démontrer que B est absolument continu sur $\mathbb{D} \cap [0, 1]$; par réunion dénombrable il s'ensuivra que B est continu sur \mathbb{D}_+ presque-sûrement. On pose :

$$\delta_n = \max_{x \in [0, 1] \cap \frac{1}{2^n}\mathbb{Z}} |\overrightarrow{B_x B_{x+1/2^n}}|. \quad (10)$$

Alors, pour démontrer l'absolue continuité de B sur $\mathbb{D} \cap [0, 1]$, il nous suffit de démontrer que $\sum_n \delta_n$ converge p.s.. Allons-y donc!

δ_n s'écrit comme le maximum de 2^n variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(\frac{1}{2^n}\mathbf{I}_d)$. Or, on démontre aisément l'existence de constantes a et K telles que, si \vec{X} est un vecteur aléatoire gaussien réduit, alors, pour tout $x \geq 0$, $\mathbb{P}(|\vec{X}| \geq x) \leq Ke^{-x^2/a}$. De sorte que

$$\forall x \geq 0 \quad \mathbb{P}(\delta_n \geq x) \leq 2^n K \exp\left(-\frac{2^n x^2}{a}\right). \quad (11)$$

4. i.e., de covariance \mathbf{I}_d .

5. Dans la pratique, on ajoute comme hypothèse que le mouvement brownien est *toujours* continu, et pas seulement presque-sûrement, et ce afin de pouvoir dire qu'un mouvement brownien est une variable aléatoire à valeurs dans l'espace des fonctions continues de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}^d .

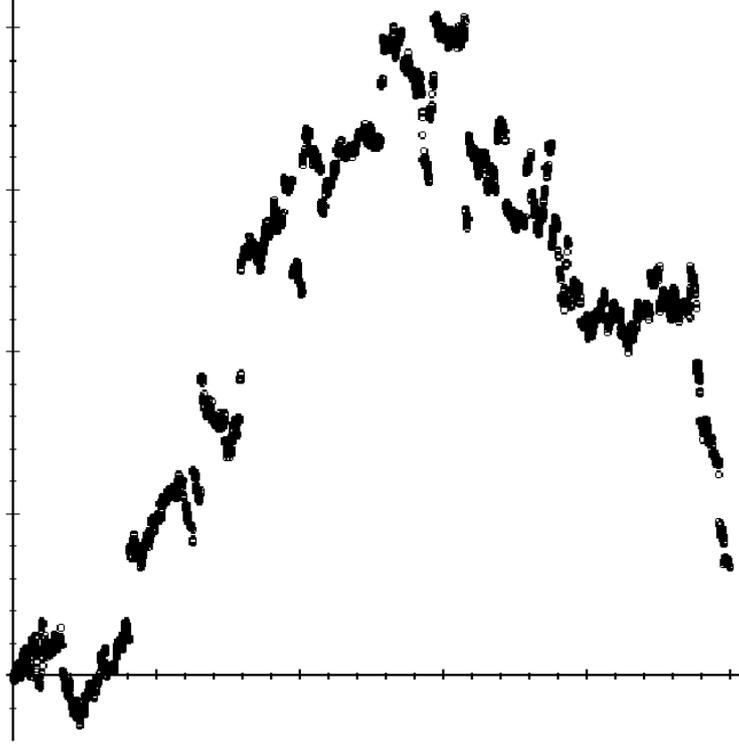


FIGURE 1 – Une réalisation d’un processus $\frac{3}{2}$ -stable : ce n’est clairement pas un processus continu

En particulier, posons $x_n = 2^{-n/4}$, alors :

$$\mathbb{P}(\delta_n \geq x_n) \leq 2^n K \exp\left(-\frac{2^{n/2}}{a}\right), \quad (12)$$

qui est le terme général d’une série convergente. Par le lemme de Borel-Cantelli, il s’ensuit que p.s. $\delta_n \leq x_n$ à partir d’un certain rang ; comme $\sum_n x_n$ converge, $\sum_n \delta_n$ converge p.s.. \square

Remarque 1.1.6. La continuité du B n’avait rien d’évident *a priori* ! Imaginons par exemple que nous ayons considéré, au départ, une marche aléatoire dont les pas n’étaient pas L^2 . Alors, sous certaines hypothèses convenables, la marche s’éloigne de l’origine en t^α pour un $\alpha \in]\frac{1}{2}, \infty[$. On peut alors faire comme précédemment un travail de renormalisation pour arriver à un processus, qualifié de processus $\frac{1}{\alpha}$ -stable. Ce processus n’est *pas* continu et présente des sauts, comme on peut le constater sur la figure 1.1.3 : la meilleure régularité qu’on puisse obtenir est la régularité de classe càd-làg (continu à droite, limite à gauche).

1.2 Propriétés du mouvement brownien

☞ *Dorénavant tous les mouvements browniens que nous considérerons seront standard ; les propriétés des mouvements browniens de covariance quelconque se déduisent facilement des propriétés du mouvement brownien standard énoncées ci-dessous.*

☞ Dans la section précédente, nous avons formalisé le mouvement brownien comme un processus à valeurs dans l'espace physique (i.e., B_t est un point), issu d'un point-origine O ; dorénavant pour alléger les notations nous noterons \vec{B}_t pour $\overrightarrow{OB_t}$, de sorte que $(\vec{B}_t)_{t \geq 0}$ sera un processus à valeurs vectorielles.

1.2.1 Visualisation graphique

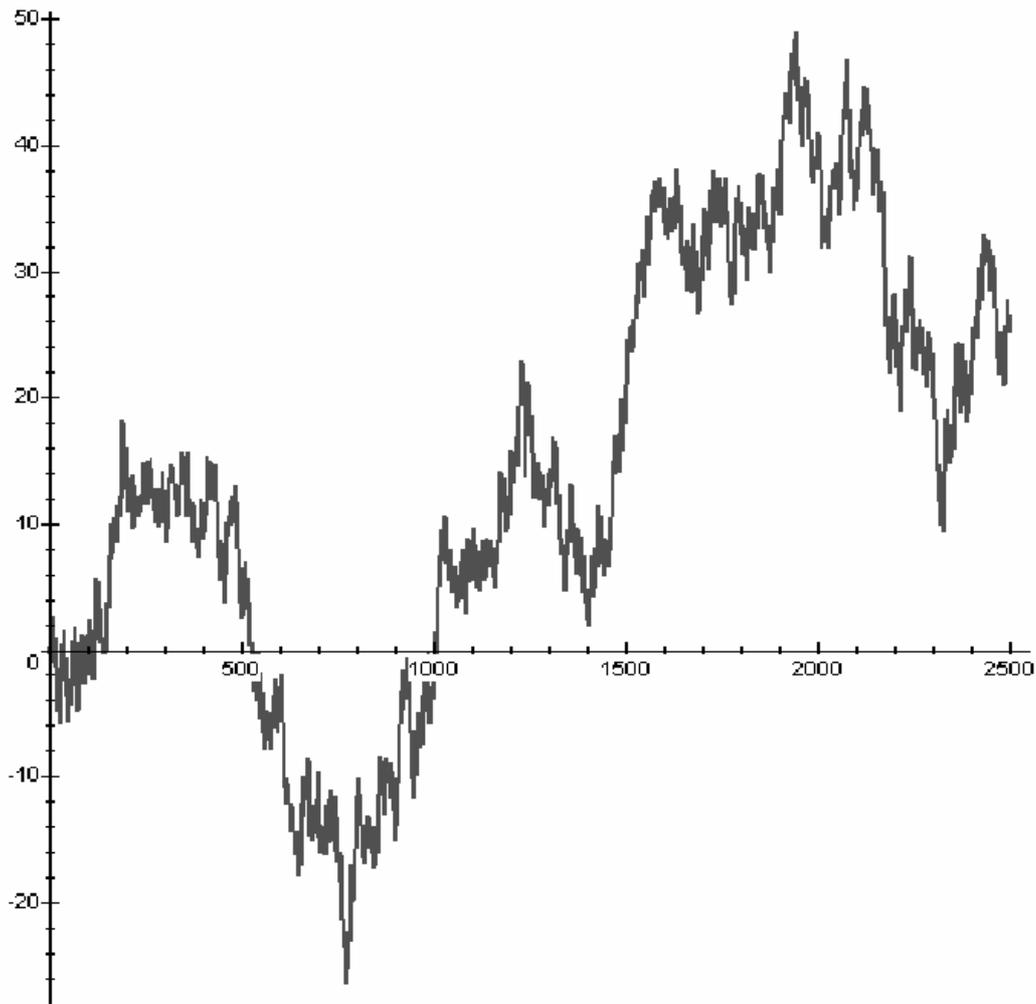


FIGURE 2 – Graphe d'une réalisation du mouvement brownien en dimension 1

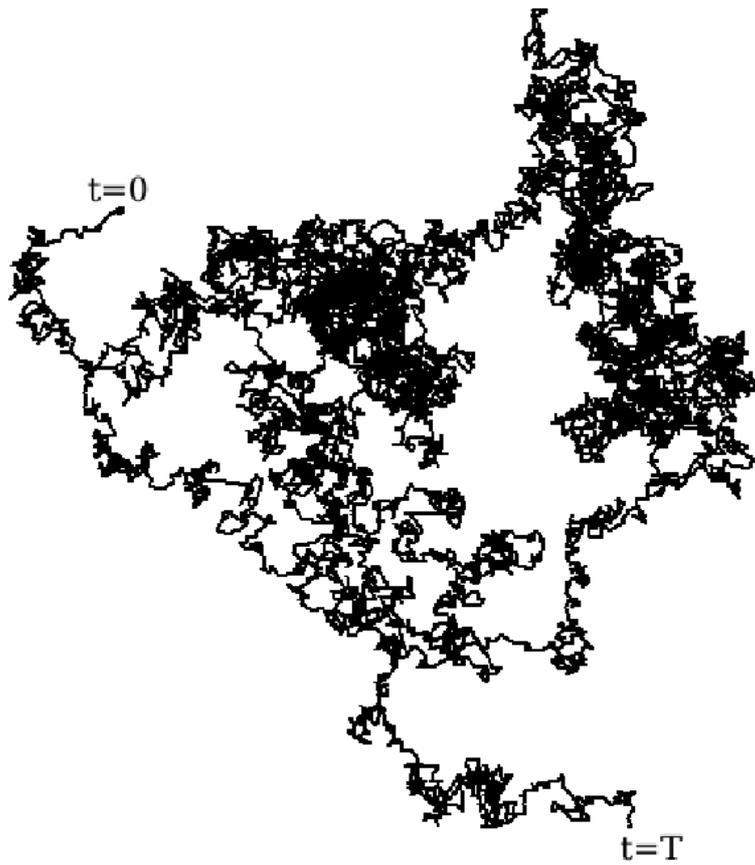


FIGURE 3 – Trajectoire sur $[0, T]$ d'une réalisation du mouvement brownien en dimension 2

1.2.2 Premières propriétés

Proposition 1.2.1 (propriété de Markov faible). *Pour tout $t \geq 0$, on note $\mathcal{F}_t = \sigma(\vec{B}_u; u \leq t)$ la tribu engendrée par la trajectoire du mouvement brownien jusqu'au temps t . Alors le processus $(\vec{B}_{u+t} - \vec{B}_t)_{u \geq 0}$ est indépendant de \mathcal{F}_t , et sa loi est celle d'un mouvement brownien.*

Cette propriété est évidente à partir des définitions. Elle a pour corollaire essentiel la propriété de Markov forte, que nous énonçons ci-dessous sans démonstration. En fait, la démonstration de Markov fort à partir de Markov faible repose simplement sur un jeu d'écriture formel assez pénible, mais l'intuition permet de l'admettre sans difficulté.

