Produit de fusion et théorie des singularités

Sébastien Gouëzel et Nicolas George
Sujet proposé par Olivier Schiffmann

2 juin 1999

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux représentations du groupe $SU(N)$ qui, munies de la somme directe et du produit tensoriel, forment un anneau. On tronque ensuite certaines représentations, de poids trop important, pour construire l'algèbre de Verlinde $R(SU(N)_k)$. Enfin, on s'intéresse à un résultat sur ces algèbres, la dualité niveau-rang, i.e. $SU(N+1)_k \simeq SU(k+1)_N$. L'étude de ce théorème passe par l'étude des singularités d'une fonction complexe et l'introduction d'un nouvel outil, la monodromie.

Table des matières

1 Représentations de dimension finie de $SU(N)$ et $SL(N,\mathbb{C})$

1.1 Représentations d'un groupe

Définition. *Soit G un groupe. On appelle représentation de G une paire (V,ρ) où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\rho : G \to GL(V)$ un morphisme de groupes.*

Cela revient à se donner une action linéaire de G sur V, ou encore à "voir" G comme un sous-groupe de $GL(n,\mathbb{C})$ (modulo l'injectivité de ρ), d'où le terme représentation.

On dira bien sûr que deux représentations (ρ,V) et (ρ',V') d'un groupe G sont isomorphes s'il existe un isomorphisme ψ entre V et V' tel que $\forall g \in G$, $\psi \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \psi$. Comme d'habitude, on considérera les représentations à isomorphisme près.

Par abus de langage, on parlera souvent de "la représentation V" au lieu de la représentation (ρ,V), sauf lorsque cela prête à confusion.

Etant données (ρ,V) et (ρ',V') deux représentations, il existe deux manières naturelles de construire de nouvelles représentations: la somme directe et le produit tensoriel.
On appelle somme directe des représentations V et V' la représentation $\pi : G \to GL(V \oplus V')$ définie par $\pi(g).(x,y) = (\rho(g).x,\rho'(g).y)$.
On appelle produit tensoriel des représentations V et V' la représentation $\tau : G \to GL(V \otimes V')$ définie par $\tau(g).(x \otimes y) = (\rho(g).x) \otimes (\rho'(g).y)$.

A partir de ces constructions, on a envie de construire un anneau, l'anneau des représentations de G, dont la somme serait donnée par la somme directe et le produit par le produit tensoriel. Mais l'opération somme ne serait pas inversible! Il faut donc ruser un peu: on va ajouter un "moins" artificiellement en considérant un $\mathbb{Z}$-module puis en le quotientant judicieusement.

Soit A le $\mathbb{Z}$ module libre de base les classes d'isomorphisme des représentations de G de dimension finie (on notera $[V]$ la classe de la représentation V). Le produit tensoriel munit A d'une structure d'anneau commutatif.

Soit J l'idéal engendré par les éléments $[W]-[V]-[V']$ pour toute suite exacte $0 \to V \to W \to V' \to 0$.

Définition. *On appelle anneau des représentations de dimension finie de G, noté $R(G)$, l'anneau quotient A/J.*

Remarque. J est en fait juste le sous-module engendré par les éléments $[W]-[V]-[V']$ pour toute suite exacte $0 \to V \to W \to V' \to 0$, puisque ce sous-module est stable par le produit tensoriel.

Remarque. Quand on quotiente par J, cela annule en particulier les éléments du type $[V \oplus W]-[V]-[W]$; ainsi, on peut dire que la somme dans $R(G)$ s'apparente à la somme directe. Elle est un peu plus générale puisque, pour certains groupes compliqués, les suites exactes du type précédent ne se scindent pas toujours (en fait, ce ne sera pas le cas dans la suite).

Définition. *On appelle représentation irréductible de G une représentation V de G qui n'admet pas de sous-espace strict non trivial stable sous l'action de G.*

Pour certains groupes, toute représentation de dimension finie se décompose de manière unique comme somme de représentations irréductibles: c'est le cas par exemple des groupes finis. Dans ce cas, $R(G)$ est le $\mathbb{Z}$-module libre de base les représentations irréductibles de dimension finie de G.

1.2 Groupes et algèbres de Lie

Soit $k = \mathbb{R}$,$\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ un corps. On appelle groupe de Lie sur le corps k un groupe topologique muni d'une structure de variété analytique, tel que la multiplication $G \times G \to G$ et l'inversion $G \to G$ soient analytiques: le groupe, comme espace topologique, est lisse, i.e. il ressemble localement à k^n, et la multiplication à gauche par un élément du groupe comme l'inversion sont des applications continues et même analytiques du groupe dans lui-même. On notera Φ_g la multiplication à gauche par g dans G.

Soit G un groupe de Lie, et soit $\mathfrak{g} = T_eG$ son espace tangent en l'identité. On peut identifier les éléments de $\mathfrak{g}$ et les champs de vecteurs u sur G dits invariants à droite, i.e. tels que $T_h\Phi_g.u(h) = u(gh)$ (la multiplication à gauche par g transforme $u(h)$ en $u(gh)$). Ces champs de vecteurs, vus comme des dérivations, sont naturellement munis d'un crochet de Lie par $[u,v] = u \circ v - v \circ u$, ce qui induit un crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$.

Définition. *On appelle algèbre de Lie un espace vectoriel muni d'une opération bilinéaire* $[\ ,\ ]$ *appelée crochet de Lie et vérifiant* $[X,X] = 0$ *et* $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$. *La première égalité équivaut à l'antisymétrie* $[X,Y] = -[Y,X]$*; la seconde est appelée identité de Jacobi.*

Proposition. $\mathfrak{g} = T_eG$ *est naturellement munie d'une structure d'algèbre de Lie. On dit que c'est l'algèbre de Lie du groupe G.*

Le crochet de Lie traduit des propriétés du groupe G. Par exemple, si G est commutatif, le crochet sur $\mathfrak{g}$ est l'application nulle. On dira alors que l'algèbre de Lie est commutative. Remarquons que tout espace vectoriel peut être muni d'une structure d'algèbre de Lie en ajoutant le crochet trivial, uniformément nul.

Exemples.

1. $GL(n,\mathbb{C})$ est un groupe de Lie; sa structure de variété provient de son plongement naturel comme ouvert de $\mathbb{C}^{n^2}$ l'espace des matrices $n \times n$. Son algèbre de Lie est constituée de toutes les matrices $n \times n$ puisque, si A est une matrice, $\varphi(t) = \mathrm{Id} + tA$ est un chemin dans $GL(n,\mathbb{C})$ pour t petit, qui donne en $t = 0$ le vecteur tangent A. On notera cette algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Le crochet de Lie est alors $[A,B] = AB - BA$ (au sens de la multiplication des matrices).
2. $SL(n,\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n et de déterminant 1 est aussi un groupe de Lie (c'est une variété car $SL(n,\mathbb{C}) = \det^{-1}(1)$, et l'application det est submersive). Son algèbre de Lie est l'ensemble des matrices de trace nulle, noté $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Le crochet de Lie est $[A,B] = AB - BA$.
3. Enfin, soit $SU(n)$ l'ensemble des matrices carrées complexes X de taille n unitaires, i.e. vérifiant $\det X = 1$ et $XX^* = \mathrm{Id}$. C'est bien une variété, mais réelle cette fois puisque définie par des équations algébriques réelles. Son algèbre de Lie – un $\mathbb{R}$-espace vectoriel – est constituée des matrices antihermitiennes de trace nulle, i.e. vérifiant $A + A^* = 0$ et $\mathrm{tr}\, A = 0$; on la notera $\mathfrak{su}(n)$.

Soit G un groupe de Lie. Pour $g \in G$, on note $\mathrm{Int}\, g$ la conjugaison par g. C'est une application analytique qui envoie l'élément neutre de G sur lui-même, sa dérivée notée $\mathrm{Ad}\, g$ est donc une application linéaire de $\mathfrak{g}$ dans lui-même. Le morphisme de groupes $\left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & GL(\mathfrak{g}) \\ g & \mapsto & \mathrm{Ad}\, g \end{array} \right.$ est une représentation de G dans le k-espace vectoriel $\mathfrak{g}$, appelée représentation adjointe de G.

En dérivant encore une fois, on obtient un morphisme ad : $\mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$: c'est la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$. On a de plus $\mathrm{ad}(X).Y = [X,Y]$.

1.3 Représentations des groupes de Lie

Les groupes de Lie ont une structure de variété analytique, on s'intéressera ici uniquement aux représentations en rapport avec cette structure: ce sont les représentations (ρ,V) dites analytiques (ou holomorphes dans le cas complexe), c'est-à-dire telles que le morphisme $\rho : G \to GL(V)$ soit analytique. On utilisera aussi les représentations des algèbres de Lie.

Définition. *Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ deux algèbres de Lie, et $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$. On dit que ρ est un morphisme d'algèbres de Lie si ρ est linéaire et respecte le crochet de Lie, i.e. $\forall X,Y \in \mathfrak{g}$, $\rho([X,Y]) = [\rho(X),\rho(Y)]$.*

Définition. *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur un corps k, et V un k-espace vectoriel, on appelle représentation de $\mathfrak{g}$ un morphisme d'algèbres de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)(= \mathrm{End}(V))$.*

La représentation adjointe ad de $\mathfrak{g}$, définie au paragraphe précédent, est un exemple de représentation d'une algèbre de Lie.

