UNIVERSITÉ DE RENNES 1

**Géométrie en petite dimension**

*Feuille n°6 : constructions à la règle et au compas*

Exercices à savoir faire : 1, 2, 3, 4, 8, 9, 11
Exercices recommandés : 5, 6, 7, 10, 15
Exercices « pour aller plus loin » : 12, 13, 14, 16

## Constructions élémentaires

### Exercice 1

1. Étant donnés deux points $A$ et $B$ du plan, construire à la règle et au compas la médiatrice du segment $[AB]$. (Indication : on pourra, à l'aide du compas, construire deux points équidistants de $A$ et $B$.)
2. Étant donné un cercle $\mathcal{C}$ dont on ne connaît pas le centre, déterminer son centre par une construction à la règle et au compas. (Indication : on pourra utiliser la question précédente.)

### Exercice 2

Étant données deux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$, on veut construire la bissectrice de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

1. Comment construire au compas deux points $P \in ]OA)$ et $Q \in ]OB)$ de sorte que le triangle $OPQ$ soit isocèle ?
2. Montrer que la médiatrice du segment $[PQ]$ est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{POQ}$. (Indication : utiliser une symétrie axiale bien choisie.)
3. Expliquer comment construire à la règle et au compas la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

### Exercice 3

Comment construire, au compas seul, le symétrique d'un point par rapport à une droite ? Comment construire à la règle et au compas le projeté orthogonal d'un point sur une droite ?

### Exercice 4

Étant donnés trois points $A$, $B$, $C$ non alignés, construire au compas seul le point $D$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

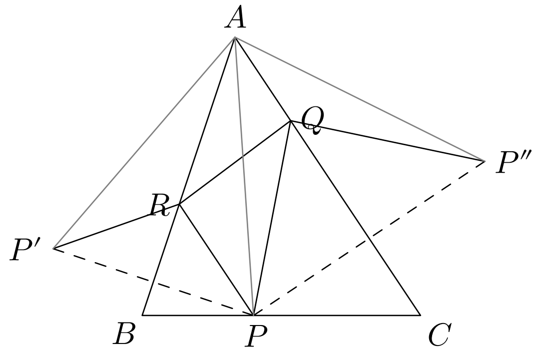
## Constructions diverses

### Exercice 5

Étant données trois droites concourantes, construire un triangle dont ce sont les médiatrices. (Indication : on pourra considérer l'application composée des trois symétries axiales correspondantes, et ses points fixes.)

## Exercice 6

On considère un triangle non plat $ABC$, sans angle obtus. On cherche à placer les points $P \in [BC]$, $Q \in [CA]$ et $R \in [AB]$ de sorte que la somme $PQ + QR + RP$ soit aussi petite que possible.

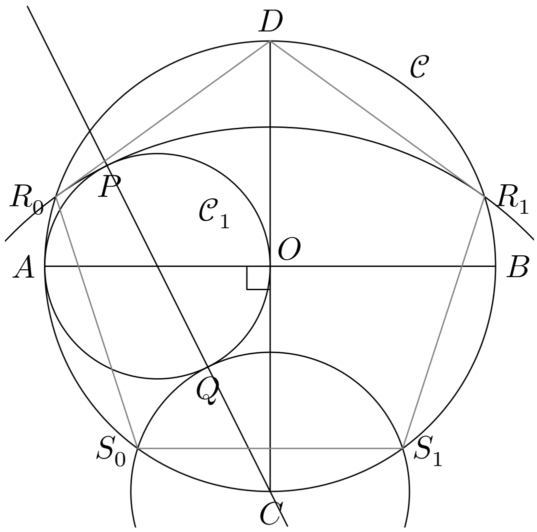



1. Notons $P'$ le symétrique de $P$ par rapport à la droite $(AB)$ et $(P'')$ le symétrique de $P$ par rapport à la droite $(AC)$. Montrer que $PQ + QR + RP = P''Q + QR + RP'$.
2. Montrer que $PQ + QR + RP \geqslant P'P''$. Quand a-t-on égalité ?
3. Si le point $P$ est fixé, quels sont les points $Q$ et $R$ qui minimisent $PQ + QR + RP$?
4. On cherche à placer le point $P$ de manière à minimiser la distance $P'P''$. Montrer que l'on a $\widehat{P'AP''} = 2\widehat{BAC}$ et $AP' = AP = AP''$.
5. Calculer $P'P''$ en fonction de $AP$ et $\widehat{BAC}$. Quel est le point $P$ qui minimise la longueur $P'P''$ ?
6. En déduire quels sont les points $P$, $Q$, $R$ pour lesquels $PQ + QR + RP$ est minimale. Comment les construire à la règle et au compas ?

