UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie en petite dimension

Feuille n°7 : Nombres complexes, coordonnées, barycentre

Les sujets de TD sont disponibles sur la page web :
https://lectures.lionel.fourquaux.org/2016-2017/gpd/
Exercices à savoir faire : 1, 2, 3, 8, 10, 11
Exercices recommandés : 4, 5, 6, 7, 9, 12
Lecture recommandée : dans un livre de terminale, programme 1998
(voir par exemple sur le site du cours)

Nombres complexes

Dans toute cette partie, E sera un plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ qui servira à repérer chaque point M de E par un nombre complexe z, appelé affixe de M. On notera $M(z)$ pour indiquer que M est le point d'affixe z, et réciproquement si M est un point du plan, on notera z_M son affixe.

Exercice 1

On rappelle que si $\vec{u}$ est un vecteur d'affixe u, alors la norme du vecteur $\vec{u}$ est le module du nombre complexe u, $\|\vec{u}\| = |u|$ et $\mathrm{Mes}(\widehat{(\vec{\imath}, \vec{u})}) \equiv \arg(u)[2\pi]$.

1. Montrer que si $A(a)$, $B(b)$ $C(c)$ et $D(d)$ sont quatre points du plan avec $A \neq B$, alors
$$\mathrm{Mes}(\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})}) = \arg(\frac{d-c}{b-a}).$$
2. Donner une condition pour que trois points $A(a)$, $B(b)$ $C(c)$ soient alignés, en termes de leurs affixes.
3. Retrouver le fait que la symétrie axiale d'axe $(O, \vec{\imath})$ transforme les angles de vecteurs en des angles de mesures opposées.

Exercice 2

Soit $A(a)$ et $B(b)$ deux points de E tels que la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}})$ est dans $]0, \pi[$. On construit deux carrés $OABC$ et $ODEF$ extérieurement au triangle OAD. Le but de l'exercice est de montrer que CD et AF sont orthogonaux et de même longueur.

1. Donner une démonstration à l'aide d'une rotation.
2. On cherche maintenant une seconde démonstration. Calculer l'affixe f de F et celle c de C.
3. Montrer que $\frac{f-a}{c-d} = -i$.
4. Conclure.

Exercice 3

1. Déterminer en termes d'affixe la symétrie axiale s d'axe $(O, \vec{\imath} + \vec{\jmath})$.
2. Déterminer en termes d'affixe la rotation r de centre $A(i)$ et d'angle $\pi/3$.
3. Déterminer la nature de la composée $r \circ s$ et ses éléments caractéristiques.
4. Déterminer la composée $r \circ t$ de la translation t vecteur $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ suivie de la rotation r.

Exercice 4

1. Soit deux points M et N sur le cercle unité d'affixe respective $m = e^{i\theta}$ et $n = e^{i\theta'}$. Calculer la longueur de la corde $[MN]$ en fonction de θ et θ'.
2. Soit $A(1)$, $B(e^{i2\pi/3})$ et $C(e^{i4\pi/3})$. Déterminer la nature du triangle ABC. Soit $M(e^{i\theta})$ avec $2\pi/3 \leq \theta \leq 4\pi/3$. Montrer que
$$MA = MB + MC.$$

Exercice 5

Si $A(a)$, $B(b)$ $C(c)$ et $D(d)$ sont quatre points du plan avec $A \neq B$, à quelle condition existe-t-il une rotation qui envoie le segment $[AB]$ sur le segment $[CD]$? (Il y a une démonstration avec et une démonstration sans nombres complexes.) Comment alors construire le centre de la rotation ?

Exercice 6

Identifier l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie :

1. $\mid z - i \mid = 4$
2. $\mid z - 2 + 1 \mid = -1$
3. $\mid z - 2 \mid = \mid z - 4 + i \mid$
4. $\mid z - i \mid \geq 2$ et $\mid z - 1 \mid \geq \mid z + 2 \mid$

Repères et coordonnées

Exercice 7

Démontrer à l'aide d'un calcul en coordonnés cartésiennes que les médianes d'un triangle non aplati ABC d'un plan euclidien E sont concourantes.

Barycentres

Exercice 8

Montrer le théorème de Varignon : si $ABCD$ est un quadrilatère dans un plan euclidien, les milieux des côtés forment un parallélogramme.

Exercice 9

1. Démontrer à l'aide de barycentre que les médianes d'un triangle non aplati sont concourantes.
2. Démontrer que si $ABCD$ est un tétraèdre dans un espace de dimension 3, les trois droites qui relient les milieux de deux côtés non sécants sont sécantes.

Exercice 10

Soit ABC un triangle non aplati. Soit M le barycentre de (A, a), (B, b) et (C, c).

1. On suppose que $b + c = 0$. Montrer que (AM) et (BC) sont parallèles.
2. On suppose que (AM) et (BC) sont sécantes en L. Montrer que L est le barycentre de (B, b) et (C, c).
Indication : on pourra introduire le barycentre G' de (B, b) et (C, c).

Exercice 11

Soit ABC un triangle non aplati, A' le milieu de $[BC]$ et D celui de $[AA']$. Soit E le point d'intersection des droites (AB) et (CD). Le but de l'exercice est de déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DA'}$.
2. En déduire que D est le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.
3. En déduire à l'aide de l'exercice précédent que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Pour aller plus loin

Exercice 12

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Quelle est l'affixe du milieu d'un segment $[AB]$ en fonction de celle de A et de B ?
2. Quelle est l'affixe de l'isobarycentre de n points $A_i(a_i)$?
   (*Isobarycentre signifie barycentre de points de même masse.*)
3. Donner sans calcul la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n}$, à l'aide d'une interprétation géométrique.

Exercice 13

Soit (A, B, C) un repère affine dans un plan euclidien. Les droites qui portent les côtés du triangle ABC partagent le plan en sept régions. Donner dans chacune le signe d'un système de coordonnées barycentriques.

Exercice 14 : Disposition optimale des antennes

On doit disposer sur un territoire carré de taille n un réseau d'antennes de sorte que tous les points du territoire soit à une distance inférieure à r de l'une des antennes. On supposera n très grand et on négligera donc les effets de bord.

1. On choisit d'abord un réseau de maille carrée.
   i. Déterminer la taille maximale d'un carré de la maille de sorte à satisfaire la condition de distance.
   ii. Déterminer le nombre minimal d'antenne à mettre sur un côté du territoire.
   iii. Déterminer le nombre minimale de lignes d'antennes.
   iv. En déduire le nombre minimal d'antennes nécessaire dans un maillage carré.
   v. Par un calcul d'aire, déterminer le nombre de carré dans le réseau, et retrouver le nombre minimal d'antennes nécessaires dans un maillage carré.
2. On choisit ensuite un réseau de maille triangulaire régulier.
   i. Déterminer la taille maximale d'un triangle de la maille de sorte à satisfaire la condition de distance.
   ii. Par un calcul d'aire, déterminer le nombre de triangle dans le réseau, et en déduire le nombre minimal d'antennes nécessaires dans un maillage carré.
3. Mêmes questions pour un maillage hexagonal régulier.
4. Quel est le choix le plus économique ?