Nous avons besoin d'introduire la

Définition 1.2.2. *Une variable aléatoire τ à valeurs dans $[0, \infty]$ est un temps d'arrêt si, pour tout $t \geq 0$, l'événement $\{\tau \leq t\}$ est \mathcal{F}_t -mesurable. Moralement, un temps d'arrêt correspond à une règle permettant de crier « stop ! » au cours de l'évolution du mouvement brownien pour un observateur qui découvre la trajectoire au fur et à mesure.*

Pour τ un temps d'arrêt, on définit la tribu du passé avant τ , \mathcal{F}_τ , qui est moralement l'ensemble des informations dont notre observateur dispose sur le mouvement brownien au moment où il crie stop. Techniquement, un événement A est dans \mathcal{F}_τ si et seulement si :

$$\forall t \geq 0 \quad (A \text{ et } \tau \leq t) \in \mathcal{F}_t. \quad (13)$$

Corollaire 1.2.3 (propriété de Markov forte). *Pour tout temps d'arrêt τ , le processus $(\vec{B}_{\tau+u} - \vec{B}_\tau)_{u \geq 0}$, s'il existe⁽⁶⁾, est indépendant de \mathcal{F}_τ et est aussi un mouvement brownien.*

Les propriétés de Markov expriment donc que *la trajectoire future d'un mouvement brownien (en ayant remis l'origine à la position actuelle du mobile) ne dépend pas de son passé.*

Quelques autres propriétés immédiates du mouvement brownien :

Proposition 1.2.4 (isotropie). *Si $(\vec{B}_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien et \mathbf{M} une matrice de $O(d)$, alors $(\mathbf{M}\vec{B}_t)_{t \geq 0}$ est aussi un mouvement brownien standard.*

Proposition 1.2.5 (invariance d'échelle). *Si $(\vec{B}_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien, alors, pour $\lambda \in]0, \infty[$, le processus $(\vec{B}_t^\lambda)_{t \geq 0}$ défini par*

$$\vec{B}_t^\lambda = \lambda^{-1/2} \vec{B}_{\lambda t} \quad (14)$$

est lui aussi un mouvement brownien standard.

Une dernière propriété, évidente pour les lois finidimensionnelles de mouvement brownien, quoiqu'assez technique à démontrer sous sa forme continue :

6. Ce processus n'existe en effet pas si $\tau = \infty$.

Théorème 1.2.6 (théorème de support). *Notons \mathcal{C} l'espace des fonctions continues de \mathbb{R}_+ à valeurs dans \mathbb{R}^d issues de $\vec{0}$, que nous dotons de la topologie définie par la convergence sur tout compact, \mathcal{C} est alors un espace polonais (i.e., séparable et métrisable). Le mouvement brownien est alors une variable aléatoire à valeurs dans \mathcal{C} , et le support de cette variable aléatoire est \mathcal{C} tout entier.*

Remarque 1.2.7. En d'autres termes, le mouvement brownien a une probabilité non nulle d'être localement \mathcal{C}^0 -proche de n'importe quelle fonction continue.

1.2.3 Propriétés non triviales

Lois de 0 – 1. Les lois de 0 – 1 sont le point de départ de nombreuses démonstrations concernant les propriétés du mouvement brownien.

Définition 1.2.8. *On appelle tribu instantanée, notée \mathcal{F}_{0+} , la tribu des événements qu'on peut déterminer au bout d'un temps aussi court que l'on veut :*

$$\mathcal{F}_{0+} = \bigcap_{\varepsilon \searrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon. \quad (15)$$

On appelle tribu asymptotique, notée \mathcal{F}^∞ (7), la tribu des événements qu'on peut déterminer à partir d'un moment aussi tardif qu'on veut :

$$\mathcal{F}^\infty = \bigcap_{t \nearrow \infty} \sigma(\vec{B}_u; u \geq t). \quad (16)$$

Théorème 1.2.9. *La tribu \mathcal{F}_{0+} est triviale, i.e. elle ne contient que des événements dont la probabilité est 0 ou 1.*

Démonstration. Soit un événement $A \in \mathcal{F}_{0+}$, et soit un événement $B \in \mathcal{F}_\infty$ (8). Nous allons montrer que A et B sont indépendants. Prenant $B = A$, il s'ensuivra alors que A a pour probabilité 0 ou 1.

On observe d'abord la validité d'un lemme tout-à-fait général :

Lemme 1.2.10. *Soit A un événement de \mathcal{F}_{0+} , soit $\varepsilon \geq 0$. Alors il existe un ensemble fini d'instants t_1, \dots, t_n et un événement $\tilde{A} \in \sigma(\vec{B}_{t_1}, \dots, \vec{B}_{t_n})$ tels que \tilde{A} soit « très proche » de A au sens où :*

$$\mathbb{P}(A \Delta \tilde{A}) \leq \varepsilon. \quad (17)$$

On prend $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit et \tilde{B} obtenu grâce au lemme 1.2.10 pour approximer B ; il nous suffit de montrer que \tilde{B} est indépendant de A . On a $\tilde{B} \in \sigma(\vec{B}_{t_1}, \dots, \vec{B}_{t_n})$, où on peut supposer que tous les t_i sont non nuls, car $\vec{B}_0 = \vec{0}$ p.s., donc la tribu $\sigma(\vec{B}_0)$ est

7. Ne pas confondre avec $\mathcal{F}_\infty = \bigcup_{t \nearrow 0} \mathcal{F}_t$ qui est la tribu complète de tous les événements mesurables par rapport à la trajectoire du mouvement brownien.

8. Ne pas confondre \mathcal{F}_∞ et \mathcal{F}^∞ , cf. note 7.

triviale. Soit donc t^* le minimum des t_i . Comme $A \in \mathcal{F}_{0+} \subset \mathcal{F}_{t^*}$ et que, par la propriété de Markov faible, $(\vec{B}_t)_{t \geq t^*}$ ne dépend de \mathcal{F}_{t^*} qu'au travers de \vec{B}_{t^*} , il nous suffit de vérifier que \vec{B}_{t^*} est indépendant de A . Soit donc $X \subset \mathbb{R}^d$ mesurable, nous allons montrer que $\{\vec{B}_{t^*} \in X\}$ est indépendant de A .

Soit $\varepsilon \in]0, t^*[$. Pour $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$, on pose :

$$\varphi(\varepsilon, \vec{x}) = \mathbb{P}(\vec{B}_{t^*} \in X | \vec{B}_\varepsilon = \vec{x}). \quad (18)$$

Comme on connaît explicitement les densités de transition du mouvement brownien (⁹), il est aisé de vérifier que φ est continue en $(0, 0)$ par le théorème de convergence dominée. Comme A est dans \mathcal{F}_ε , la propriété de Markov faible au temps ε permet d'écrire :

$$\mathbb{P}(A \text{ et } \vec{B}_t \in X) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \varphi(\varepsilon, \vec{B}_\varepsilon)] \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\xrightarrow{\text{CVD}}} \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{1}_A \varphi(0, \vec{0})}_{\mathbb{P}(\vec{B}_{t^*} \in X)}] = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(\vec{B}_{t^*} \in X). \quad (19)$$

C'est l'indépendance recherchée. □

Remarque 1.2.11. Le théorème 1.2.9 signifie que le mouvement brownien n'est pas amené à « faire des choix » à un instant précis. C'est une propriété très agréable qui se retrouve chez bon nombre de processus, **contrairement à l'autre loi de 0 – 1** (¹⁰) que nous allons maintenant énoncer.

Théorème 1.2.12. *La tribu \mathcal{F}^∞ est triviale.*

Démonstration. La démonstration la plus classique et la plus courte de ce théorème consiste à utiliser une transformation qui transforme \mathcal{F}_{0+} en \mathcal{F}^∞ . Je n'aime pas cette démonstration qui n'éclaire pas la généralité des phénomènes mis en jeu, aussi y ai-je préféré celle qui suit.

Soit A un événement de \mathcal{F}^∞ . Pour $t \geq 0$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$\psi(t, \vec{x}) = \mathbb{P}(A | \vec{B}_t = \vec{x}). \quad (20)$$

Nous allons montrer que $\psi(t, \cdot)$ est uniforme; en effet, un argument général nous permet d'affirmer que, p.s., $\psi(t, \vec{B}_t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathbb{1}_A$, d'où, notant $\Psi(t)$ la valeur de $\psi(t, \vec{x})$ pour tout \vec{x} , il s'ensuit que la fonction *déterministe* $\Psi(t)$ converge p.s. vers $\mathbb{1}_A$ quand t tend vers l'infini, ce qui n'est possible que si A est de probabilité triviale.

Soient donc $t \geq 0$ un instant et \vec{x}, \vec{y} deux vecteurs distincts. Notons H l'hyperplan médiateur de $[\vec{x}, \vec{y}]$ et posons τ le temps d'atteinte de H par le mouvement brownien après le temps t :

$$\tau = \int \{u \geq t; \vec{B}_u \in H\}. \quad (21)$$

On vérifie facilement que τ est un temps d'arrêt, et, grâce aux propriétés du mouvement brownien en dimension 1, que :

9. Ici on considère le cas d'un mouvement brownien standard, ou plus généralement le cas où la matrice C est non dégénérée. Si C est dégénérée, on peut contourner la difficulté en se restreignant à un certain sous-espace de \mathbb{R}^d , dans lequel on a un mouvement brownien non dégénéré (de dimension inférieure à d).