Pour étudier les représentations des groupes de Lie, on peut remarquer qu'elles sont liées aux représentations de leur algèbre de Lie: si $\rho : G \to GL(V)$ est une représentation de G, alors $T_e\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation de l'algèbre de Lie de G. Réciproquement, il est parfois possible de "remonter" d'une représentation de l'algèbre à une représentation du groupe, en intégrant. Plus précisément,

Théorème. *Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe. Alors l'application $(\rho,V) \mapsto (T_e\rho,V)$ définit une correspondance bijective entre les représentations de dimension finie de G et celles de $\mathfrak{g}$.*

On montre que $SL(n,\mathbb{C})$ comme $SU(N)$ sont connexes et simplement connexes. Ce théorème s'applique donc et ramène l'étude des représentations de ces groupes à celle des représentations de leurs algèbres de Lie (qui sont plus simples car on a affaire à un espace vectoriel).

On remarque aussi que $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{su}(n) \oplus i\,\mathfrak{su}(n)$. A une représentation (réelle) de $\mathfrak{su}(n)$ on peut associer une représentation (complexe) de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ en complexifiant, et réciproquement une représentation de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ est la complexifiée d'une représentation de $\mathfrak{su}(n)$ (unique à isomorphisme près). On obtient ainsi une bijection entre les représentations de dimension finie de ces deux algèbres de Lie.

Finalement, on a ramené l'étude des représentations de $SU(N)$ de dimension finie à l'étude de celles de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$.

1.4 Représentations de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$

Dans toute cette section, on notera $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées complexes de taille n et de trace nulle. On va montrer que les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$ sont naturellement indexées par $\mathbb{N}^{n-1}$, en expliquant un peu ce qui se passe mais sans faire aucune démonstration qui relèvent de la théorie des algèbres de Lie semi-simples complexes (voir par exemple [6]).

1.4.1 Définition des racines

On pose $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ l'ensemble des matrices diagonales de trace nulle: c'est la sous-algèbre de Cartan. On note aussi $\mathfrak{n}_+$ (respectivement $\mathfrak{n}_-$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes (respectivement triangulaires inférieures strictes), de telle sorte que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_-$. On pose enfin $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ la sous-algèbre de Borel positive de $\mathfrak{g}$.

Tout élément de $\mathfrak{h}$ opère sur $\mathfrak{g}$ par action adjointe, de manière diagonalisable: $H.X = \mathrm{ad}(H)X$ (rappelons que $\mathrm{ad}(H)$ est défini par $\mathrm{ad}(H)X = [H,X] = HX - XH$). Comme $\mathfrak{h}$ est commutatif, tous les endomorphismes $\mathrm{ad}(H)$ sont simultanément diagonalisables; une base de vecteurs propres simultanés est donnée par les matrices élémentaires E^{ij} (avec un 1 en position (i,j) et des 0 ailleurs). Si $H = \mathrm{diag}(h_1,\dots,h_n) \in \mathfrak{h}$ (avec $\sum h_i = 0$), on a $[H,E^{ij}] = (h_i - h_j)E^{ij}$, et $[H,X] = 0$ dès que X est diagonale. Ainsi, tous les $\mathrm{ad}(H)$ sont diagonaux dans la base constituée des E^{ij} pour $i \neq j$ et des $E^{ii} - E^{i+1,i+1}$.

Appelons alors racines les éléments α de $\mathfrak{h}^*$ (le dual de $\mathfrak{h}$) tels que $\mathfrak{g}^\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall H \in \mathfrak{h},\ \mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X\}$ soit non trivial: ce sont les valeurs propres de la représentation adjointe de $\mathfrak{h}$. Notons ϵ_i la forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ qui à une matrice associe son $i^{\text{ème}}$ coefficient diagonal, de telle sorte que $\mathfrak{h}^* = \left(\bigoplus \mathbb{C}\epsilon_i\right)/\mathbb{C}(\epsilon_1 + \ldots + \epsilon_n)$. Le calcul précédent montre alors que les racines sont exactement les formes linéaires $\alpha_{ij} = \epsilon_i - \epsilon_j$, avec $\mathfrak{g}^{\alpha_{ij}} = \mathbb{C}E^{ij}$. En particulier, on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus\limits_{i \neq j} \mathfrak{g}^{\alpha_{ij}}$.

On note R l'ensemble des racines, R_+ l'ensemble des racines α_{ij} avec $i < j$ (les racines positives); on pose, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $\alpha_i = \alpha_{i,i+1} = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$: ce sont les *racines fondamentales.* Ainsi, toute racine positive $\epsilon_i - \epsilon_j$ s'exprime comme somme de racines fondamentales: $\epsilon_i - \epsilon_j = \sum\limits_{k=i}^{j-1} \alpha_k$. Pour $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$, on notera aussi $X_\alpha = E^{ij}$. Si α est une racine positive, $X_\alpha \in \mathfrak{n}_+$.

1.4.2 Poids des représentations

Soit maintenant V une représentation de $\mathfrak{g}$. Pour $\chi \in \mathfrak{h}^*$, on note $V_\chi = \{v \in V \mid \forall H \in \mathfrak{h},\ H.v = \chi(H)v\}$: c'est l'ensemble des vecteurs propres de $\mathfrak{h}$ de poids (=valeur propre) χ. Des calculs élémentaires montrent que, si $v \in V_\chi$ et α est une racine, $X_\alpha.v \in V_{\chi+\alpha}$. De plus, on montre que, si V est de dimension finie, $V = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{h}^*} V_\chi$. On appelle *poids* de la représentation tout χ tels que V_χ soit non nul. Si V est de dimension finie, l'entier $\dim V_\chi$ est appelé multiplicité de χ.

Pour $v \in V$, il y a équivalence entre:

(a) v est un vecteur propre pour la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$

(b) v est un vecteur propre pour $\mathfrak{h}$ et $X_\alpha.v = 0\ \forall \alpha \in R_+$

Un tel élément v non nul est appelé élément primitif.

Pour $\chi \in \mathfrak{h}^*$, on appelle représentation de plus haut poids χ toute représentation de $\mathfrak{g}$ engendrée par un élément primitif de poids χ. On montre qu'une représentation de plus haut poids χ est irréductible si et seulement si elle contient un unique élément primitif. Inversement, pour tout χ il existe une unique représentation irréductible de poids dominant χ, construite de la manière suivante: on note $\mathbb{C}v_\chi$ la représentation de $\mathfrak{b}$ de dimension 1 définie par $h.v_\chi = \chi(h)v_\chi$ si $h \in \mathfrak{h}$, $b.v_\chi = 0$ si $b \in \mathfrak{n}_+$, et on pose $M_\chi = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}v_\chi$ (le *module de Verma*). On montre alors que M_χ admet un unique sous-module propre maximal Z_χ, et que $V_\chi = M_\chi / Z_\chi$ est irréductible de poids dominant χ.

1.4.3 Cas de la dimension finie

Dans le cas de la dimension finie, tout se simplifie: une représentation contient toujours un élément primitif, et une représentation est irréductible si et seulement si elle contient un unique élément primitif. Ainsi, pour avoir toutes les représentations irréductibles de dimension finie, il suffit de déterminer les poids dominants correspondants.

Soit $\chi = u_1\epsilon_1 + \ldots + u_n\epsilon_n \in \mathfrak{h}^*$ (les u_i étant déterminés à une constante près). Alors on montre que χ est le poids dominant d'une représentation irréductible de dimension finie (i.e. V_χ est de dimension finie) si et seulement si $\forall i < j,\ u_i - u_j \in \mathbb{N}$. Pour $i = 1, \ldots, n-1$, notons $\Lambda_i = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_i \in \mathfrak{h}^*$: ce sont les $n-1$ *poids fondamentaux.* La condition précédente s'écrit: il existe $m_1, \ldots, m_{n-1} \in \mathbb{N}$ tels que $\chi = \sum m_i \Lambda_i$. Ainsi,

Théorème. *Toute représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{g}$ est isomorphe à un V_χ pour $\chi \in P_n^+ = \{\sum m_i \Lambda_i \mid \forall i,\ m_i \in \mathbb{N}\}$.*

Les représentations irréductibles de dimension finie sont donc naturellement en bijection avec $\mathbb{N}^{n-1}$, cette bijection s'obtenant en écrivant le poids dominant de la représentation comme combinaison des poids fondamentaux Λ_i.

Enfin, la connaissance des représentations irréductibles de dimension finie donne toutes les représentations de dimension finie de $\mathfrak{g}$, à cause du théorème suivant:

Théorème. *Toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$ se décompose comme somme de représentations irréductibles $V = \bigoplus V_\chi^{m_\chi}$. Les entiers m_χ sont uniquement déterminés.*

1.5 L'anneau des représentations de $SU(N)$

A partir de l'étude des repréntations de $\mathfrak{sl}(N,\mathbb{C})$ de la section précédente, on déduit des informations sur les représentations de $SU(N)$, puisque les représentations de dimension finie de ce groupe de Lie réel et de cette algèbre de Lie complexe sont naturellement en correspondance.