## Exercice 7 : Construction du pentagone régulier

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a
$$\cos(5\theta) = 16\cos(\theta)^5 - 20\cos(\theta)^3 + 5\cos(\theta).$$
2. En déduire que
$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$
$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \qquad \sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$
On vérifiera que
$$16X^5 - 20X^3 + 5X + 1 = (X+1)(4X^2 - 2X - 1)^2.$$
3. Quelle est la longueur des côtés d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 ? celle d'un décagone régulier ?

4. On considère la construction suivante :




   Les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont deux diamètres orthogonaux d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$. Notons $\mathcal{C}_1$ le cercle de diamètre $[AO]$, et $P$ et $Q$ les points d'intersection du cercle $\mathcal{C}_1$ et de la droite passant par $C$ et par le centre de $\mathcal{C}_1$. Soient $R_0$ et $R_1$ les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et du cercle de centre $C$ passant par $P$, et soient $S_0$ et $S_1$ les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et du cercle de centre $C$ passant par $Q$. Calculer les longueurs $CP$ et $CQ$.
5. En déduire la mesure des angles $\widehat{COR_0}$ et $\widehat{COS_0}$.
6. En déduire que les points $DR_0S_0S_1R_1$ forment un pentagone régulier.

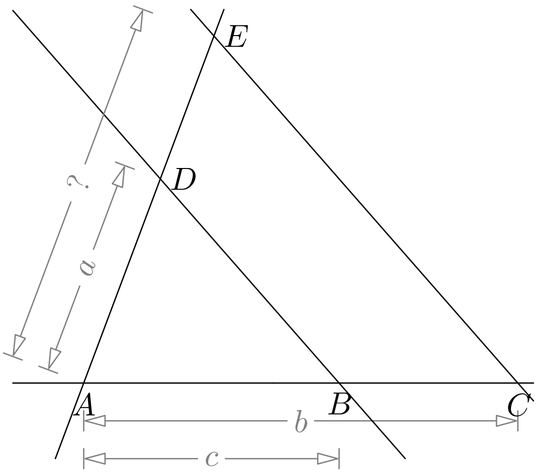
## Opérations sur les longueurs

### Exercice 8

Étant donnés quatre points $A$, $B$, $C$, $D$, construire à la règle et au compas deux points dont la distance soit $AB + CD$. Même question pour $AB - CD$.

### Exercice 9

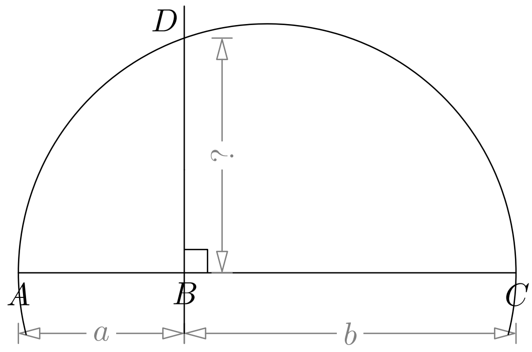
Étant données trois longueurs $a$, $b$ et $c$, construire à la règle et au compas la longueur $\frac{ab}{c}$. (Indication : on pourra considérer la figure ci-dessous.)



### Exercice 10

Étant données deux longueurs $a$ et $b$, construire à la règle et au compas la longueur $\sqrt{ab}$. (Indication : on pourra considérer la figure ci-dessous.)

Pourquoi, dans cet exercice et dans le précédent, a-t-on considéré les longueurs $\frac{ab}{c}$ et $\sqrt{ab}$ plutôt que $ab$, $\frac{a}{c}$ et $\sqrt{a}$ ?