10. L'exemple le plus typique est celui du mouvement brownien dans l'espace hyperbolique, hélas nous n'aurons pas l'occasion de l'aborder dans cette série d'exposés.

Avis 1.2.13. τ est fini presque-sûrement.

Comme A ne dépend que du comportement du mobile après τ , la propriété de Markov forte nous donne :

$$\psi(t, \vec{x}) = \mathbb{E}[\psi(\tau, \vec{B}_\tau) | \vec{B}_t = \vec{x}]. \quad (22)$$

Mais, par symétrie du mouvement brownien, (τ, \vec{B}_τ) a la même distribution sous $\mathbb{P}(\cdot | \vec{B}_t = \vec{x})$ et sous $\mathbb{P}(\cdot | \vec{B}_t = \vec{y})$! Par conséquent, $\psi(t, \vec{x}) = \psi(t, \vec{y})$, CQFD. \square

Énonçons enfin des propriétés plus fines du mouvement brownien.

Théorème 1.2.14 (récurrence et transience). 1. Pour $d = 1$, presque-sûrement le mouvement brownien passe par tous les points de l'espace et y retourne toujours.

2. Pour $d = 2$, presque-sûrement le mouvement brownien visite tout ouvert de \mathbb{R}^2 et revient le visiter aussi tard qu'on veut. Par contre, presque-sûrement le mouvement brownien ne revient jamais en $\vec{0}$, et pour tout $\vec{x} \neq 0$, presque-sûrement le mouvement brownien ne passe jamais par \vec{x} .

3. Pour $d \geq 3$, presque-sûrement $|\vec{B}_t| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$, et l'adhérence de la trajectoire du mouvement brownien est d'intérieur vide.

Théorème 1.2.15. Presque-sûrement, le mouvement brownien est localement α -höldérien pour tout $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, et n'est pas localement α -höldérien pour tout $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Remarque 1.2.16. Le théorème 1.2.15 donc que la trajectoire du mouvement brownien est très « découpée ». L'étude des mouvements browniens amène d'ailleurs rapidement à évaluer des dimensions fractales, et c'est ainsi pour sa démonstration que l'enveloppe extérieure du mouvement brownien a pour dimension fractale $4/3$ en dimension 2, entre autres, que W. Werner a obtenu la médaille Fields en 2006.

1.3 Mouvement brownien et laplacien

Le mouvement brownien (standard) de \mathbb{R}^d est intimement lié au laplacien, et j'ose même dire qu'on ne comprend vraiment le laplacien qu'à l'aide du mouvement brownien. En fait, les liens entre mouvement brownien et laplacien, comme nous allons le voir, sont doubles : d'une part, l'opérateur $\frac{1}{2}\Delta$ est le *générateur* du mouvement brownien, en lien avec l'équation de Laplace, d'autre part c'est aussi son *générateur dual* par rapport à la mesure de Lebesgue, en lien avec l'équation de la chaleur.

1.3.1 Générateur du mouvement brownien

Définition 1.3.1 (générateur d'un processus markovien). Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus (au moins càd-làg) à valeurs dans un espace (polonais) \mathcal{E} , markovien, i.e. vérifiant les propriétés de Markov (1.2.1) et (1.2.3). Ce processus définit alors un semigroupe d'opérateurs $(P^t)_{t \geq 0}$ agissant sur $L^\infty(\mathcal{E})$ par :

$$\mathbb{P}^t f(x) = \mathbb{E}[f(X_t) | X_0 = x]. \quad (23)$$

On appelle générateur du processus markovien X l'opérateur \mathcal{L} défini formellement par :

$$\mathcal{L}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P^h f(x) - f(x)}{h}. \quad (24)$$

Moralement, le générateur de f dit de combien $f(X)$ a tendance à augmenter lorsqu'on se trouve au point x .

Exemple 1.3.2. Soit un processus markovien à valeurs dans un espace à deux points $\{a, b\}$: le processus saute de a vers b avec une loi exponentielle ⁽¹¹⁾ de paramètre α , et de b vers a avec une loi exponentielle de paramètre β . Le générateur \mathcal{L} de ce processus associe à une fonction $f : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $\mathcal{L}f : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{L}f(a) = \alpha(f(b) - f(a)); \\ \mathcal{L}f(b) = \beta(f(a) - f(b)). \end{cases} \quad (25)$$

La donnée d'un processus markovien, nous l'admettrons, est en fait équivalente à celle de son générateur : cette notion jette donc un pont essentiel entre probabilités et analyse.

Proposition 1.3.3. *Le générateur du mouvement brownien standard de \mathbb{R}^d est $\frac{1}{2}\Delta$.*

Démonstration. Soit $f \in C^3(\mathbb{R}^d)$, avec f''' bornée. Soit $\vec{\Xi}$ un vecteur aléatoire gaussien réduit. Alors la loi de \vec{B}_t sachant \vec{B}_0 , est celle de $\vec{B}_0 + t^{1/2}\vec{\Xi}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(\vec{B}_t) | \vec{B}_0 = x] &= \mathbb{E}[f(\vec{B}_0) + t^{1/2}\vec{\Xi}] \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{=} \mathbb{E} \left[f(\vec{B}_0) + t^{1/2} \vec{\nabla}_{\vec{B}_0} f \cdot \vec{\Xi} + \frac{1}{2} t \nabla^2_{\vec{B}_0} f(\vec{\Xi} \otimes \vec{\Xi}) + O(t^{3/2}) |\vec{\Xi}|^3 \right] \\ &= f(\vec{B}_0) + t^{1/2} \vec{\nabla}_{\vec{B}_0} f \cdot \underbrace{\mathbb{E}[\vec{\Xi}] = \vec{0}} + \frac{1}{2} t \nabla^2_{\vec{B}_0} f \underbrace{\mathbb{E}[(\vec{\Xi} \otimes \vec{\Xi})] = \mathbf{I}_d} + O(t^{3/2}) \\ &= f(\vec{B}_0) + t \left(\Delta_{\vec{B}_0} f + O(t^{1/2}) \right), \quad (26) \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

1.3.2 Résolution du problème de Dirichlet

Définition 1.3.4. *Pour \mathcal{L} le générateur d'un processus markovien, on appelle fonction \mathcal{L} -harmonique toute fonction f telle que $\mathcal{L}f = 0$.*

Une fonction \mathcal{L} -harmonique est donc une fonction vérifiant le

Lemme 1.3.5. *Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus markovien de générateur \mathcal{L} et f une fonction \mathcal{L} -harmonique bornée, alors on a pour tous $0 \leq t \leq t'$, pour tout $x \in E$:*

$$\mathbb{E}[f(X_{t'}) | X_t = x] = f(x). \quad (27)$$

11. Les lois de sauts sont nécessairement exponentielles à cause du caractère markovien du processus qui oblige les sauts à être sans mémoire.

On dit que le processus aléatoire $f(X_t)$ est une *martingale*. Le lemme 1.3.5 est pratiquement évident à partir de la définition 1.3.1. Ce lemme a un corollaire puissant qui lui est ce que le corollaire 1.2.3 était à la proposition 1.2.1 :

Corollaire 1.3.6. *Si f est \mathcal{L} -harmonique et bornée, pour τ un temps d'arrêt fini p.s. :*

$$\mathbb{E}[f(X_\tau)|X_0 = x] = f(x). \quad (28)$$

Nous allons maintenant nous apercevoir que le mouvement brownien résout tout naturellement le problème de Dirichlet. Soit en effet U un ouvert borné de \mathbb{R}^d et \bar{f} une fonction définie sur ∂U et continue. Le problème de Dirichlet consiste à trouver une fonction f sur \bar{U} qui soit harmonique (au sens usuel) sur U et qui coïncide avec \bar{f} sur ∂U tout en étant continue aux points de ∂U . L'analyse nous dit qu'une telle fonction f est unique. Supposons donc que nous connaissions f . Soit un mouvement brownien sur \mathbb{R}^d et définissons τ comme le *temps de sortie* de U :

$$\tau = \inf\{t \geq 0; X_t \notin U\}. \quad (29)$$

τ est le moment où le mouvement brownien quitte U et, par continuité du mouvement brownien, X_τ est donc un point de ∂U (quand le mouvement brownien part d'un point de U). Il est facile de vérifier que τ est un temps d'arrêt ; le corollaire 1.3.6 nous donne alors :

Proposition 1.3.7. *Pour tout $x \in U$, $f(x) = \mathbb{E}[f(X_\tau)]$.*

Nous sommes donc arrivés à exprimer f sur U en fonction de ses valeurs sur ∂U : le problème de Dirichlet est résolu de manière « explicite ».

Remarque 1.3.8. Réciproquement, on démontre simplement que, si U est un ouvert de \mathbb{R}^d et $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus continu de générateur \mathcal{L} , pour \bar{f} une fonction définie sur ∂U , la fonction $\mathbb{E}[X_\tau|X_0 = \cdot]$ est \mathcal{L} -harmonique et vaut \bar{f} sur ∂U .

Remarque 1.3.9. Vous avez peut-être remarqué que j'ai passé sous silence la question de la continuité de f au bord de \bar{U} . Cette continuité paraît naturelle vu la façon dont f est définie, mais on peut se demander si elle est toujours vraie. En fait, on démontre que ce n'est le cas que si ∂U est suffisamment régulier. Plus précisément, la condition la plus usuelle qu'on utilise est la « condition de cône » de Zaremba : on veut qu'en tout point \bar{x} de ∂U , il existe un demi-cône d'intérieur non vide de sommet \bar{x} , qui soit entièrement à l'extérieur de \bar{U} . Si la condition de cône n'est pas respectée, la fonction $\mathbb{E}[X_\tau|X_0 = \cdot]$ peut ne pas être continue au bord. En fait, la condition nécessaire et suffisante pour assurer la continuité au bord, indépendamment de \bar{f} , est celle-ci : tout point \bar{x} de ∂U doit être *régulier*, ce qui signifie que, pour un mouvement brownien issu de \bar{x} :

$$\text{p.s.} \quad \inf\{t > 0; X_t \notin U\} = 0. \quad (30)$$

En dimension 2, ainsi, un point isolé de ∂U ne sera pas régulier. Plus fort : en dimension 3, la pointe d'une « aiguille » d'équation en coordonnées cylindriques $r = e^{-1/z}$ n'est pas régulière non plus. On vérifie que, dans chacun de ces cas, la condition de cône n'est pas vérifiée (voir la figure 4).