Tout d'abord, les représentations irréductibles de dimension finie de $SU(N)$ sont caractérisées par leur poids dominant, qui s'écrit de manière unique sous la forme $\Lambda = \sum_{i=1}^{N-1} m_i \Lambda_i$, où les Λ_i sont les poids fondamentaux, et $m_i \in \mathbb{N}$. Dans l'anneau des représentations de $SU(N)$, on notera $[\Lambda]$ la classe des représentations irréductibles de poids dominant Λ.

Ensuite, une représentation de dimension finie de $SU(N)$ se décompose comme somme directes de représentations irréductibles. Ainsi, l'anneau des représentations de $SU(N)$ peut se voir comme le $\mathbb{Z}$-module libre de base les $[\Lambda]$.

On voudrait aussi comprendre comment se passe la multiplication dans cet anneau, i.e. comment le produit tensoriel de deux représentations se décompose comme somme de représentations irréductibles. Pour cela, on va expliciter plus précisément ce qui se passe: on va construire les représentations irréductibles de dimension finie de $SU(N)$, ou plutôt de $SL(N,\mathbb{C})$, ce qui revient au même comme on l'a vu plus haut.

2 Construction des représentations de $SL(N,\mathbb{C})$

Dans cette section, on va construire les représentations irréductibles de $SL(N,\mathbb{C})$ de dimension finie, en exhibant pour chaque poids une représentation dont c'est le poids dominant. Cette construction se fera par l'intermédiaire d'un outil combinatoire classique, les tableaux de Young; on déduira alors des propriétés des représentations de $SL(N,\mathbb{C})$ à partir de la combinatoire des tableaux de Young. Pour plus de détails, on pourra se référer à [3].

Dans toute la suite, E sera un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

2.1 Les représentations de $SL(E)$

On a vu dans la section précédente des résultats sur les représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(E)$, qu'on peut traduire en termes de représentations du groupe $SL(E)$.

Soit V une représentation de $SL(E)$. On note H le sous-groupe de $SL(E)$ constitué des matrices diagonales. Pour $\chi = (u_1, \dots, u_m)$, on dit que $v \in V$ a pour poids χ si $\forall x = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_m) \in H$, $x.v = x_1^{u_1} \dots x_m^{u_m} v$ (puisque $x_1 \dots x_m = 1$, les coefficients u_i sont définis à une constante près); on note V_χ l'ensemble des vecteurs de poids χ, et on déduit du résultat correspondant sur les représentations de $\mathfrak{sl}(E)$ que $V = \bigoplus V_\chi$.

Soit $B \subset SL(E)$ le sous-groupe de Borel constitué des matrices triangulaires supérieures. Un vecteur $v \in V$ est dit primitif si $B.v = \mathbb{C}^* v$, et son poids est appelé poids dominant de la représentation. Une représentation est irréductible si et seulement si elle a un unique poids dominant, et deux représentations irréductibles sont isomorphes si et seulement si elles ont le même poids dominant.

Les poids dominants des représentations irréductibles sont les $(u_1, \dots, u_m)$ avec $u_1 \geqslant u_2 \dots \geqslant u_m$. Il suffit donc de construire des représentations ayant ces poids pour être sûr d'avoir construit toutes les représentations irréductibles de dimension finies de $SL(E)$.

2.2 Le module de Schur E^λ

2.2.1 Tableaux de Young

Etant donné $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ un n-uplet d'entiers positifs ou nuls décroissants, on appelle forme λ un tableau à n lignes dont la $i^{\text{ème}}$ ligne compte λ_i cases.

Un diagramme de Young de forme λ est un remplissage de ce tableau vide par des éléments d'un ensemble a priori quelconque. On parlera d'un tableau de Young quand ces éléments sont des entiers, et que le remplissage est croissant au sens large suivant chaque ligne et croissant au sens strict suivant chaque colonne.

2.2.2 Construction du module E^λ

Soit $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n) \in \mathbb{N}^n$. On note $E^{\times\lambda} = E^{\sum \lambda_i}$, et on verra un élément de $E^{\times\lambda}$ comme un remplissage de la forme λ.

On considère les fonctions $\varphi : E^{\times\lambda} \to F$ telles que:

(a) φ est multilinéaire.

(b) φ est alternée suivant chaque colonne: si v' est obtenu à partir de v en échangeant deux entrées d'une même colonne, $\varphi(v') = -\varphi(v)$.

(c) Si on choisit deux colonnes $i < j$, et k boîtes dans la colonne j, alors $\forall v \in E^{\times\lambda}$, $\varphi(v) = \sum \varphi(w)$ pour w obtenu en échangeant k boîtes de la colonne i avec les k boîtes choisies dans la colonne j, tout en respectant l'ordre.

On voudrait construire un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E^λ qui soit universel pour ces applications, i.e. tel qu'il existe $p : E^{\times\lambda} \to E^\lambda$ telle que pour toute application φ du type précédent il existe $\tilde{\varphi} : E^\lambda \to F$ avec $\varphi = \tilde{\varphi} \circ p$. Un tel module serait nécessairement unique à isomorphisme près: c'est vrai pour tous les problèmes universels.

On construit E^λ comme suit: soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une base de E. Pour un remplissage T de la forme λ avec des nombres de 1 à m (répétitions permises), on remplace dans chaque case i par e_i, ce qui donne un élément e_T de $E^{\times\lambda}$. On appelle alors F le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de base les e_T, et Q son sous-espace vectoriel engendré par les éléments de la forme:

(a) e_T si T a deux entrées égales dans une colonne.

(b) $e_T + e_{T'}$ si T' est obtenu à partir de T en échangeant deux entrées dans une colonne.

(c) $e_T - \sum e_S$, où S est obtenu à partir de T comme dans la troisième condition sur φ.

$E^\lambda = F/Q$ est alors solution du problème universel.

Exemples.

1. Pour $\lambda = (n)$ le tableau avec une seule ligne de n cases, la propriété (b) n'impose rien, et on quotiente juste par les $e_T - e_S$ où S est obtenu en échangeant deux entrées de T. $E^{(n)}$ est donc le produit tensoriel $E^{\otimes n}$ quotienté par le sous-module engendré par les $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n - v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}$: c'est la $n^{\text{ième}}$ puissance symétrique de E, $\mathrm{Sym}^n(E)$.
2. Pour $\lambda = (1)^n$ le tableau avec 1 colonne de hauteur n, la propriété (b) indique que E^λ est alterné: c'est la $n^{\text{ième}}$ puissance extérieure $\Lambda^n(E)$.

Proposition. *Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel E^λ a pour base les e_T, pour T tableau de Young de forme λ rempli avec des nombres de $\{1, \ldots, m\}$*

2.2.3 Propriétés de la représentation E^λ

Rappelons que E^λ est le quotient de deux espaces vectoriels F et Q, définis plus haut. $\mathrm{End}(E)$ agit sur F (il agit sur chaque case), et Q est stable par $\mathrm{End}(E)$. Ainsi, $\mathrm{End}(E)$ agit sur E^λ en passant au quotient, de même que tous les sous-groupes de $\mathrm{End}(E)$. En particulier, E^λ est une représentation de $SL(E)$.

Proposition. *A multiplication par un scalaire près, l'unique élément primitif de la représentation E^λ est le vecteur e_T, où $T = U(\lambda)$ est le tableau de forme λ dont la $i^{\text{ème}}$ ligne ne contient que l'entier i. Le plus haut poids de cette représentation est $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$.*

Ainsi, on a bien construit toutes les représentations irréductibles de dimension finie de $SL(E)$, puisqu'on a obtenu tous les poids dominants.

2.3 Calcul de $E^\lambda \otimes E^{(1)^n}$

2.3.1 Les polynômes de Schur – Caractères

Soit T un diagramme de Young de forme λ rempli par des nombres de 1 à m. Notant n_i le nombre de i dans le tableau, on note $x^T = x_1^{n_1} \ldots x_m^{n_m}$: c'est un monôme en n variables.

On pose alors $s_\lambda(x) = \sum x^T$ pour T tableau de Young de forme λ rempli par des nombres de $\{1,\ldots,m\}$: c'est un polynôme en $x_1,\ldots,x_m$, appelé polynôme de Schur associé à la forme λ. On a alors:

Théorème. *Les polynômes s_λ sont symétriques. Quand λ décrit toutes les formes de Young ayant au plus m lignes, les polynômes s_λ forment une base des polynômes symétriques en m variables.*

Par exemple, quand $\lambda = (n)$, s_λ est la somme de tous les monômes distincts de degré n. Pour $\lambda = (1)^n$, s_λ est le $n^{\text{ième}}$ polynôme symétrique élémentaire, c'est-à-dire le coefficient de X^n dans $(X + x_1)\ldots(X + x_m)$.

On appelle caractère d'une représentation V de $SL(E)$ de dimension finie la fonction $\mathrm{Char}(V) : H \to \mathbb{C}$ définie par: $\mathrm{Char}(V)(x_1,\ldots,x_m)$ est la trace de l'action de $\mathrm{diag}(x_1,\ldots,x_m)$ sur V. Dans E^λ, en regardant ce qui se passe sur la base des e_T, on obtient $\mathrm{Char}(V)(x) = \sum x^T$, où T parcourt les tableaux de Young de forme λ remplis avec des nombres de 1 à m. Autrement dit, $\mathrm{Char}(V) = s_\lambda$.