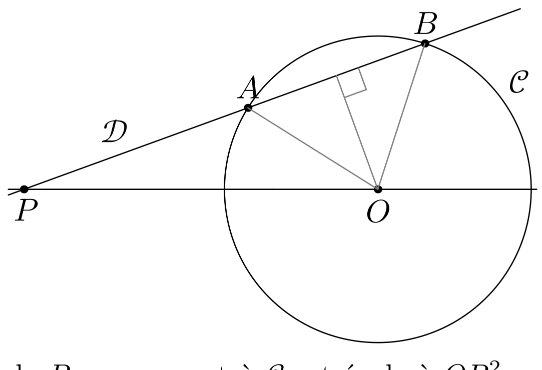

## Constructions au compas seul

La question de savoir quelles constructions peuvent être faites au compas seul (sans règle) a été étudiée dans l'espoir d'obtenir des constructions plus précises. (Il est plus facile de fabriquer un bon compas qu'une règle vraiment droite.)

D'après le théorème de Mohr et Mascheroni, les constructions réalisables au compas seul sont exactement les mêmes que celles réalisables à la règle et au compas, à condition de considérer qu'une droite est construite à partir du moment où on en connaît deux points. On peut trouver plus de renseignements sur ce théorème dans le livre *Leçons sur les constructions géométriques* d'Henri Lebesgue.

### Exercice 11 : Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $O$ et de rayon $r$, et soit $P$ un point. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par $P$ et qui coupe $\mathcal{C}$ en deux points $A$ et $B$. La *puissance* du point $P$ par rapport au cercle $\mathcal{C}$ est le produit scalaire $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$.




Montrer que la puissance de $P$ par rapport à $\mathcal{C}$ est égale à $OP^2 - r^2$. (Indication : utiliser le théorème de Pythagore.) Dépend-elle de la droite $\mathcal{D}$ choisie ?

### Exercice 12 : Inversions

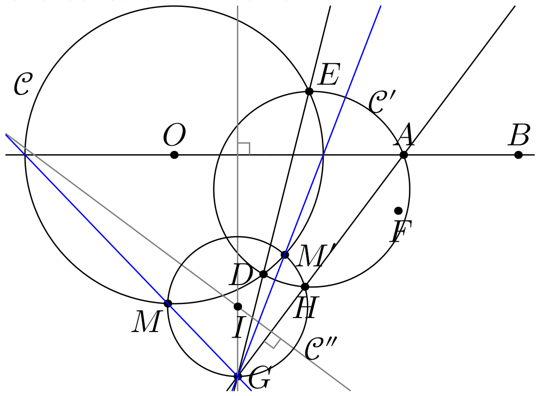
1. Si $\Omega$ est un point et si $\lambda$ est un réel non nul, l'*inversion* de centre $\Omega$ et de rapport $\lambda$ est l'application du plan privé de $P$ dans lui-même qui au point $P$ associe l'unique point $P' \in (\Omega P)$ tel que $\overrightarrow{\Omega P} \cdot \overrightarrow{\Omega P'} = \lambda$. Montrer que les inversions sont involutives, c'est-à-dire que ce sont des bijections qui sont leur propre bijection réciproque.

2. Montrer que l'ensemble des points fixes d'une inversion est un cercle.
3. Montrer que si $\mathcal{C}$ est un cercle tel que la puissance de $\Omega$ par rapport à $\mathcal{C}$ est $\lambda$, et si $\iota$ est l'inversion de centre $\Omega$ et de rapport $\lambda$, alors $\iota(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.
4. Si $\Delta$ est une droite qui ne passe pas par $\Omega$, montrer que son image par l'inversion de centre $\Omega$ et de rapport $\lambda$ est un cercle passant par $\Omega$ privé du point $\Omega$. (Indication : noter $H$ le projeté orthogonal de $\Omega$ sur $\Delta$, $\iota$ l'inversion ; en appliquant une homothétie de centre $\Omega$ bien choisie on peut supposer que $\iota(H) = H$ ; montrer alors que $P \in \Delta$ si et seulement si $\overrightarrow{\Omega\iota(P)} \cdot \overrightarrow{H\iota(P)} = 0$.)
5. Montrer que l'image par une inversion d'un cercle ne passant pas par le centre de l'inversion est un cercle. (Indication : utiliser une homothétie de même centre que l'inversion pour se ramener à la question 3..)