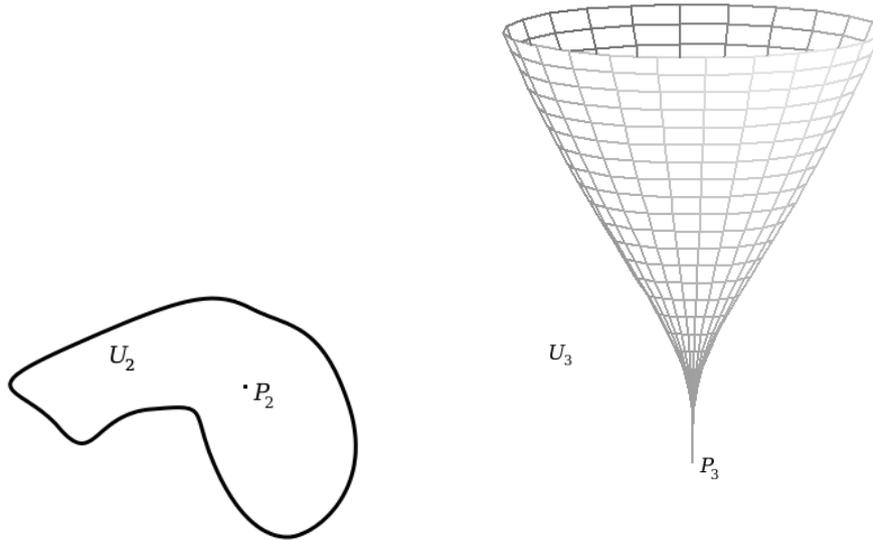


FIGURE 4 – Les ouverts U_2 et U_3 ne sont respectivement pas réguliers en P_2 et P_3 .

1.3.3 Une application : transience du mouvement brownien en dimension 3.

Nous allons utiliser les résultats du § 1.3.2 pour démontrer la transience du mouvement brownien en dimension 3. Plus précisément, nous allons nous concentrer sur la démonstration que, pour $\vec{x} \neq \vec{0}$, presque-sûrement le mouvement brownien n'a pas \vec{x} dans son adhérence, i.e. :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \left| \vec{x} - \vec{B}_t \right| > \varepsilon. \quad (31)$$

Posons $R_0 = |\vec{x}|$. Pour $R > R_0$ et $\varepsilon \in]0, R_0[$, on va calculer la probabilité, notée $p(\varepsilon, R)$, que le mouvement brownien s'approche à une distance ε du point \vec{x} avant de s'en éloigner de la distance R . On note U l'ensemble des points situés à une distance de \vec{x} comprise entre ε et R (U a donc une forme de cerise dénoyautée). Nous définissons une fonction \bar{f} sur ∂U , qui vaut 1 sur $\partial B(\vec{x}, \varepsilon)$ — la surface du noyau de la cerise — et 0 sur $\partial B(\vec{x}, R)$ — la peau de la cerise. Notant τ le temps de sortie de U , c'est un simple jeu d'écritures que d'affirmer :

$$p(\varepsilon, R) = \mathbb{E} \left[\bar{f}(\vec{B}_\tau) \right]. \quad (32)$$

Mais, dans ce cas précis pour U , nous savons résoudre *exactement* le problème de Dirichlet. Plus précisément, la fonction suivante est harmonique et interpole \bar{f} , où on a noté ρ pour $|\vec{y} - \vec{x}|$:

$$f(\vec{y}) = \frac{\varepsilon R}{(R - \varepsilon)\rho} - \frac{\varepsilon}{R - \varepsilon}. \quad (33)$$

Comme la solution du problème de Dirichlet est unique, c'est donc que $f(\vec{y})$ coïncide avec $\mathbb{E} \left[\bar{f}(\vec{B}_\tau) \mid \vec{B}_0 = \vec{y} \right]$. En particulier :

$$p(\varepsilon, R) = \frac{\varepsilon(R - R_0)}{(R - \varepsilon)R_0}. \quad (34)$$

Supposons d'abord ε fixé. Notons $A_{\varepsilon,R}$ l'événement « le mouvement brownien s'approche à une distance ε du point \vec{x} avant de s'en éloigner de la distance R », de sorte que $p(\varepsilon, R) = \mathbb{P}(A_{\varepsilon,R})$. Il est clair que, pour $R \leq R'$, $A_{\varepsilon,R} \subset A_{\varepsilon,R'}$, (et, en effet, (34) montre que $p(\varepsilon, \cdot)$ est croissante). Par passage à la limite dénombrable⁽¹²⁾, il s'ensuit que l'événement $A_{\varepsilon,\infty}$, égal par définition à $\bigcup_{R>R_0}^{\nearrow} A_{\varepsilon,R}$, a pour probabilité

$$p(\varepsilon, \infty) = \lim_{R \nearrow \infty} p(\varepsilon, R) = \frac{\varepsilon}{R_0}. \quad (35)$$

Or, par continuité du mouvement brownien, l'événement $A_{\varepsilon,\infty}$ signifie que le mouvement brownien approche au moins une fois \vec{x} à une distance inférieure à ε . Pour ε suffisamment petit, cette probabilité peut être rendue aussi petite qu'on veut, d'où le résultat.

1.3.4 Générateur dual

Une chose agréable avec le mouvement brownien est que ses lois de transition sont à densité par rapport à la mesure de Lebesgue :

Définition 1.3.10. *On dit qu'un processus markovien $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue dx s'il existe une fonction*

$$p : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (t, x, y) \mapsto p^t(x, y) \quad (36)$$

telle que les lois de transition aient pour densité $p^t(x, \cdot)$:

$$d\mathbb{P}(X_t = y | X_0 = x) = p^t(x, y) dy. \quad (37)$$

Dans ces conditions, on peut imaginer une assemblée de particules browniennes, dont le nombre est supposé presque infini : au cours de leur évolution, la densité locale de ces particules $\rho_t(\cdot)$ par rapport à la mesure de Lebesgue restera finie. On se demande alors quelle est la loi de l'évolution — déterministe, en vertu de la loi des grands nombres — de la fonction ρ_t . À cause du caractère markovien de l'évolution, il s'agira d'une équation différentielle linéaire du premier ordre en temps. Laquelle ? Soit f une fonction-test, l'évolution de ρ_t sera telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho_t(x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_0(x) \mathbb{E}[f(X_t) | X_0 = x] dx \quad (38)$$

Dérivons par rapport au temps :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \rho(x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) \mathcal{L}f(x) dx. \quad (39)$$

Pour faire ressortir la fonction f dans l'intégrale au second membre, on utilise naturellement le concept de dualité dans l'espace de Hilbert $L^2(dx)$:

12. D'où notre remarque sur la relation d'ordre : l'intersubsection que nous considérons est non dénombrable, mais se ramène à une intersubsection dénombrable puisque la cofinalité de l'ordre sur \mathbb{R}_+ est ω — pour le dire en termes pompeux.

Définition 1.3.11. Pour \mathcal{L} un opérateur sur $L^2(dx)$, on note \mathcal{L}^* l'opérateur adjoint caractérisé par, pour toutes fonctions f et g :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathcal{L}^*g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\mathcal{L}f(x)dx. \quad (40)$$

Il s'ensuit finalement que :

Proposition 1.3.12. La densité ρ de particules obéit à l'équation d'évolution :

$$\partial_t\rho = \mathcal{L}^*\rho. \quad (41)$$

Dans le cas du mouvement brownien, puisque $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Delta$, on a, d'après les formules d'intégration par parties, $\mathcal{L}^* = \frac{1}{2}\Delta$ (¹³). Ainsi, ρ évolue selon l'équation de la chaleur. C'était physiquement attendu, puisque l'équation de la chaleur régit les phénomènes de diffusion (de particules, de chaleur...), où l'on peut considérer que les objets diffusants suivent des marches aléatoires indépendantes, qui, vues de loin, sont browniennes.

1.3.5 Application : conditions au bord de Von Neuman en dimension 1

Nous allons voir dans ce paragraphe comment cette interprétation « physique » de l'équation de la chaleur peut donner naturellement la solution à certains problèmes non triviaux d'équations aux dérivées partielles.

Soit $[a, b]$ un segment non trivial de \mathbb{R} , $c \in]a, b[$. On s'intéresse au problème physique suivant : une assemblée de particules browniennes indépendantes, initialement concentrées au point c , diffuse dans le segment $[a, b]$ sans pouvoir en sortir.

Quelle est la traduction mathématique de ce problème ? Sur $]a, b[$, la densité ρ de l'assemblée de particules évoluera selon l'équation de la chaleur. Au bord, l'interdiction pour les particules de sortir se traduit par l'absence de flux de particules. On pourrait calculer facilement que celui-ci est proportionnel à $\partial_x\rho$, de sorte que nous sommes amenés à résoudre l'ÉDP :

$$\begin{cases} \rho(0, x) = \delta_c ; \\ \partial_t\rho = \frac{1}{2}\partial_x^2\rho \quad \text{sur }]a, b[; \\ \forall t \geq 0 \quad \partial_x\rho(t, a) = \partial_x\rho(t, b) = 0. \end{cases} \quad (42)$$

A priori, cette équation n'est pas facile. Mais tout devient plus simple si nous cherchons à suivre une particule à la trace. L'évolution de la particule, déjà, est brownienne sur $]a, b[$. Comment se comporte-t-elle au bord ? Eh bien, puisque le mouvement brownien est symétrique par retournement de l'axe des x (cf. proposition 1.2.4), on peut imaginer que tout se passe comme si on avait « replié » la droite réelle sur le segment $[a, b]$; concrètement :

Définition 1.3.13. On définit la fonction de pliage $\psi : \mathbb{R} \rightarrow [a, b]$ par $\psi(x) = x - 2n(b-a)$ si $x \in [a + 2n(b-a), b + 2n(b-a)]$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et $\psi(x) = (b+a) - (x - (2n+1)(b-a))$ si $x \in [a + (2n+1)(b-a), b + (2n+1)(b-a)]$. Voir aussi la figure 5.

13. Pour moi, il ne faut rien voir de plus qu'une coïncidence amusante dans l'égalité entre \mathcal{L} et \mathcal{L}^* .