Soit maintenant V une représentation de dimension finie de $SL(E)$. V se décompose comme somme de représentations irréductibles de dimension finie: $V = \bigoplus (E^\lambda)^{d_\lambda}$. Prenant le caractère, $\mathrm{Char}(V) = \sum d_\lambda s_\lambda$. Comme les s_λ sont linéairement indépendants, on peut déterminer les d_λ connaissant $\mathrm{Char}(V)$; autrement dit, une représentation de dimension finie de $SL(E)$ est entièrement déterminée par son caractère (c'est un fait général en théorie des représentations).

On voudrait maintenant décomposer la représentation $E^\lambda \otimes E^\mu$ comme somme de représentations irréductibles: $E^\lambda \otimes E^\mu = \sum (E^\nu)^{c^\nu_{\lambda\mu}}$ (les $c^\nu_{\lambda\mu}$ sont appelés *coefficients de Littlewood-Richardson*); on voudrait une méthode pour calculer explicitement les coefficients $c^\nu_{\lambda\mu}$. Pour cela, on se ramène à un problème sur les polynômes symétriques en prenant le caractère: $s_\lambda s_\mu = \sum c^\nu_{\lambda\mu} s_\nu$ (et on sait qu'une telle décomposition est unique puisque les s_ν sont linéairement indépendants). On s'est ramené à un problème de calcul formel, qui peut être entrepris par une machine.

On peut aussi faire ce calcul par des méthodes combinatoires, par exemple en comptant le nombre de diagrammes de Young d'un certain type: si la forme λ est incluse dans la forme ν, appelons forme tordue ν/λ la forme obtenue en ôtant λ à ν. On peut remplir des formes tordues en croissant au sens large suivant les lignes et au sens strict suivant les colonnes, et on dit qu'on a affaire à un tableau de Young tordu de forme ν/λ. Un tel tableau est dit de Littlewood-Richardson si, écrivant ses entrées en lisant la première ligne de droite à gauche, la deuxième de droite à gauche, etc., le mot obtenu est tel que tous ses préfixes contiennent au moins autant de 1 que de 2, de 2 que de 3, etc. On a alors:

Théorème. *(règle de Littlewood-Richardson) Le coefficient $c^\nu_{\lambda\mu}$ est le nombre de tableaux tordus de Littlewood-Richardson de forme ν/λ qui contiennent μ_1 1,$\ldots$,μ_m m.*

2.3.2 Calcul de $E^\lambda \otimes E^{(1)^n}$

Rappelons que, pour $n \leqslant m$, on désigne par $(1)^n$ la forme qui compte une unique colonne de hauteur n.

Comme application de ce qui précède, on voudrait décomposer $E^\lambda \otimes E^{(1)^n}$ comme somme de représentations irréductibles. Cela revient à calculer les coefficients $c^\nu_{\lambda(1)^n}$.

Considérons $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_m)$ une forme de Young, et supposons que $c^\nu_{\lambda(1)^n} \neq 0$. Nécessairement, la forme λ est incluse dans la forme ν, et la forme tordue ν/λ peut être remplie avec un 1, un 2,..., un n. Lisant les entrées de droite à gauche et de haut en bas dans le tableau tordu de Littlewood-Richardson ainsi formé, le mot obtenu doit être une permutation de $\{1,\ldots,n\}$ dont les préfixes contiennent autant de 1 que de 2, de 2 que de 3, etc: c'est nécessairement l'identité. Le remplissage doit être croissant suivant les lignes, et aussi croissant quand on lit de droite à gauche et de haut en bas; ainsi, ν/λ ne peut avoir deux cases sur la même ligne (on ne pourrait les remplir en respectant les conditions précédentes). Finalement, ν est obtenu à partir de λ en rajoutant 1 case à la fin de n lignes, et il y a alors un seul remplissage possible de la forme tordue qui en fasse un tableau de

Littlewood-Richardson. On a prouvé:
Proposition. *Le coefficient* $c^{\nu}_{\lambda(1)^n}$ *vaut 1 s'il existe* $a_1 < \ldots < a_n$ *tels que* $\nu_{a_k} = \lambda_{a_k} + 1$ *et* $\nu_l = \lambda_l$ *sinon. Dans le cas contraire,* $c^{\nu}_{\lambda(1)^n} = 0$.

On en déduit le résultat que l'on recherchait:
Proposition. $E^{\lambda} \otimes E^{(1)^n} = \sum E^{\nu}$*, la somme se faisant sur les* ν *tels qu'il existe* $a_1 < \ldots < a_n$ *avec* $\nu_{a_k} = \lambda_{a_k} + 1$ *et* $\nu_l = \lambda_l$ *sinon.*
Remarque. En regardant la dimension des espaces dans l'égalité précédente, on obtient une égalité combinatoire non triviale. C'est souvent ce qui se passe dans l'étude des tableaux de Young, où on déduit parfois des égalités combinatoires de propriétés des représentations, et où réciproquement des informations combinatoires donnent des résultats sur les représentations.

2.4 Conséquences sur $R(SU(N))$

Dans $SU(N)$, on voudrait comprendre la multiplication par un des poids fondamentaux $\Lambda_p = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_p$. On utilise pour cela le fait que Λ_p est le poids dominant de la représentation $E^{(1)^p}$. Le résultat précédent se réécrit alors:
Proposition. *Soit* Λ *un poids dominant. Alors, dans* $R(SU(N))$, $[\Lambda_p] \times [\Lambda] = \sum [\Lambda']$*, la somme se faisant sur tous les poids dominants de la forme* $\Lambda + \epsilon_{i_1} + \ldots + \epsilon_{i_p}$ *avec* $i_1 < \ldots < i_p$.

On en déduit:
Théorème. *Comme algèbre,* $R(SU(N))$ *est engendrée par les* $[\Lambda_p]$, $1 \leqslant p \leqslant N-1$.

Démonstration.
Pour deux poids fondamentaux $\Lambda = \sum m_i \epsilon_i$ et $\Lambda' = \sum m'_i \epsilon_i$, on notera $\Lambda \leqslant \Lambda'$ si $(m_1, \ldots, m_{N-1}) \leqslant (m'_1, \ldots .m'_{N-1})$ au sens de l'ordre lexicographique. C'est un ordre total sur les poids.

On démontre alors le résultat par récurrence:
– Pour $\Lambda = 0$, le résultat est clair.
– Soit $\Lambda = m_1(\epsilon_1 + \ldots + \epsilon_k) + m_{k+1}\epsilon_{k+1} + \ldots + m_{N-1}\epsilon_{N-1}$, avec $m_1 > m_{k+1} \geqslant \ldots \geqslant m_{N-1} \geqslant 0$. Posons alors $\Lambda' = (m_1 - 1)(\epsilon_1 + \ldots + \epsilon_k) + m_{k+1}\epsilon_{k+1} + \ldots + m_{N-1}\epsilon_{N-1}$: c'est encore un poids dominant. En écrivant la formule explicite de la proposition précédente, on vérifie que $[\Lambda'] \times [\Lambda_k] = [\Lambda] + M$, où M est une somme de représentations $< \Lambda$. On conclut par hypothèse de récurrence. $\square$

3 Le produit de fusion

3.1 Introduction

Pour les besoins de la physique et en particulier de la théorie des champs conformes, mais aussi en mathématiques pour certaines représentations en caractéristique finie, il est utile d'introduire une troncature de l'anneau des représentations de $SU(N)$: on voudrait éliminer les représentations irréductibles dont le poids serait trop grand.

Dans toute la suite, k sera un entier positif fixé, au-delà duquel on voudrait tronquer les poids.

Notons $P_{N,k} = \{\sum m_i \Lambda_i \mid m_i \in \mathbb{N}, \sum m_i \leqslant k\}$: on écarte tous les poids dominants qui sont plus grands que k. Une première méthode pour tronquer serait de quotienter $R(SU(N))$ par le sous-module engendré par les $[\Lambda]$ pour $\Lambda \notin P_{N,k}$. Mais c'est juste un sous-module, pas un idéal pour la structure multiplicative, ce qui fait qu'on ne pourrait pas définir de produit naturel sur la structure quotient.

Il faut donc s'y prendre autrement: soient Λ,Λ' dans $P_{N,k}$. Pour définir leur produit tronqué, on écrit $[\Lambda] \times [\Lambda'] = \sum [\Lambda'']$ dans $R(SU(N))$, puis on élimine les $[\Lambda'']$ qui ne sont pas dans $P_{N,k}$ en les ramenant dedans par une symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan affine $\{\sum m_i \Lambda_i \mid \sum m_i = k+1\}$ et en changeant leur signe. Pour faire cela, il faut préciser le sens de "orthogonal", et donc mettre un produit scalaire sur l'espace des racines. Tout le problème est de trouver un produit scalaire naturel.

3.2 Géométrie du système de racines

3.2.1 Produit scalaire invariant sur $\mathfrak{h}$

On appelle espace des racines le $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de base les α_i, $1 \leqslant i \leqslant N-1$. De manière équivalente, on peut dire qu'il a pour base les ϵ_i, $1 \leqslant N-1$, et on pose $\epsilon_N = -\epsilon_1 - \ldots - \epsilon_{N-1}$. Pour mettre un produit scalaire sur l'espace des racines, on va plutôt en mettre un sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des matrices réelles de trace nulle, dont V est le dual. L'identification canonique entre un espace euclidien et son dual donnera alors un produit scalaire sur V.