## Exercice 13 : Intersection d'un cercle et d'une droite

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$ et deux points distincts $A$ et $B$. On veut construire au compas seul les points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite $(AB)$.

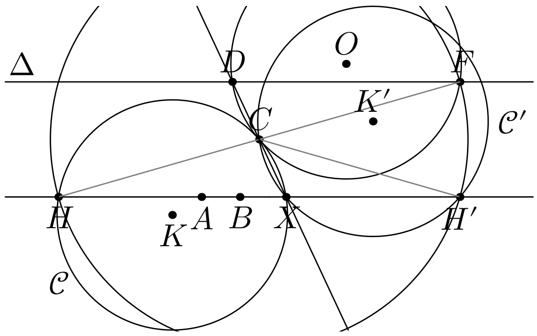
1. Si $O \notin (AB)$, expliquer comment construire ces deux points. (Indication : on pourra construire le symétrique du cercle $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $(AB)$, en utilisant l'exercice 3.)
2. Si $O \in (AB)$, on se ramène à une intersection de cercles en utilisant une inversion. Plus précisément, on considère la construction suivante.




Soit $\mathcal{C}'$ un cercle passant par $A$, qui coupe $\mathcal{C}$ en deux points $D$ et $E$. Soit $F$ le symétrique de $O$ par rapport à la droite $(DE)$, et soit $G$ un point tel que le triangle $OFG$ soit équilatéral. Montrer que $G \in (DE)$ et expliquer comment le construire au compas seul.
3. Montrer que $G$ a la même puissance par rapport à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$. En déduire qu'il existe une inversion $\iota$ de centre $G$ telle que $\iota(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ et $\iota(\mathcal{C}') = \mathcal{C}'$.
4. On note $\mathcal{C}''$ l'image de la droite $(OA)$ par l'inversion $\iota$ (en ajoutant son centre $G$ pour avoir un cercle), et on note $I$ le centre de $\mathcal{C}''$. Montrer que les droites $(GI)$ et $(OA)$ sont orthogonales.
5. Soit $H$ l'intersection du cercle $\mathcal{C}'$ et de la droite $(AG)$ qui n'est pas $A$. Montrer que $\iota(A) = H$.
6. Montrer que $I$ est sur la médiatrice du segment $[GH]$. Comment construire au compas seul deux points de cette médiatrice ?
7. Comment construire deux points de la perpendiculaire à $(OA)$ passant par $G$ ? (Indication : construire le symétrique de $G$ par rapport à $(OA)$.)
8. Montrer que $I$ est l'intersection de la médiatrice de $[GH]$ et de la perpendiculaire à $(OA)$ passant par $G$ (voir l'exercice 14 pour comment construire cette intersection au compas seul).
9. En déduire comment construire $\mathcal{C}''$. (Indication : $G \in \mathcal{C}''$.)
10. On note $M$ et $M'$ les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Montrer que $\iota(M)$ et $\iota(M')$ sont les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $(AB)$.
11. Montrer que $\iota(M)$ est l'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite $(GM)$, autre que $M$.

## **Exercice 14 :** Intersection de deux droites

On considère quatre points distincts $A$, $B$, $C$, $D$, tels que les droites $(AB)$ et $(CD)$ soient sécantes en un point $X$. On veut construire le point $X$ au compas seul.




1. À l'aide de l'exercice 4, expliquer comment construire la parallèle $\Delta$ à $(AB)$ passant par $D$.
2. Construire un point $O$ équidistant de $C$ et $D$, et $F$ le point d'intersection du cercle de centre $O$ passant par $C$ et $D$ avec ma droite $\Delta$, autre que $D$. On note $H$ et $H'$ les points d'intersection du cercle de centre $C$ passant par $F$ avec la droite $(AB)$. Comment construire ces points au compas seul ?
3. Construire le centre $K$ de $\mathcal{C}$, un des deux cercles de rayon $OC$ passant par $C$ et $H$. De même, construire le centre $K'$ de $\mathcal{C}'$, un des deux cercles de rayon $OC$ passant par $C$ et $H'$. Montrer que le point $C$ est commun à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
4. Notons $\alpha$ la mesure de l'angle $\widehat{AXD}$. En supposant que les points sont disposés comme sur la figure ci-dessus, montrer que :
   (i) la mesure de $\widehat{CDF}$ est $\alpha$ ;
   (ii) la mesure de $\widehat{COF}$ est $2\alpha$ ;
   (iii) la mesure de $\widehat{CKH}$ est $2\alpha$ ;
   (iv) la mesure de $\widehat{CK'H'}$ est $2\alpha$.
5. Notons $\xi$ le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et $(AB)$ autre que $C$. Montrer que la mesure de l'angle $\widehat{C\xi H}$ est $\alpha$. En déduire que $\xi = X$.
6. Montrer que les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont $C$ et $X$.