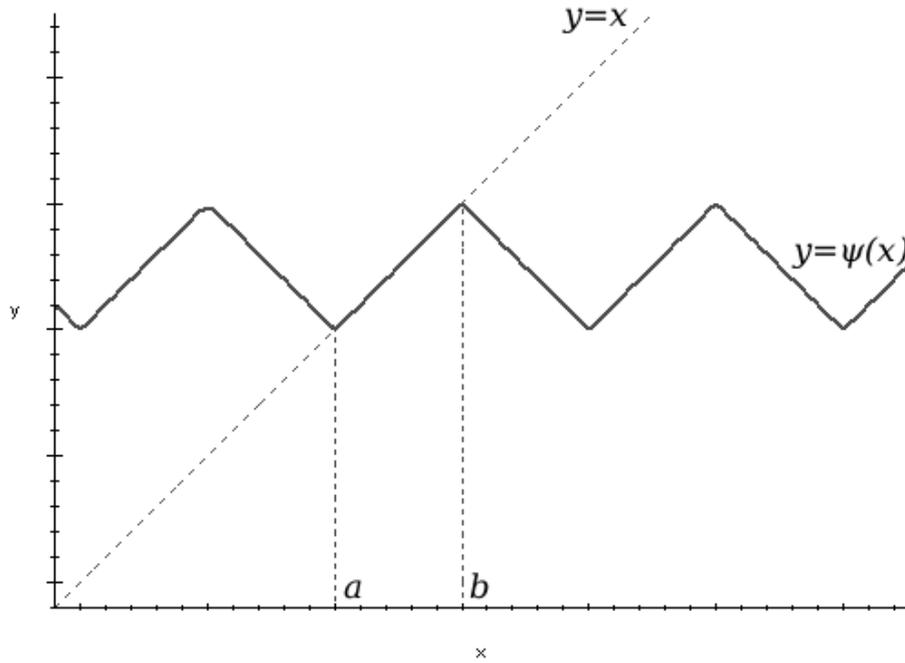


FIGURE 5 – La fonction ψ

Alors, si $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien issu de c , la position de la particule à l'instant t sera donné par $\psi(B_t)$. Comme par ailleurs on connaît parfaitement la répartition statistique de B_t et la fonction ψ , on arrive à :

Théorème 1.3.14. *L'(unique) solution de l'équation (42) est donnée par :*

$$\rho(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(x+2n(b-a)-c)^2}{2t}} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(b+a)-(x+(2n+1)(b-a))-c)^2}{2t}} \right\}. \quad (43)$$

Remarque 1.3.15. Une fois de plus, j'ai passé une escroquerie énorme sous le tapis. *In fine*, en effet, j'ai déclaré que la condition au bord revenait à réfléchir le mouvement brownien en a et en b . C'est vrai, mais en réalité dès que la dimension devient plus grande que 1, il peut exister d'autres façons de réfléchir le mouvement brownien, i.e. des réflexions *non orthogonales* ! Dans ces situations, chaque fois qu'elle touche le bord la particule est (infinitésimalement) déviée dans une direction parallèle au bord, et cela conduit à une loi différente pour la trajectoire de la particule réfléchie ⁽¹⁴⁾. Mais en dimension 1, il n'existe qu'une façon de réfléchir la particule au bord, et par conséquent celle que nous avons décrite est nécessairement la bonne.

14. Que des déviations infinitésimales finissent par avoir un effet notable est, pour moi du moins, assez contre-intuitif. Pour mieux cerner ces réflexions non orthogonales, il nous faudrait parler de *temps locaux*, mais cela nous emmènerait trop loin. . .

2 Calcul stochastique

2.1 Concept de martingale

Pour parler de calcul stochastique, il est absolument nécessaire de connaître le concept de martingale, ce que cette section se propose de faire.

☛ *Dans cet exposé, les martingales considérées seront toujours des martingales continues indexées par \mathbb{R}_+ .*

Pour parler de martingales, nous devons utiliser le vocabulaire des filtrations : lorsqu'on considère un processus aléatoire dépendant du temps (en l'occurrence, indexé par \mathbb{R}_+), un observateur qui ne connaît rien du processus au départ en acquiert l'information au fur et à mesure. D'où la

Définition 2.1.1. *On appelle filtration une suite croissante de tribus indexées par le temps $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, telles que \mathcal{F}_t représente l'information acquise au temps t . Pour un processus $(X_t)_{t \geq 0}$, la filtration canonique associée à X est donnée par*

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_u; u \leq t). \quad (44)$$

Définition 2.1.2. *Une martingale est un processus $(M_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R} qui n'a tendance, ni à croître, ni à décroître : pour tous $t \leq u$, on a :*

$$\mathbb{E}[M_u | \mathcal{F}_t] = M_t. \quad (45)$$

Par exemple, le mouvement brownien nous permet de définir de nombreuses martingales continues :

Proposition 2.1.3. *Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien unidimensionnel, alors :*

1. $(B_t)_{t \geq 0}$ est une martingale ;
2. $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$ est une martingale (martingale quadratique) ;
3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(e^{aB_t - a^2 t/2})_{t \geq 0}$ est une martingale (martingales exponentielles).

Démonstration. Pour $t \leq u$, on sait que la loi conditionnelle de B_u sachant B_t est $B_t + (u - t)^{1/2} \xi$, où ξ est gaussienne réduite. Par conséquent, le n° 1 signifie que $\mathbb{E}[B_u + (u - t)^{1/2} \xi] = B_t$, qui est vrai car $\mathbb{E}[\xi] = 0$, le n° 2 signifie que $\mathbb{E}[(B_u + (u - t)^{1/2} \xi)^2 - t] = B_t^2 - t$, qui découle de $\mathbb{E}[\xi] = 0$ et $\mathbb{E}[\xi^2] = 1$, et le n° 3 se ramène à vérifier la relation $\mathbb{E}[e^{a\xi}] = e^{a^2/2}$. \square

Un théorème très puissant sur les martingales est l'inégalité de Doob, qui permet de contrôler *globalement* une martingale à partir de sa valeur *terminale* :

Théorème 2.1.4 (Doob). Soit $(M_t)_{t \in [0, T]}$ une martingale continue, où T peut aussi bien être une constante qu'un temps d'arrêt (avec, dans ce dernier cas, une hypothèse d'uniforme intégrabilité cruciale). Notons $\|M\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} |M_t|$; alors, si M_T est une variable aléatoire de classe L^2 ⁽¹⁵⁾, $\|M\|_\infty$ l'est aussi, et

$$\mathbb{E}[\|M\|_\infty^2] \leq 4\mathbb{E}[|M_T|^2]. \quad (46)$$

2.2 Intégration contre le mouvement brownien

2.2.1 Motivations

Avant tout, rappelons le concept d'intégrale de Stieltjes. Pour μ une mesure *signée* sur \mathbb{R} , supposée ici sans atome, μ peut être décrite par une fonction $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \mu([-\infty, x])$. Dans ces conditions, pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue (ou, plus généralement, mesurable) et bornée, on a coutume de noter $\int f dm$ pour $\int f d\mu$, puisque $\mu([x, x + dx])$ est l'accroissement de m entre x et $x + dx$.

Il est assez courant en physique de voir des intégrales arriver directement sous la forme de Stieltjes (par exemple, la travail d'une force \vec{F} s'écrit $\int \vec{F} \cdot d\vec{x}$, où x est la position de la particule), et on est ainsi amené à se demander s'il est possible d'intégrer contre un mouvement brownien. Hélas...

Proposition 2.2.1. *Le mouvement brownien n'est pas l'intégrale d'une mesure sur \mathbb{R} .*

Démonstration. En effet, si m est l'intégrale d'une mesure signée μ , alors m est à variations bornées, càd. que toutes les quantités

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|, \quad x_0 < x_1 < \dots < x_n, n \in \mathbb{N}^* \quad (47)$$

sont bornées par une même valeur M — à savoir, la masse totale de $|\mathrm{d}\mu|$ ⁽¹⁶⁾. Or, presque sûrement le mouvement brownien n'est à variations bornées sur aucun segment $[a, b]$, comme nous l'allons montrer. Pour fixer les idées prenons $[a, b] = [0, 1]$, et notons V la variation totale du mouvement brownien sur ce segment. Par définition, pour $n \in \mathbb{N}^*$ arbitraire,

$$V \geq \sum_{i=1}^n \left| B_{\frac{i}{n}} - B_{\frac{i-1}{n}} \right|, \quad (48)$$

ou encore, puisque nous connaissons la loi de $(B_0, B_{1/n}, \dots, B_1)$:

$$V \geq \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{i=1}^n |\xi_i|, \quad (49)$$

où les ξ_i sont des v.a. normales réduites indépendantes. Comme les $|\xi_i|$ ont une espérance E strictement positive, le loi des grands nombres affirme que, pour n suffisamment grand,

15. En fait, il existe une inégalité de Doob L^p pour tout $p \in]1, \infty]$, mais ici le cas L^2 suffit à notre cause.

16. Précisons qu'en fait, il suffit que μ soit une mesure signée *locale* pour pouvoir définir le concept d'intégrale de Stieltjes, auquel cas il ressort que f doit être à variations *localement* bornées.

$\sum_{i=1}^n |\xi_i|$ est plus grand que nE' , pour un $E' \in]0, E[$ arbitraire, avec une probabilité aussi grande que l'on veut. On en tire que V est plus grand que $E'n^{1/2}$ avec la même probabilité, donc, en faisant tendre n vers l'infini, V est infini presque-sûrement. \square

Question 2.2.2. *Peut-on quand même donner une définition sensée de $\int f dB$, où f est une fonction mesurable et $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien ? f doit pouvoir dépendre de la trajectoire du mouvement brownien, càd. que, si on note ω la réalisation du mouvement brownien, f peut être de la forme $f(t, \omega)$ (¹⁷).*

Il y a un cas où on n'hésite pas sur la définition à donner à l'intégrale : si, en effet, il existe presque-sûrement des instants $0 = t_0(\omega) < t_1(\omega) < \dots < t_{n_\omega-1}(\omega) < t_{n_\omega}(\omega) = t$ tels que, sur $[t_{i-1}(\omega), t_i(\omega)[$, f vaille $a_i(\omega)$, alors on veut poser :

$$\int_0^t f(t, \omega) dB_t = \sum_{i=1}^{n_\omega} a_i(\omega) (B_{t_i(\omega)} - B_{t_{i-1}(\omega)}). \quad (50)$$

Par conséquent, toute définition ultérieure de $\int f dB$ devra vérifier (50).

On aurait deux *desiderata* pour notre intégrale stochastique :

1. Si $f(t)$ est \mathcal{F}_t -mesurable, dans le mesure où dB_t est centré et indépendant de \mathcal{F}_t , on veut que le processus $\left(\int_0^t f(\omega, u) dB_u \right)_{t \geq 0}$ soit une martingale.
2. Par analogie avec le cas des intégrales de Stieltjes, si pour une certaine fonction g , f est de la forme $g'(B_t)$, on veut $\int_0^t g'(B_u) dB_u = g(B_t) - g(B_0)$.