On appelle forme de Killing la forme bilinéaire $B : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \to & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \mapsto & \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X \circ \mathrm{ad}\, Y) \end{array} \right.$ qui a le mérite d'être invariante, i.e. $B([X,Y],Z) + B(Y,[X,Z]) = 0\ \forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}$.

Théorème. *B est invariante non dégénérée. Sa restriction à $\mathfrak{h}$ est aussi invariante non dégénérée, et B est positive sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.*

Ce théorème est un fait général sur toute algèbre de Lie semi-simple; dans ce cas particulier, on va en vérifier la dernière partie en calculant explicitement B sur $\mathfrak{h}$, dans la base des $H_i = \mathrm{diag}(0,\ldots,0,1,-1,0,\ldots,0)$. Une base de $\mathfrak{g}$, comme on l'a vu plus haut, est formé des E^{ij} pour $i \neq j$, et des H_i. Dans cette base, les $\mathrm{ad}\, X$ sont diagonaux pour $X \in \mathfrak{h}$, et $\mathrm{ad}\, X$ agit par $\mathrm{ad}\, X(E^{ij}) = (X_i - X_j)E^{ij}$. Ainsi, $\mathrm{ad}\, X \circ \mathrm{ad}\, Y E^{ij} = (X_i - X_j)(Y_i - Y_j)E^{ij}$. En sommant sur les $i \neq j$, on trouve $B(X,Y) = \sum_{i,j}(X_i - X_j)(Y_i - Y_j)$, ce qui est clairement une forme bilinéaire positive non dégénérée. Pour calculer $B(X,Y)$, on écrit les matrices $(X_i - X_j)_{i,j}$ et $(Y_i - Y_j)_{i,j}$, puis on fait la somme des produits coefficient par coefficient. On en déduit la matrice de B dans la base des H_i: c'est

$$2N \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour simplifier, on renormalise et on considère $(X,Y) = B(X,Y)/2N$ plutôt que B: c'est encore un produit scalaire invariant, dont la matrice dans la base des H_i est plus simple.

3.2.2 Espace des racines

Pour $X \in \mathfrak{h}$, on veut calculer (H_i,X). On décompose X dans la base des H_i: $X = \sum a_i H_i$, si bien que, pour $i \neq 1,N$, $(H_i,X) = -a_{i-1} + 2a_i - a_{i+1}$. Ecrivons $X = \mathrm{diag}(b_i)$, alors $b_i = a_i - a_{i-1}$, puis $(H_i,X) = b_i - b_{i+1} = (\epsilon_i - \epsilon_{i+1})(X)$ (ce qui reste vrai pour $i = 1$). L'isomorphisme canonique entre $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}^*$ (provenant de la structure euclidienne) envoie donc la base H_i sur la base α_i, et on obtient un produit scalaire naturel sur V.

On note s_i la symétrie orthogonale d'axe α_i: $s_i(x) = x - 2\frac{(x,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i$, c'est l'identité sur $\alpha_i^{\perp}$ et $s_i(\alpha_i) = -\alpha_i$. s_i permute les racines, les composées des s_i aussi, et le groupe W engendré par les s_i est donc fini (c'est le *groupe de Weyl*). Remarquons que s_i permute ϵ_i et ϵ_{i+1} et laisse les autres ϵ_j invariants, donc W s'identifie au groupe des permutations $\mathfrak{S}_N$.

On note aussi s_0 la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $H = \{\sum m_i \Lambda_i = k+1\}$, et $\tilde{W}$ le groupe engendré par W et s_0. Pour $w \in \tilde{W}$, on définit la signature de w: on écrit w comme un produit d'éléments s_i, en nombre minimal r, et on pose $\epsilon(w) = (-1)^r$.

Il est utile de remarquer que $P_{N,k+1}$ est un domaine fondamental pour $\tilde{W}$, c'est -à-dire que pour tout $x \in V$ il existe $w \in \tilde{W}$ tel que $w(x) \in P_{N,k+1}$, et $w(x)$ est indépendant du choix de w.

3.3 Construction du produit de fusion

On peut alors définir le produit de fusion: si Λ et Λ' sont deux poids dominants de $P_{N,k}$, on note $[\Lambda] \times [\Lambda'] = \sum c_i[\Lambda_i]$ dans $R(SU(N))$. Pour chaque $[\Lambda_i]$ qui n'est pas dans $P_{N,k+1}$, on l'y ramène en le multipliant par un élément $w_i \in \tilde{W}$ (si $\Lambda_i \in P_{N,k+1}$, on prend $w_i = \mathrm{Id}$). Si $w_i(\Lambda_i) \in H$ (l'hyperplan $k+1$) on pose $\delta_i = 0$ et sinon $\delta_i = 1$. Finalement, on pose $[\Lambda] \times' [\Lambda'] = \sum c_i \epsilon(w_i)\delta_i[w_i(\Lambda_i)]$ (cette définition étant indépendante du choix des w_i). Autrement dit, on ramène tout dans $P_{N,k+1}$ en changeant éventuellement les signes, puis on tue ceux qui sont sur le bord.

Le $\mathbb{Z}$-module libre de base les $[\Lambda]$ pour $\Lambda \in P_{N,k}$ est ainsi muni d'un produit, et on montre que celui-ci est associatif et distributif par rapport à l'addition. L'anneau ainsi formé, noté $R(SU(N)_k)$, est *l'algèbre de Verlinde* de niveau k de $SU(N)$.

L'associativité est une conséquence de:

Théorème. *(Kazhdan) Notons I l'idéal de $R(SU(N))$ engendré par les $[\Lambda]$ pour $\Lambda = \sum m_i \Lambda_i$ avec $\sum m_i = k+1$. Alors $R(SU(N)_k) \simeq R(SU(N))/I$.*

Comme algèbre, $R(SU(N)_k)$ est engendrée par les éléments $[\Lambda_1], \ldots, [\Lambda_{N-1}]$ (ce qui se déduit du résultat correspondant sur $R(SU(N))$ prouvé en (2.4)). Le morphisme d'algèbre $\pi : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{N-1}] \to R(SU(N)_k)$ qui envoie x_i sur Λ_i est donc surjectif. Notant J son noyau, $R(SU(N)_k) \simeq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{N-1}]/J$. Plus précisément, on peut expliciter J:

Théorème. *(Gepner) Soit $V_{N,k}$ le polynôme en $N-1$ variables défini par, si $h = N+k$,*

$$V_{N,k}(x) = \frac{(-1)^h}{h!}\left(\frac{d}{dt}\right)^h \ln\left(1 - tx_1 + t^2x_2 - \ldots + (-t)^{N-1}x_{N-1} + (-t)^N\right)\Big|_{t=0}$$

Alors J est l'idéal engendré par les dérivées partielles d'ordre 1 de $V_{N,k}$. Autrement dit,

$$R(SU(N)_k) = \frac{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{N-1}]}{(\partial_i V_{N,k})}$$

Il est souvent utile de considérer également le *potentiel de fusion tronqué*, défini par

$$V^0_{N,k}(x) = \frac{(-1)^h}{h!}\left(\frac{d}{dt}\right)^h \ln\left(1 - tx_1 + t^2x_2 - \ldots + (-t)^{N-1}x_{N-1}\right)\Big|_{t=0}$$

3.4 Le réseau de l'algèbre de Verlinde

Définition. *On appelle réseau de l'algèbre de Verlinde $R(SU(N)_k)$ le réseau sur $\mathbb{Z}$ de base les α_λ pour $\lambda \in P_{N,k}$. On le note $L(SU(N)_k)$.*

Comme précédemment sur l'espace des racines, on va ajouter une forme bilinéaire symétrique. Cependant, elle ne sera pas nécessairement définie positive.

On a explicité en (2.4) le produit d'un élément de $R(SU(N))$ par un poids fondamental $[\Lambda_p]$. On en déduit une formule du même type dans $R(SU(N)_k)$:

Proposition. *Soit $\Lambda \in P_{N,k}$. Alors, dans $R(SU(N)_k)$, $[\Lambda_p] \times [\Lambda] = \sum [\Lambda']$, la somme se faisant sur tous les $\Lambda' \in P_{N,k}$ qui s'écrivent sous la forme $\Lambda + \epsilon_{i_1} + \ldots + \epsilon_{i_p}$ avec $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant N$.*

Cela nous conduit à définir une forme bilinéaire naturelle $B_{N,k}$ sur $L(SU(N)_k)$. On pose $B_{N,k}(\alpha_\lambda,\alpha_\lambda) = 2$, $B_{N,k}(\alpha_\lambda,\alpha_\mu) = -1$ si μ peut s'écrire sous la forme $\lambda + \epsilon_{i_1} + \ldots + \epsilon_{i_p}$ avec $1 \leqslant p \leqslant N-1$, et 0 sinon. Cette forme bilinéaire est symétrique. En effet, si $\mu = \lambda + \epsilon_{i_1} + \ldots + \epsilon_{i_p}$, considérons $j_1, \ldots, j_{N-p}$ tels que $\{i_1, \ldots, j_{N-p}\} = \{1, \ldots, N\}$. Comme $\epsilon_1 + \ldots + \epsilon_N = 0$, $\lambda = \mu + \epsilon_{j_1} + \ldots + \epsilon_{j_{N-p}}$.