## **Exercice 15**

La notion de « construction au compas » est un peu ambiguë. On distingue :

- le *compas traçant*, qui permet, à partir de deux points $A$ et $B$, de construire le cercle de centre $A$ passant par $B$ ;
- le *compas transporteur*, qui permet, à partir de trois points $A$, $B$ et $C$, de construire le cercle de centre $A$ et de rayon $BC$ (il permet de « transporter » la distance $BC$, d'où son nom).

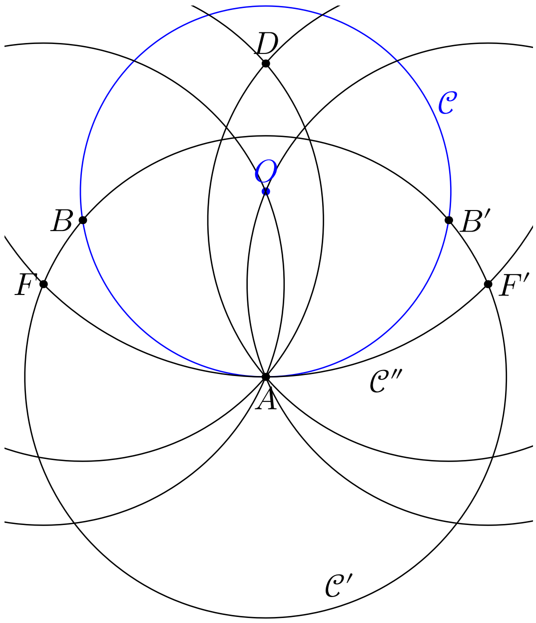
Le compas transporteur permet évidemment toutes les constructions possibles au compas traçant. Le but de cet exercice est de montrer que toute construction au compas transporteur peut être transformée en une construction au compas traçant.

On considère trois points $A$, $B$ et $C$, deux à deux distincts.

1. Construire, au compas traçant, deux points de la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Construire, au compas traçant, le symétrique $C'$ de $C$ par rapport à la médiatrice du segment $[AB]$.
3. Montrer que $AC' = BC$.
4. Construire, au compas traçant, le cercle de centre $A$ et de rayon $BC$.

## Exercice 16

La question de trouver le centre d'un cercle à la règle et au compas a été étudiée à l'exercice 1. On étudie maintenant une construction au compas seul.




Soit $\mathcal{C}$ un cercle (dont on ne connaît pas le centre). Soit $A$ un point de $\mathcal{C}$, et soit $\mathcal{C}'$ un cercle de centre $A$, qui coupe $\mathcal{C}$ en deux points $B$ et $B'$. Les cercles de centres $B$ et $B'$ passant par $A$ se coupent en un autre point $D$. Notons $\mathcal{C}''$ le cercle de centre $D$ passant par $A$, et notons $F$ et $F'$ les points d'intersection de $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$. Finalement, notons $\Omega$ l'autre point d'intersection des cercles de centres $F$ et $F'$ passant par $A$.

1. Notons $O$ le centre du cercle $\mathcal{C}$, $r$ son rayon, $a$ le rayon du cercle $\mathcal{C}'$. Montrer que l'on a $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = r^2 - a^2$. (Indication : considérer la puissance du point $O$ par rapport au cercle de centre $B$ passant par $A$.)
2. En déduire que $\overrightarrow{DA} = \frac{a^2}{r^2}\overrightarrow{OA}$ et $DA = \frac{a^2}{r}$.
3. En considérant la puissance de $D$ par rapport au cercle de centre $F$ passant par $A$, montrer de même que $\overrightarrow{\Omega A} = \frac{a^2}{DA^2}\overrightarrow{DA}$.
4. En déduire que $\Omega = O$.