Hélas...

Avis 2.2.3. *Les conditions 1 et 2 ci-dessus sont incompatibles.*

Démonstration. Si $f(\omega, t) = g'(B_t)$, pour que les conditions 1 et 2 soient vérifiées il faudrait que $(g(B_t))_{t \geq 0}$ soit une martingale, ce qui est clairement impossible si 0 est le minimum absolu strict de g . \square

Mais ne paniquons pas : en fait, les deux voies exposées ci-dessus vont simplement aboutir à deux définitions différentes de l'intégrale. La condition n° 1 aboutit à l'*intégrale d'Itô*, et la condition n° 2 à l'*intégrale de Stratonovitch*. La définition plus ou moins informelle que nous allons donner de ces deux intégrales aura au moins l'avantage d'éclairer le parallélisme direct entre les deux constructions, qui n'apparaît pas toujours dans les ouvrages de référence. Encore un mot : l'intégrale « par défaut » qu'utilisent les probabilistes est l'intégrale d'Itô. Mais il existe de nombreux cas où c'est l'intégrale de Stratonovitch qui apparaît pertinente ! Le lecteur est donc invité à garder en mémoire l'idée suivante :

☛ *Il existe deux façons de définir l'intégrale stochastique, et selon les contextes l'emploi de l'une ou l'autre est préférable.*

17. Nous ne rentrerons pas ici dans la question — pourtant importante ! — du type précis de fonctions f contre lesquelles l'intégration est possible. Mais il faut savoir qu'apparaît naturellement une condition dite de *mesurabilité progressive*, qui exprime en substance que $f(\cdot, t)$ est \mathcal{F}_t -mesurable, et que $f(\omega, \cdot)$ est mesurable presque-sûrement. D'autre part, les conditions d'intégrabilité à respecter par f ne sont pas les conditions L^1 habituelles, mais des conditions de type L^2 . En général, on demande à f d'être localement L^∞ presque-sûrement.

2.2.2 Intégrale d'Itô

Supposons donnée une fonction aléatoire $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, continue p.s., avec $f(t)$ \mathcal{F}_t -mesurable (on dit sur ce point que f est *adaptée* à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$). Par une manœuvre ordinaire de troncature, on peut supposer que p.s. les fonctions $f(t)$ ont un module de continuité commun h . On va simplement essayer d'écrire l'intégrale stochastique comme une limite de sommes de Riemann : soient $\sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \dots$ des subdivisions de plus en plus fines de $[0, T]$, notées $\sigma_i = \{0 = t_0^i < t_1^i < \dots < t_{n_i}^i = T\}$, dont le pas $|\sigma_i| = \max_j (t_j^i - t_{j-1}^i)$ tend vers 0 ; on pose, si cette limite existe :

$$\int_0^T f(t)dB_t = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_i} f(t_{j-1}^i)(B_{t_j^i} - B_{t_{j-1}^i}). \quad (51)$$

On peut définir de même $\int_0^u f(t)dB_t$ pour tout $u \in [0, t]$. Comme à chaque étape i , l'objet qu'on considère est une martingale, il en sera de même à la limite, conformément à notre souhait. Encore faut-il prouver que la limite existe...

Posons $S_i = \sum_{j=1}^{n_i} f(t_{j-1}^i)(B_{t_j^i} - B_{t_{j-1}^i})$; nous allons démontrer que, p.s., S_i converge au sens de la norme L^2 (il s'ensuit que, pour une sous-suite $(S_{i'})_{i'}$, bien choisie, la convergence est presque-sûre). Pour $i_1 < i_2$, notons

$$\{t_0^{i_2}, t_1^{i_2}, \dots, t_{n_{i_2}}^{i_2}\} = \{t_{0,0} = t_0^{i_1}, t_{0,1}, \dots, t_{0,m_0-1}, t_{0,m_0} = t_{1,0} = t_1^{i_1}, t_{1,1}, \dots, t_{n_{i_1}-1, m_{n_{i_1}}} = T\}. \quad (52)$$

On a

$$\begin{aligned} S_{i_2} - S_{i_1} &= \\ &= \sum_{j=1}^{n_{i_1}} \sum_{k=1}^{m_j-1} f(t_{j-1, k-1}) \left[B_{t_{j-1, k}} - B_{t_{j-1, k-1}} \right] - \sum_{j=1}^{n_{i_1}} f(t_{j-1, 0}) \left[B_{t_{j-1, m_j-1}} - B_{t_{j-1, 0}} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{n_{i_1}} \sum_{k=1}^{m_j-1} \left[f(t_{j-1, k-1}) - f(t_{j-1, 0}) \right] \cdot \left[B_{t_{j-1, k}} - B_{t_{j-1, k-1}} \right], \quad (53) \end{aligned}$$

donc par indépendance des accroissements du mouvement brownien, $S_{i_2} - S_{i_1}$ est une variable aléatoire gaussienne dont la variance est majorée par $|\sigma_{i_1}|t$. Ainsi, la suite des variables aléatoires $(S_i)_i$ est de Cauchy, ce qu'on voulait.

Remarque 2.2.4. L'intégrale stochastique n'a pas seulement d'intérêt de par sa valeur *ponctuelle*, à savoir $\int_0^T f(t)dB_t$, c'est également un *processus* $u \mapsto \int_0^u f(u)dB_u$. Ici, nous avons démontré la convergence ponctuelle des sommes de Riemann, mais l'inégalité de Doob (théorème 2.1.4) nous affirme que la convergence des processus en résulte automatiquement.

Remarque 2.2.5. On voit donc apparaître l'intégrale d'Itô comme une limite L^2 . Il faudra donc garder à l'esprit que l'intégrale stochastique n'est définie que *modulo l'identité p.s.*

2.2.3 Intégrale de Stratonovitch

Ce qui « choque » dans l'approche de l'intégrale d'Itô comme limite de sommes de Riemann que nous venons de faire dans le § 2.2.2, c'est que la valeur de f que nous prenons pour faire l'intégration sur $[t_{i-1}, t_i]$ est $f(t_{i-1})$, alors que c'est un fait bien connu en calcul numérique que dans une telle situation, pour les intégrales ordinaires, l'écart entre la somme de Riemann et l'intégrale véritable est en $O(|\sigma_i|)$ mais que, si on avait évalué f en $\frac{t_{i-1}+t_i}{2}$, la convergence se ferait en $O(|\sigma_i|^2)$. Il semblerait donc plus juste de définir l'intégrale stochastique comme — si elle existe —

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_i} f\left(\frac{t_{j-1}^i + t_j^i}{2}\right) (B_{t_j^i} - B_{t_{j-1}^i}). \quad (54)$$

Appelons *intégrale de Stratonovitch cette intégrale*, et notons-la $\int_0^t f \circ dB_t$ pour la différencier de l'intégrale d'Itô. Précisons tout de suite que nous n'étudierons pas ici la question de la convergence de l'expression (54) ⁽¹⁸⁾; dans la pratique, les ouvrages préfèrent définir l'intégrale de Stratonovitch à partir de l'intégrale d'Itô et de la formule d'Itô.

Nous allons maintenant montrer que l'intégrale de Stratonovitch répond à la condition n° 2 énoncée au § 2.2.1. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Appelons α -intégrale stochastique, et notons $\int f'(B_t) \circ_\alpha dB_t$ la limite, supposée exister,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_i} f'(B_{(1/2-\alpha)t_{j-1}^i + (1/2+\alpha)t_j^i}) (B_{t_j^i} - B_{t_{j-1}^i}), \quad (55)$$

et calculons $\int f' \circ_\alpha dB_t - (f(B_t) - f(B_0))$.

On essaye de passer à la limite pour calculer $\int f' \circ_\alpha dB_t - (f(B_t) - f(B_0))$; pour ce faire, on remarque que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_i} f'(B_{(1/2-\alpha)t_{j-1}^i + (1/2+\alpha)t_j^i}) (B_{t_j^i} - B_{t_{j-1}^i}) - (f(B_t) - f(B_0)) \\ &= \sum_{j=1}^{n_i} \left(f'(B_{(1/2-\alpha)t_{j-1}^i + (1/2+\alpha)t_j^i}) (B_{t_j^i} - B_{t_{j-1}^i}) - (f(B_{t_j^i}) - f(B_{t_{j-1}^i})) \right) \\ & \stackrel{(\text{Taylor})}{=} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\alpha (B_{t_j^i} - B_{t_{j-1}^i})^2 f''\left(B_{\frac{t_{j-1}^i + t_j^i}{2}}\right) + o((B_{t_j^i} - B_{t_{j-1}^i})^2) \right). \quad (56) \end{aligned}$$

Admettons que le terme résiduel s'élimine effectivement à la limite. Comme les $(B_{t_j^i} - B_{t_{j-1}^i})^2$ sont indépendants, d'espérances respectives $t_j^i - t_{j-1}^i$, une version améliorée de la loi des grands nombres donne finalement que :

$$\int f' \circ_\alpha dB_t - (f(B_t) - f(B_0)) = \alpha \int f''(B_t) dt. \quad (57)$$

18. la condition naturelle pour intégrer f contre B serait que f soit une semimartingale (voir plus loin), ce qui est légèrement plus restrictif que pour l'intégrale d'Itô.

Dans le cas de l'intégrale de Stratonovitch, où $\alpha = 0$, cela montre que la formule d'intégration par parties est bien valide. Dans le cas de l'intégrale d'Itô, où $\alpha = -1/2$, ce résultat est appelé *formule d'Itô* :

Théorème 2.2.6 (Itô).

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_u)dB_u + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_u)du. \quad (58)$$

2.3 Calcul stochastique général

Dans cette section, nous allons voir quel est le cadre le plus général contre lequel définir l'intégrale stochastique, ce qui nous amènera au concept de semimartingale, et à l'introduction du formalisme des différentielles stochastiques. Nous verrons également le théorème de Lévy qui nous dit qu'en fait, les martingales continues ressemblent beaucoup au mouvement brownien.

2.3.1 Variation quadratique d'une martingale continue

Dans la formule d'Itô, nous avons vu apparaître un terme supplémentaire par rapport à la formule d'intégration par parties usuelle. Une observation attentive révèle que l'existence de ce terme est due au fait que, pour une subdivision très fine $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$, la variation quadratique $\sum_{i=1}^N (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$ n'est pas « minuscule » (comme on s'y attendrait par analogie avec le cas des processus à variation finie), mais converge vers une certaine valeur, en l'occurrence la constante $t_N - t_0$.

Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ une martingale continue. Alors, notant formellement $M_{t+dt} = M_t + dM_t$, on a $M_{t+dt}^2 - M_t^2 = M_t dM_t + (dM_t)^2$. Dans cette expression, la grandeur $M_t dM_t$ est centrée conditionnellement à \mathcal{F}_t par la propriété de martingale, et dM_t^2 est un « élément de variation quadratique » de M , de sorte qu'on a envie d'écrire $M_u^2 - M_0^2 = \int_0^u M_t dM_t + \int_0^u (dM_t)^2$, où $\int_0^u M_t dM_t$ est une martingale. Eh bien, c'est exactement cela !

Proposition 2.3.1. *Soit M une martingale continue, alors il existe un unique processus croissant $\langle M \rangle$ et une unique martingale \widetilde{M} tels que :*

$$\forall t \geq 0 \quad M_t^2 - M_0^2 = \langle M \rangle_t + \widetilde{M}_t. \quad (59)$$

$\langle M \rangle_t$ est la limite dans L^2 , pour des subdivisions de pas tendant vers 0, de $\sum_{j=1}^{n_i} (M_{t_j^i} - M_{t_{j-1}^i})^2$.

Remarque 2.3.2. Ainsi, le mouvement brownien standard de \mathbb{R} a pour variation quadratique $\langle B \rangle_t = t$ p.s..

Démonstration. On vérifie à partir de la propriété de martingale de M que, pour $t' \geq t$, $\mathbb{E}[M_{t'}^2 | \mathcal{F}_t] \geq M_t^2$: on dit que M^2 est une *sous-martingale* ⁽¹⁹⁾. Dans ce cas, la *décomposition de Doob-Meyer* affirme qu'il est possible de décomposer M^2 comme la somme

19. Le signe de la nomenclature apparaît souvent un peu curieux au premier abord... On le comprend en disant qu'en moyenne, M est *en dessous* de la valeur moyenne qu'elle aura plus tard.

d'une martingale et d'un processus croissant continu. (La décomposition de Doob-Meyer est triviale dans le cas où la surmartingale est indexée par \mathbb{N} , mais demande quelques outils techniques dans le cas général). En outre, cette décomposition est unique, car la différence de deux processus croissants est un processus à variation bornée, alors que la différence de deux martingales continues est une martingale continue, laquelle ne peut être à variation bornée que si elle est nulle — un exercice très formateur... \square

Ce qui est important, c'est que, pour une martingale continue, la variation quadratique reste finie presque-sûrement. C'est ce qui permet, *in fine*, de construire le calcul stochastique contre une martingale continue exactement de la même façon que contre le mouvement brownien. Aussi nous contenterons-nous d'exposer directement les résultats-clefs du calcul stochastique général sans les démontrer.

2.3.2 Intégration contre une martingale continue

Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ une martingale continue, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sa filtration associée, $(H_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté, localement borné p.s.. Alors l'intégrale stochastique d'Itô $\int H dM$ est une martingale caractérisée par :

Théorème 2.3.3. *Pour $(\sigma_i)_{i \geq 1}$ une suite croissante de subdivisions de $[0, t]$ de pas tendant vers 0, on a*

$$\sum_{j=1}^{n_i} H_{t_{j-1}^i} (M_{t_j^i} - M_{t_{j-1}^i}) \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{L^2} \int_0^t H_u dM_u. \quad (60)$$

Pour $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^2 , on a :

Théorème 2.3.4 (formule d'Itô).

$$F(M_t) - F(M_0) = \int_0^t F'(M_u) dM_u + \frac{1}{2} \int_0^t F''(M_u) d\langle M \rangle_u. \quad (61)$$

Théorème 2.3.5. *La variation quadratique de l'intégrale d'Itô $\int_0^t H_u dM_u$, notée pour le coup $\langle (H \cdot M)_t \rangle_{t \geq 0}$ est donnée par :*

$$\langle (H \cdot M)_t \rangle = \int_0^t H_u^2 d\langle M \rangle_u \quad (20), \quad (62)$$

ce qui peut se condenser sous la forme $d\langle (H \cdot M) \rangle = H^2 d\langle M \rangle$.

2.3.3 Le théorème de Lévy

Le théorème de Lévy nous dit en substance que toutes les martingales continues ressemblent au mouvement brownien.

20. Noter qu'on voit ici apparaître la condition générale d'intégrabilité pour définir l'intégrale d'Itô : p.s. H doit être dans $L^2(d\langle M \rangle)$.

Théorème 2.3.6 (Lévy). *Si $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale issue de 0 dont la variation quadratique est $d\langle M \rangle = dt$, alors c'est un mouvement brownien.*

Démonstration. Il faut essentiellement démontrer que, pour $t \geq 0$, $M_t \stackrel{\text{loi}}{\sim} \mathcal{N}(t)$. Or pour connaître une loi, il suffit d'en connaître la transformée de Fourier (la définition de la transformée de Fourier d'une loi est rappelée *infra*). Soit donc $a \in \mathbb{R}$ et notons $F_a(t) = \mathbb{E}[e^{iaM_t}]$. La formule d'Itô donne :

$$e^{iaM_t} - e^{iaM_0} = ia \int_0^t e^{iaM_u} dM_u - \frac{a^2}{2} \int_0^t e^{iaM_u} du, \quad (63)$$

d'où en passant à l'espérance :

$$F_a(t) - 1 = -\frac{a^2}{2} \int_0^t F_a(u) du. \quad (64)$$

□

Comme en outre, $F_a(0) = 1$, $F_a(\cdot)$ est donc solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} F_a(0) = 1; \\ F_a' = -\frac{a^2}{2} F_a, \end{cases} \quad (65)$$

et donc finalement $F_a(t) = e^{-a^2 t/2}$: c'est bien la transformée de Fourier d'une variable $\mathcal{N}(t)$.

Définition 2.3.7. *On rappelle que, pour X une variable aléatoire à valeurs réelles, la transformée de Fourier de X est l'application*

$$\begin{aligned} \widehat{X} : \mathbb{R} &\longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} \\ a &\longmapsto \mathbb{E}[e^{iaX}]. \end{aligned} \quad (66)$$

On démontre que la transformée de Fourier d'une variable aléatoire détermine complètement sa loi.

Corollaire 2.3.8. *Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ une martingale continue. Alors il existe un mouvement brownien $(B_s)_{s \geq 0}$ tel qu'on puisse passer de B à M par reparamétrisation du temps :*

$$M_t = B_{\langle M \rangle_t}. \quad (67)$$

Démonstration. Soit $s : t \mapsto \langle M \rangle_t$; il nous suffit de remarquer que $(M_{s^{-1}(s)})_{s \geq 0}$ est une martingale de variation quadratique s ⁽²¹⁾. □

21. En effet, de par sa définition (cf. § 2.3.1), la variation quadratique ne change pas quand on reparamétrise le temps.

2.3.4 Semimartingales

Pour parachever « notre » œuvre — la définition de l'intégrale stochastique — nous allons regrouper l'intégrale stochastique et l'intégrale de Stieltjes en une seule définition.

Définition 2.3.9. *On appelle semimartingale un processus continu $(X_t)_{t \geq 0}$ qui se décompose comme la somme d'une martingale continue $(M_t)_{t \geq 0}$ et d'un processus continu à variations localement bornées $(A_t)_{t \geq 0}$. Cette décomposition est appelée décomposition de Doob-Meyer, et elle est unique car une martingale continue à variations bornées est nulle, comme nous l'avons déjà fait remarquer p. 24 à la fin de la preuve de la proposition 2.3.1.*

Définition 2.3.10. *Pour $X = M + A$ une semimartingale et sa décomposition de Doob-Meyer, H un processus adapté, on définit l'intégrale d'Itô comme*

$$\int H dX = \int H dM + \int H dA. \quad (68)$$

Définition 2.3.11. *La variation quadratique d'une semimartingale est la variation quadratique de sa partie martinagale ; elle s'interprète, de la même façon que pour une martingale, comme la somme des carrés des accroissements infinitésimaux.*

La formule d'Itô est encore valable avec les semimartingales :

Théorème 2.3.12. *Pour F de classe C^2 , $(X_t)_{t \geq 0}$ une semimartingale :*

$$F(X_t) - F(X_0) = \int_0^t F'(X_u) dX_u + \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_u) d\langle X \rangle_u. \quad (69)$$

Avant de voir ce que devient l'intégrale de Stratonovitch dans le cadre des semimartingales, nous avons besoin de définir la variation quadratique croisée :

Définition 2.3.13. *Pour X, Y deux semimartingales, la variation quadratique croisée de X et Y , notée $\langle X, Y \rangle$ est, moralement, la somme des produits des accroissements infinitésimaux de X et Y . On a :*

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle X + Y \rangle - \langle X \rangle - \langle Y \rangle \right). \quad (70)$$

Définition 2.3.14. *Pour X et Y deux semimartingales adaptées à la même filtration, l'intégrale de Stratonovitch $\int X \circ dY$ est définie par :*

$$\int_0^t X_u \circ dY_u = \int_0^t X_u dY_u + \frac{1}{2} \langle X, Y \rangle_t. \quad (71)$$

Comme précédemment, l'intégrale de Stratonovitch vérifie la définition intuitive (54) et la formule d'intégration par parties. Plus généralement, toutes les formules d'intégration par parties sont valides avec l'intégrale de Stratonovitch ; par exemple, pour deux semimartingales X et Y :

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t X_u dY_u + \int_0^t Y_u dX_u. \quad (72)$$

Remarque 2.3.15. Tout le formalisme du calcul stochastique que nous venons de définir se généralise au cas multidimensionnel : définition des intégrales d'Itô et de Stratonovitch, formule d'Itô et formule d'intégration par parties pour l'intégrale de Stratonovitch, théorème de Lévy, concept de semimartingale. À noter que, dans le cadre multidimensionnel, les variations quadratiques deviennent des matrices (symétriques, et positives dans le cas de variations non croisées); notamment la variation quadratique du mouvement brownien est $t\mathbf{I}$.

2.3.5 Formalisme différentiel stochastique

Pour la commodité de la compréhension et la facilité des calculs, il est très pratique de manipuler les différentielles stochastiques comme des entités propres et non comme de simples notations. Limitons-nous au cas du calcul d'Itô. On retiendra en particulier que, pour $X = A + M$ et $Y = B + N$ deux semimartingales et leurs décompositions de Doob-Meyer, adaptées à la même filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, on peut faire les manipulations formelles :

- $\mathbb{E}[Y_t dM_t | \mathcal{F}_t] = 0$;
- $\mathbb{E}[Y_t dA_t | \mathcal{F}_t] = Y_t dA_t$;
- $dXdY = d\langle X, Y \rangle$.