On peut remarquer que le réseau muni de sa forme bilinéaire encode toute la structure de l'algèbre: avec ces informations, si on veut calculer $[\Lambda_p] \times [\Lambda]$, ce sera la somme des $[\Lambda']$ tels que $B_{N,k}(\alpha_\Lambda,\alpha_{\Lambda'}) = -1$ et tels que, si $\Lambda' = \Lambda + \sum m_i \epsilon_i$ (les m_i définis à une constante près), alors $\sum m_i \equiv p \mod N$. En particulier, deux algèbres qui ont des réseaux isomorphes sont isomorphes.

On considère aussi sur $L(SU(N)_k)$ les réflexions s_λ par rapport aux hyperplans orthogonaux aux éléments de base α_λ. Ils engendrent un groupe $\Gamma_{N,k}$ d'automorphismes linéaires de $L(SU(N)_k)$, appelé groupe de réflexion de $SU(N)_k$.

4 Cycle évanescent et groupe de monodromie

Le potentiel de fusion court possède une singularité; on va voir que les propriétés de cette singularité permettent de reconstruire entièrement le réseau de l'algèbre de Verlinde. Nous allons donc introduire un certain nombre de notions pour l'étude des singularités des fonctions holomorphes.

4.1 Rappels de topologie algébrique

4.1.1 Homotopie et groupe fondamental

Il s'agit ici de définir brièvement le groupe formé des chemins à déformation près dans un espace topologique.

Soient X un espace topologique et $x \in X$.

Un lacet d'extrémités x est une application continue $\gamma : [0{,}1] \longrightarrow X$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$.

Définition. *Deux lacets d'extrémités x γ et γ' dans X sont homotopes s'il existe une application continue $H : [0{,}1] \times [0{,}1] \longrightarrow X$ telle que $H(0,\cdot) = \gamma$, $H(1,\cdot) = \gamma'$ et $\forall t$ $H(t{,}0) = H(t{,}1) = x$.*

Etant donnés deux lacets γ et γ' d'extrémités x, on peut définir le chemin consistant à emprunter d'abord γ puis γ':

$$\gamma.\gamma' : \left\{ \begin{array}{ccc} [0{,}1] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma'(2t-1) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

Cette loi n'est pas associative en l'état. Néanmoins elle induit bien une loi de composition associative sur les classes d'équivalence de chemins par homotopie. De plus, la classe du chemin défini par

$$\gamma^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0{,}1] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & \gamma(1-t) \end{array} \right.$$

est l'inverse de la classe de γ.

Définition. *Si X est un espace topologique et $x \in X$ un point, on appelle* **groupe fondamental** *de X par rapport à x et on note $\pi_1(X{,}x)$ le groupe des classes de lacets dans X d'extrémités x à homotopie près, muni de la concaténation.*

On notera que ce groupe ne dépend que de la composante connexe par arcs de x. Si X est connexe par arcs, on peut omettre la mention de x.

Proposition. *Si X est le plan $\mathbb{C}$ privé de n points $z_1,\ldots,z_n$, alors $\pi_1(X)$ est un groupe libre à n générateurs, et est engendré par les lacets γ_i, où γ_i contourne uniquement z_i.*

4.1.2 Homologie

Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}$; on appelle* **simplexe** *d'ordre n et on note Δ_n l'enveloppe convexe des vecteurs de la base canonique $(e_0,\ldots,e_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Définition. *Soient X un espace topologique et A un anneau commutatif. On note $C_n(X;A)$ le A-module libre de base $\Sigma_n(X) = \mathcal{C}(\Delta_n,X)$ l'ensemble des applications continues de Δ_n dans X. On note $C_*(X;A) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} C_n(X;A)$.*

Le bord d'un simplexe d'ordre n est formée de $n+1$ simplexes d'ordre $n-1$. On note Δ_n^i la face opposée au sommet e_i. On définit l'opérateur n-ième face: $\partial_i : \left\{ \begin{array}{ccc} C_n(X;A) & \longrightarrow & C_{n-1}(X;A) \\ \sigma & \longmapsto & \sigma_{|\Delta_n^i} \end{array} \right.$. On définit alors un opérateur différentiel par $d : \left\{ \begin{array}{ccc} C_n(X;A) & \longrightarrow & C_{n-1}(X;A) \\ \sigma & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i(\sigma) \end{array} \right.$.

On note du même symbole l'opérateur différentiel pour tous les ordres, et on le prolonge en

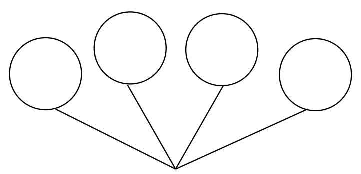
$$d : C_*(X;A) \longrightarrow C_*(X;A)$$

Proposition. *On a* $d \circ d = 0$.

Définition. *On note* $Z_n(X;A) = \operatorname{Ker} d_{|C_n(X;A)} \subset C_n(X;A)$. *Un élément de* $Z_n(X;A)$ *est appelé cycle. On note* $B_n(X;A) = \operatorname{Im} d_{|C_{n+1}(X;A)} \subset C_n(X;A)$. *Un élément de* $B_n(X;A)$ *est appelé bord.*

Comme $d \circ d = 0$, $B_n(X;A) \subset Z_n(X;A)$.

Définition. *On appelle* **module d'homologie** *d'ordre* n *de* X *sur* A *et on note* $H_n(X;A)$ *le* A*-module* $H_n(X;A) = Z_n(X;A) / B_n(X;A)$.



Un bouquet de 4 sphères

Propriétés. *On a les propriétés suivantes:*

1. *L'homologie est invariante par homéomorphisme, homotopie.*
2. *L'homologie d'une sphère* $\mathbb{S}^n$ *est* $H_0(\mathbb{S}^n,A) = H_n(\mathbb{S}^n,A) = A$ *et* $H_k(\mathbb{S}^n,A) = 0$ *pour* $k \neq n$ *et* $k \neq 0$.
3. *L'homologie d'un bouquet* X *de* k *sphères de dimension* d *est* $H_0(X;A) = A$, $H_n(X;A) = A^k$ *si* $d = n$ *et* $H_n(X;A) = 0$ *sinon.*

4.2 Singularités des fonctions holomorphes

Remarque. On parle ici de l'homologie réduite, qui diffère de l'homologie simple par le fait qu'à l'ordre 0, on ne considère que les cycles correspondant à un total des coefficients nul.

4.2.1 Fonctions de Morse et fibre singulière

Définition. *On appelle fonction de Morse une fonction n'ayant que des points singuliers non dégénérés isolés.*

Définition. *Si* f *est une fonction de Morse de* $\mathbb{C}^n \supset U$ *dans* $\mathbb{C}$, *et* x *un des points singuliers de* f, *on appelle fibre non singulière de* f *au voisinage de* x *la variété* $f_{|B}^{-1}(y)$, *où* B *est un voisinage ouvert de* x *sur lequel le lemme de Morse s'applique et* $y \in f(B) \setminus \{f(x)\}$.

Proposition. *La fibre non singulière ne dépend pas du choix de* y *et* B*; elle est rétracte à la sphère réelle* $\mathbb{S}^{n-1}$.

Remarque. Si f possède un point singulier multiple, sa fibre non singulière, appelée **fibration de Milnor** et notée V_f qui se définit en considérant un voisinage B suffisamment petit, est homotope à un bouquet de sphères. Le nombre de sphères, égal à l'ordre de la singularité, est appelé **nombre de Milnor** de la singularité, et noté $\mu(f)$.

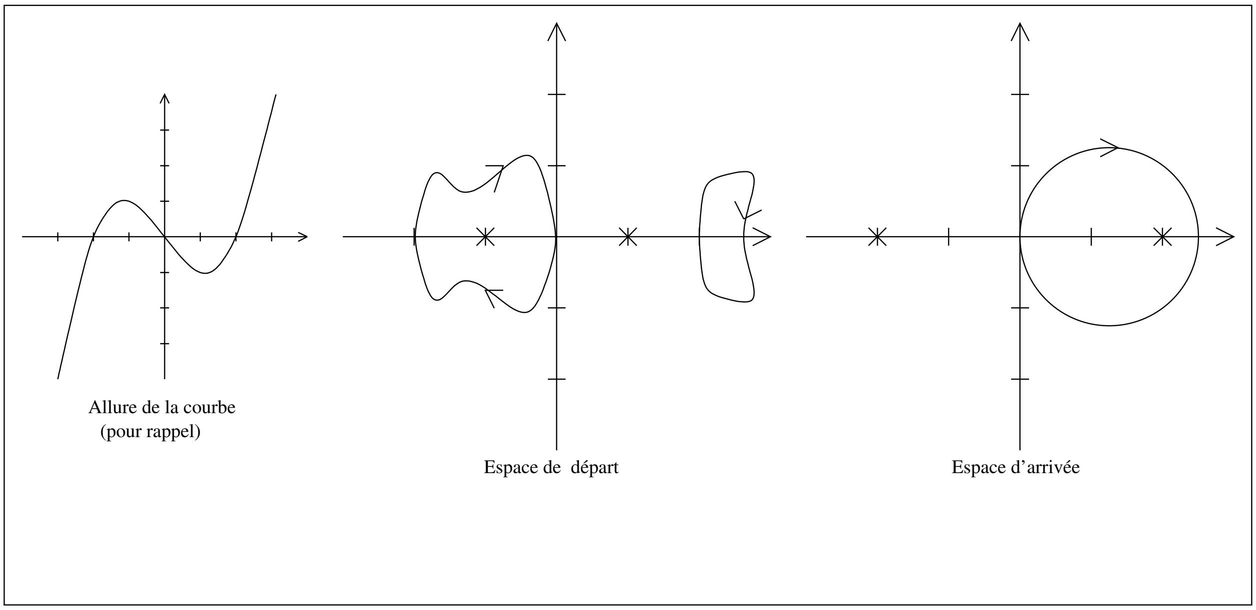
4.2.2 Groupe de monodromie

Soit $f : \mathbb{C}^n \supset U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe complexe. On suppose que f a k valeurs critiques $y_1,...,y_k$.