Le dernier point est crucial entre tous : il exprime que les différentielles stochastiques, plus précisément leur partie martingale, **doivent être considérées comme des infiniment petits d'ordre 1/2**. En particulier, le produit de deux différentielles stochastiques ne peut pas être négligé et explique le terme résiduel qui apparaît dans la formule d'Itô; en effet la formule d'Itô est simplement l'intégrale du développement de Taylor :

$$dF(X_t) = F'dX_t + \frac{1}{2}F''(X_t)(dX_t)^2 = F'dX_t + \frac{1}{2}F''(X_t)d\langle X \rangle_t. \quad (73)$$

2.4 Invariance conforme du mouvement brownien

☛ Dans cette section, \mathbb{R}^2 muni de sa structure euclidienne est identifié à \mathbb{C} .

2.4.1 Le mouvement brownien est invariant conforme en dimension 2

Théorème 2.4.1. Soit $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe, et $(X_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien dans \mathbb{C} . Alors la trajectoire de $(\varphi(X_t))_{t \geq 0}$ est celle d'un mouvement brownien, au sens où il existe un mouvement brownien $(Y_t)_{t \geq 0}$ dans \mathbb{C} et une application aléatoire $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et croissante p.s. tels qu'on ait :

$$\varphi(X_t) = Y_{s(t)}. \quad (74)$$

Démonstration. Cette preuve sera pour nous l'occasion de montrer la puissance extraordinaire des notations du calcul stochastique : en effet, plutôt que de nous encombrer avec des considérations techniques, nous allons nous contenter de manipuler des différentielles stochastiques, en gardant à l'esprit que ces notations dénuées de sens rigoureux ne font que

traduire un formalisme plus lourd, mais qui est lui parfaitement exact. Le calcul stochastique utilisé ici est celui d'Itô.

Considérons φ comme une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 ; φ a une dérivée première $D\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ainsi qu'une dérivée seconde $D^2\varphi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$, où \mathcal{T} est l'ensemble des tenseurs de $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$. Comme à l'accoutumée, cette dérivée seconde est évaluée contre $\vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y$ est appelée le *laplacien* de φ , que nous noterons $\overrightarrow{\Delta}\varphi$.

Alors on a, d'après la formule d'Itô :

$$\overrightarrow{d\varphi(X_t)} = D\varphi(X_t) \cdot dX_t + \frac{1}{2}D^2\varphi(X_t) \cdot d\langle X \rangle_t. \quad (75)$$

Mais, puisque $(X_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard du plan, on a $d\langle X \rangle_t = (\vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y)dt$, d'où finalement

$$\overrightarrow{d\varphi(X_t)} = D\varphi(X_t) \cdot dX_t + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Delta}\varphi(X_t)dt. \quad (76)$$

Or, c'est un résultat bien connu, comme φ est holomorphe on a $\overrightarrow{\Delta}\varphi \equiv 0$. En outre, φ est également conforme, i.e. $\forall X \in \mathbb{R}^2 \frac{1}{\det D\varphi(X)}D\varphi(X) \in O^+(\mathbb{R}^2)$, de sorte que $\frac{1}{\det D\varphi(X_t)}D\varphi(X_t) \cdot dX_t$ est l'accroissement d'un mouvement brownien (par isotropie du mouvement brownien standard). Ainsi, $(\varphi(X_t))_{t \geq 0}$ est une martingale (bidimensionnelle) de covariation quadratique

$$d\langle \varphi(X) \rangle_t = (\det D\varphi(X_t))^2 (\vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y)dt. \quad (77)$$

Par conséquent, posant

$$s(t) = \int_0^t (\det D\varphi(X_s))^2 ds, \quad (78)$$

$(\varphi(X_{s^{-1}(s)}))_{s \geq 0}$ est une martingale de covariation quadratique $(\vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y)ds$, c'est-à-dire un mouvement brownien par le théorème de Lévy. Appelons Y ce mouvement brownien, alors le théorème 2.4.1 est vérifié. \square

Remarque 2.4.2. On notera que la nullité de $\overrightarrow{\Delta}\varphi$ a été utilisée de façon fondamentale dans cette preuve. Ainsi, **en dimension différente de 2, le mouvement brownien n'est pas invariant conforme**, car le terme d'Itô qui intervient dans le calcul de $d\varphi(X_t)$ est non nul. Par exemple, en dimension 1, où toutes les applications sont conformes, le milieu d'un segment est le point tel que, partant de ce segment, un mouvement brownien atteindra chaque extrémité du segment la première avec probabilité 1/2. Donc, si le théorème 2.4.1 était vrai en dimension 1, cela signifierait que les applications conformes préservent le milieu, ce qui est faux.

2.4.2 Application : représentation conforme de Riemann

Théorème 2.4.3 (Riemann). *Tous les ouverts simplement connexes et non pleins de \mathbb{C} sont conformément équivalents. Le bord orienté d'un de ces ouverts dans $\widehat{\mathbb{C}}$ est donc homéomorphe à \mathbb{S}^1 ; si nous fixons trois points distincts de ce bord⁽²²⁾ avec un certain ordre*

22. Je passe sous silence le fait que certains bords trop « laids » peuvent dégénérer par l'application de notre biholomorphisme; ici on supposera que ce n'est jamais le cas, par exemple parce que le bord de notre ouvert est une courbe \mathcal{C}^1 dans $\widehat{\mathbb{S}}$.

cyclique, alors le biholomorphisme entre deux tels ouverts munis de ces trois points est unique.

Notre objectif ici va être d'explicitier en termes probabilistes le biholomorphisme entre n'importe quel ouvert U du type décrit ci-dessus muni de trois points A_-, A_+, A_∞ sur son bord, et un ouvert particulier U^0 , en l'occurrence le demi-plan supérieur doté des trois points $-1, 1, \infty$.

On rappelle que le mouvement brownien de dimension 2 est récurrent, et visite donc presque-sûrement le voisinage de tout point. Comme en plus, partant d'un certain point, il peut suivre localement n'importe quelle trajectoire à une déformation \mathcal{C}^0 près (théorème de support), il s'ensuit que toute courbe $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ sera presque-sûrement \mathcal{C}^0 -approchée par le mouvement brownien au moins une fois, et donc, finalement, que

Avis 2.4.4. *Presque-sûrement le mouvement finit par quitter U .*

On peut décomposer le bord orienté de U en trois intervalles $I_1 = [A_\infty, A_-[, I_2 = [A_-, A_+[$, $I_3 = [A_+, A_\infty[$. Notons $p_i(x)$ la probabilité pour le mouvement brownien partant de $x \in U$ de quitter U par l'intervalle I_i .

Comme la trajectoire du mouvement brownien, à reparamétrisation du temps près, est invariante conforme, on a :

Proposition 2.4.5. *Le triplet $(p_1(\cdot), p_2(\cdot), p_3(\cdot))$ est invariant conforme.*

Maintenant nous allons démontrer que, pour l'ouvert $U_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$ avec $A_-^0 = -1, A_+^0 = 1, A_\infty^0 = \infty$, l'application (p_1, p_2, p_3) réalise une bijection de U_0 sur le triangle $T = \{(p_1, p_2, p_3) ; \forall i p_i > 0 \text{ et } \sum_i p_i = 1\}$, dont nous expliciterons la bijection inverse, de sorte que pour un point $x \in U$, on pourra par le calcul des $p_i(x)$ en déduire l'image de x par le biholomorphisme recherché, à savoir l'image réciproque de $(p_1(x), p_2(x), p_3(x))$ par $(p_1, p_2, p_3) : U^0 \rightarrow T$.

Soit $x \in U_0$. Pour calculer $p_1(x)$, resp $p_3(x)$, il suffit par invariance par translation se savoir calculer $p_-(x+1)$, resp. $p_+(x-1)$, où on pose :

$$\tau = \inf\{t \geq 0; \Im(X_t) = 0\}, \quad (79)$$

puis

$$p_\varepsilon(x) = \mathbb{P}_x(\text{sgn } \Re(X_\tau) = \varepsilon) \quad (23). \quad (80)$$

Calculons donc la fonction $p_-(\cdot)$. On remarque tout de suite :

Avis 2.4.6. $p_-(z)$ ne dépend que de l'argument de z .

Démonstration. C'est dû à l'invariance de la trajectoire du mouvement brownien par homothétie. \square

D'autre part,

23. On a $p_+ + p_- \equiv 1$ car, p.s., $X_\tau \neq 0$.

Avis 2.4.7. $p_-(\cdot)$ est harmonique.

Par l'avis 2.4.6, $p_-(\cdot)$ est de la forme $p_-(\theta)$ en coordonnées polaires, donc son laplacien est $\frac{1}{r^2}p''_-(\theta)$. D'après l'avis 2.4.7, il en résulte que $p''_-(\theta) = 0$. Comme par ailleurs il est clair que $p_-(0) = 0$, $p_-(\pi) = 1$, on a finalement $p_-(\theta) = \frac{1}{\pi}\theta$, soit :

$$p_-(z) = \frac{\arg(z)}{\pi}. \quad (81)$$

Repassons en coordonnées réelles. Soit $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on suppose connus $p_1(z), p_2(z), p_3(z)$. D'après la formule (81) et la valeur de $p_1(z)$, z est sur la demi-droite d'équation

$$(x, y) = (-1, 0) + \lambda(\cos(\pi p_1), \sin(\pi p_1)), \quad \lambda > 0. \quad (82)$$

De même, d'après la valeur de p_3 :

$$(x, y) \in \{(1, 0) + \lambda(\cos(\pi(1 - p_3)), \sin(\pi(1 - p_3)))\}. \quad (83)$$

Finalement on obtient, après simplification :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin(\pi p_2)} \begin{pmatrix} \sin(p_3 - p_1) \\ 2 \sin p_1 \sin p_3 \end{pmatrix}. \quad (84)$$

Références

- [1] <http://www.dma.ens.fr/~legall/IPPA2.pdf>, pp. 219 à 246, 2006.
- [2] Richard F. Bass, *Probabilistic Techniques in Analysis*, Springer-Verlag, 1995.
- [3] http://fr.wikipedia.org/wiki/Robert_Brown_%28botaniste%29
- [4] Richard F. Bass, *Probabilistic Techniques in Analysis*, Springer-Verlag, 1995.
- [5] D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3e édition, Springer, 1999.