Soit $y \in \mathbb{C} \setminus \{y_1,...,y_k\}$, et soit $V_y = f^{-1}(y)$. Considérons un lacet γ à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{y_1,...,y_k\}$ d'extrémités y. Le fibré en bouquet de sphères $V_{\gamma(t)} = f^{-1}(\gamma(t))$ au dessus de $\gamma(t)$ est localement trivial. On a alors une transformation continue des variétés $V_{\gamma(t)}$. Comme $\gamma(0) = \gamma(1)$, on obtient un homéomorphisme φ_γ de V_y dans lui-même. Cet homéomorphisme est invariant par homotopie sur le chemin γ et ne dépend donc que de la classe de γ dans le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{y_i\},y)$. De plus $\varphi_{\gamma\gamma'} = \varphi_{\gamma'} \circ \varphi_\gamma$. En passant à l'homologie, on obtient un anti-homomorphisme: $\left\{ \begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{y_i\},y) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(H_{n-1}(V_y; A)) \\ [\gamma] & \longmapsto & \varphi_\gamma \end{array} \right.$.

Définition. *On appelle* **groupe de monodromie** *de la fonction f l'image de cet homomorphisme. L'élément correspondant à un lacet qui contourne dans le sens direct toutes les valeurs singulières est appelé* **monodromie classique**.

Exemple. Soit $\lambda > 0$, et soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^3 - 3\lambda^2 z \end{array} \right.$. La fonction f a deux points critiques $\pm\lambda$ correspondant aux valeurs critiques $\mp 2\lambda^3$. Prenons $y = 0$; alors $V_0 = \{-\sqrt{3}\lambda, 0, \sqrt{3}\lambda\}$. Le groupe $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{\pm\lambda\})$ est engendré par les classes de $\gamma_1 : t \longmapsto -2 + 2e^{2i\pi t}$ et $\gamma_2 : t \longmapsto +2 - 2e^{2i\pi t}$. Alors γ_1 agit sur V_0 en permutant 0 et $\sqrt{3}\lambda$, et γ_2 agit sur V_0 en permutant 0 et $-\sqrt{3}\lambda$. $H_0(V_0;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\sigma_0 - \sigma_{-\sqrt{3}\lambda}] \oplus \mathbb{Z}[\sigma_{+\sqrt{3}\lambda} - \sigma_0]$, où $\sigma_z : \left\{ \begin{array}{ccc} \Delta_0 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & z \end{array} \right.$. Dans cette base, γ_1 et γ_2 induisent les endomorphismes de matrice respectivement $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc le groupe de monodromie de f est $\mathfrak{S}_3$.



4.2.3 Cycle évanescent

Soit $f : \mathbb{C}^n \supset B \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe complexe, où B est une boule ouverte de centre 0. On suppose que f n'a qu'un point critique en 0 et que $f(0) = 0$.

Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors $V_z = f^{-1}(z)$ est une variété analytique de dimension $n-1$ rétracte à un bouquet de sphères.

Définition. *On appelle* **réseau de Milnor** *de f l'espace $L_f = H_{n-1}(V_y;\mathbb{Z})$ où $y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Il existe une famille continue d'applications f_t telle que

(a) $f_0 = f$

(b) pour $t > 0$, f_t n'a que des points critiques non dégénérés et les valeurs critiques sont deux à deux distinctes.

Fixons $t > 0$. Alors le nombre de points critiques de f_t est égal à $\mu(f)$. Notons-les x_i, et $y_i = f_t(x_i)$. Soit $y_0 \in \mathbb{C}$ tel que pour tout i, $|y_0| > |y_i|$. Notons $E = \{y \in \mathbb{C} \setminus \{y_1,\ldots,y_\mu\} / \ |y| < |y_0|\}$. Soient u_i des chemins dans E de y_i à y_0 sans points doubles et ne s'intersectant pas. Alors, pour τ petit, $f_t^{-1}(u_i(\tau)) \cap V$ est rétracte à une sphère réelle de centre x_i $\mathbb{S}^n$, où V est un voisinage de x_i sur lequel s'applique le lemme de Morse. Par homotopie, cette sphère $S_i(\tau)$ se transporte en une sphère $S_i = S_i(1)$ qui correspond dans $H_{n-1}(f_t^{-1}(y_0);\mathbb{Z}) \simeq L_f$ à un

cycle C_i. Quand $t \to 0$, S_i tend vers un point. C'est pourquoi on appelle C_i un **cycle évanescent.**
Théorème. *La famille* $(C_1,...,C_\mu)$ *forme une base de* L_f.
Définition. *On dit que c'est une base distinguée si les chemins arrivent en* y_0 *dans l'ordre donné par le sens direct à partir du bord du cercle..*
Exemple. On considère $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^3 \end{array} \right.$. Son nombre de Milnor est $\mu = \mu(f) = 2$. On peut prendre $f_t : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^3 - 3t^2 z \end{array} \right.$. Fixons $t > 0$. Alors $y_1 = -t$ et $y_2 = +t$. Soient $y_0 = 2i$ et pour $j \in \{1,2\}$, u_j le chemin de y_j à $2i$ faisant un segment de y_j à 0 et un autre de 0 à $2i$ (ces chemins ne respectent pas l'hypothèse de non intersection, mais on peut supposer qu'ils passent «très près» de l'axe imaginaire pur). Considérons pour l'instant y_1. Pour τ petit, $S_1(\tau)$ est formée de deux points $s_j^1(\tau) < -t$ et $s_j^2(\tau) > -t$. Pour $\tau = \frac{1}{2}$, $S_1(\frac{1}{2}) = \{-\sqrt{3}t,0\}$. Le chemin de 0 à $2i$ déforme $S_1(\frac{1}{2})$ par homotopie, ce qui ne change pas sa classe d'homologie (la condition $\forall j\ |y_0| > |y_j|$ ne sert qu'à pouvoir définir l'ordre). Le même raisonnement indique que S_2 est homotope à $\{0,\sqrt{3}t\}$. Donc les cycles évanescents de f sont $[\sigma_0 - \sigma_{-\sqrt{3}\lambda}]$ et $[\sigma_0 - \sigma_{\sqrt{3}\lambda}]$.

4.3 Somme directe et stabilisation

On va ici définir une somme directe sur les fonctions holomorphes et étudier l'effet sur leur réseau de Milnor. La somme avec une certaine classe de fonctions sera appelée stabilisation et développée plus avant.
Définition. *Soient* $f : \mathbb{C}^n \supset U \longrightarrow \mathbb{C}$ *et* $g : \mathbb{C}^m \supset U' \longrightarrow \mathbb{C}$ *telles que* $f(0) = g(0) = 0$ *soit leur seul point critique. Alors on définit la somme directe de* f *et* g *et on note* $f \oplus g$ *l'application définie par*

$$f \oplus g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{m+n} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x) + g(y) \end{array} \right.$$

4.3.1 La forme d'intersection

On se place dans la fibration de Milnor V_f. Génériquement, deux simplexes d'ordre $n-1$ s'intersectent suivant une variété de dimension 0, c'est à dire ici un nombre fini de points. Soient σ_1 et σ_2 deux simplexes d'ordre $n-1$, supposés différentiables, dans la situation du cas générique, et x un point d'intersection de σ_1 et σ_2. Soient $(e_1^1,...,e_{n-1}^1)$ et $(e_1^2,...,e_{n-1}^2)$ des bases directes respectivement de $T_x\sigma_1$ et $T_x\sigma_2$. Alors $(e_1^1,...,e_{n-1}^1,e_1^2,...,e_{n-1}^2)$ forme une base de T_xV_f. Cette base peut être directe ou indirecte. Notons $\epsilon_{\sigma_1,\sigma_2}(x) = +1$ si elle est directe et $\epsilon_{\sigma_1,\sigma_2}(x) = -1$ si elle est indirecte. On définit la forme d'intersection de σ_1 et σ_2 par $(\sigma_1,\sigma_2) = \sum_{x \in \sigma_1 \cap \sigma_2} \epsilon_{\sigma_1,\sigma_2}(x)$.
Définition. *On appelle* **forme d'intersection** *la forme bilinéaire induite sur* $H_{n-1}(V_f,\mathbb{Z}) = L_f$.
Proposition. *La forme d'intersection est une forme bilinéaire symétrique si* n *est impair et antisymétrique si* n *est pair.*

4.3.2 Somme directe et forme d'intersection

On considère de nouveau deux fonctions f et g. Soient $(\delta_1,...,\delta_\mu)$ et $(\delta'_1,...,\delta'_{\mu'})$ des bases de cycles évanescents de L_f et L_g respectivement. Posons $\Delta_{ij} = \delta_i \otimes \delta'_j$. La famille $(\Delta_{ij})_{(i,j)\in[\![1,\mu]\!]\times[\![1,\mu']\!]}$ forme une base de $L_f \otimes L_g$.

On définit sur $L_f \otimes L_g$ la forme $(\cdot,\cdot)$ par:

$$\left\{ \begin{array}{lcll} (\Delta_{ij_1},\Delta_{ij_2}) & = & \mathrm{sgn}(j_2 - j_1)^n(-1)^{nm+n(n-1)/2}(\delta'_{j_1},\delta'_{j_2}) & \text{si } j_1 \neq j_2 \\ (\Delta_{i_1j},\Delta_{i_2j}) & = & \mathrm{sgn}(i_2 - i_1)^m(-1)^{nm+m(m-1)/2}(\delta_{i_1},\delta_{i_2}) & \text{si } i_1 \neq i_2 \\ (\Delta_{i_1j_1},\Delta_{i_2j_2}) & = & 0 & \text{si } (i_2 - i_1)(j_2 - j_1) < 0 \\ (\Delta_{i_1j_1},\Delta_{i_2j_2}) & = & \mathrm{sgn}(i_2 - i_1)^{nm}(\delta_{i_1},\delta_{i_2})(\delta'_{j_1},\delta'_{j_2}) & \text{si } (i_2 - i_1)(j_2 - j_1) > 0 \\ (\Delta_{ij},\Delta_{ij}) & = & (-1)^{(n+m-1)(n+m-2)/2}(1 + (-1)^{n+m-1}) & \end{array} \right.$$

où $(\delta_i,\delta_{i'})$ et $(\delta'_j,\delta'_{j'})$ désignent les formes d'intersection respectivement sur L_f et L_g.
Théorème. *Il existe un isomorphisme naturel entre* $L_f \otimes L_g$ *muni de cette forme et* $L_{f\oplus g}$ *muni de sa forme d'intersection. Cet isomorphisme transforme la base* $(\Delta_{ij})_{(i,j)\in[\![1,\mu]\!]\times[\![1,\mu']\!]}$ *ordonnée par l'ordre lexicographique "j puis i" en une base distinguée de cycles évanescents.*

4.3.3 Stabilisation

On suppose maintenant que g est une forme quadratique non dégénérée Q. Alors $\mu' = 1$, et il existe un isomorphisme naturel entre L_f et $L_{f\otimes Q}$ transportant les bases distinguées de L_f sur les bases distinguées de $L_{f\otimes Q}$. La forme d'intersection se définit alors par, si $(\delta_1,...,\delta_\mu)$ est une base distinguée de L_f et $(\tilde{\delta}_1,...,\tilde{\delta}_\mu)$ la base distinguée correspondante de $L_{f\oplus Q}$:

$$(\tilde{\delta}_i,\tilde{\delta}_j) = \mathrm{sgn}(j-i)^m(-1)^{nm+m(m-1)/2}(\delta_i,\delta_j)$$

pour $i \neq j$. Ceci se simplifie en $(\tilde{\delta}_i,\tilde{\delta}_j) = (-1)^{m/2}(\delta_i,\delta_j)$ si m est pair.

On constate qu'il y a exactement quatre manières de stabiliser f. Deux sont symétriques et correspondent à un nombre final impair de variables, et deux sont antisymétriques et correspondent à un nombre final pair de variables. Les deux formes symétriques d'une part et les deux formes antisymétriques d'autre part sont opposées.

Dans chacun de ces deux cas, le groupe de monodromie de la stabilisée $f \oplus Q$ ne dépend pas de m: il existe un isomorphisme canonique préservant la monodromie classique entre les groupes de monodromie pour $m \in 2\mathbb{Z}$ d'une part et $m-1 \in 2\mathbb{Z}$ d'autre part. Dans le cas impair, le groupe de monodromie est engendré par des éléments d'ordre 2. On l'appelle le groupe de réflexion de f.

Si maintenant $n+m \equiv 1 \mod 4$, alors la forme d'intersection induit sur L_f une forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)_q$ appelée forme quadratique de f. De plus, pour tout cycle évanescent Δ des par la, on a $(\Delta,\Delta) = 2$.

En considérant de nouveau deux fonctions f et g quelconques, on peut décrire la forme quadratique de $f \oplus g$ en utilisant l'isomorphisme entre $L_{f\oplus g}$ et $L_f \otimes L_g$ et la base (Δ_{ij}):

$$\begin{cases} (\Delta_{ij_1},\Delta_{ij_2})_q & = & (\delta'_{j_1},\delta'_{j_2})_q & \text{si } j_1 \neq j_2 \\ (\Delta_{i_1j},\Delta_{i_2j})_q & = & (\delta_{i_1},\delta_{i_2})_q & \text{si } i_1 \neq i_2 \\ (\Delta_{i_1j_1},\Delta_{i_2j_2})_q & = & 0 & \text{si } (i_2-i_1)(j_2-j_1) < 0 \\ (\Delta_{i_1j_1},\Delta_{i_2j_2})_q & = & (\delta_{i_1},\delta_{i_2})_q(\delta'_{j_1},\delta'_{j_2})_q & \text{si } (i_2-i_1)(j_2-j_1) > 0 \\ (\Delta_{ij},\Delta_{ij})_q & = & 2 & \end{cases}$$

Remarque. Le réseau de Milnor, la forme quadratique, et le groupe de réflexion sont stables par de petites déformations préservant le nombre de Milnor de la singularité.
Exemple. On poursuit l'étude de la fonction $x \longmapsto x^3$. Ici, $n = 1$. Pour obtenir la forme quadratique, prendre $m = 0$ convient parfaitement, et limite les calculs. La forme quadratique est donc égale à la forme d'intersection. Dans la base définie plus haut, elle a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. On cherche maintenant le groupe de réflexion de f. Pour cela, on prend encore une fois une stabilisation par 0 variables. Les calculs sont donc les mêmes. Donc le groupe de symétrie de f est $\mathfrak{S}_3$.

5 Application au produit de fusion

Le paragraphe précédent avait pour but d'étudier les singularités du potentiel de fusion tronqué, ce qui va maintenant nous permettre de montrer des propriétés sur les algèbres de Verlinde.

On peut ainsi en déduire une démonstration de la conjecture de Zuber.
Théorème. *Soit $N \leq 2$ et $k \in \mathbb{N}$. Il existe un isomorphisme entre le réseau de l'algèbre de Verlinde de $SU(N)_k$ et le réseau de Milnor de la singularité du potentiel de fusion tronqué $V^0_{N,k}(x_1,...,x_{N-1})$ transportant la forme bilinéaire $B_{N,k}$ sur la forme quadratique et transformant la base $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in P_{N,k}}$ en une base distinguée de cycles évanescents. Cet isomorphisme induit un isomorphisme entre le groupe de réflexion $\Gamma_{N,k}$ et le groupe de réflexion de $V^0_{N,k}$.*

Ce théorème relie les propriétés algébriques de l'algèbre de Verlinde et les propriétés analytiques de son potentiel de fusion tronqué. Or, contrairement à une représentation de groupe, le potentiel de fusion tronqué peut être déformé continûment; on peut donc profiter de l'outil topologique pour obtenir des conclusions.
Théorème. *Le potentiel de fusion tronqué $V^0_{N+1,k}$ peut être déformé continûment en une fonction stabilisée du potentiel de fusion tronqué $V^0_{k+1,N}$ par une famille de fonctions holomorphes ayant un point critique isolé de nombre de Milnor constant.*

On peut prendre comme stabilisée la fonction:

$$F : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{C}^N & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x_1,...,x_N) & \longmapsto & V^0_{k+1,N}(x_1,...,x_k) + \sum_{i=k+1}^N x_i x_{N+k-i+1} \end{array} \right.$$

Les constructions géométriques réalisées sur les singularités sont invariantes par une telle transformation. On peut donc déduire de ces deux théorèmes la **dualité niveau-rang**:

Corollaire. Dualité niveau-rang *(conjecture de Zuber): il existe un isomorphisme*

$$\psi : L(SU(N+1)_k) \longrightarrow L(SU(k+1)_N)$$

compatible avec les formes bilinéaires et les groupes de réflexion.

Références

[1] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade et A. N. Varchenko: *Singularités des applications différentiables, tome 2*, Birkhäuser, Basel (1988)

[2] R. Carter, G. Segal, I. Macdonald: *Lecture on Lie groups and Lie algebras*, London mathematical society (1995)

[3] W. Fulton: *Young tableaux*, London mathematical society (1997)

[4] D. Gepner: *Fusion rings and geometry*, Communications in mathematical physics **141** 381-411 (1991)

[5] S. M. Gusein-Zade et A. Varchenko: *Verlinde algebras and the intersection form on vanishing cycles*, Selecta mathematica, New series **3** 79-97 (1997)

[6] J.-P. Serre: *Algèbres de Lie semi-simples complexes* (1966)

[7] J.-P. Serre: *Lie algebras and Lie groups*, Benjamin (1965)

[8] J.-B. Zuber: *Graphs and reflection groups*, Communications in mathematical physics **179** 265-294 (1996)