UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie en petite dimension

Corrigé de l'exercice 7 de la feuille de TD n°6

Exercice 7 : Construction du pentagone régulier

Question 1

Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(5\theta) = 16\cos(\theta)^5 - 20\cos(\theta)^3 + 5\cos(\theta).$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\cos(5\theta) &= \mathrm{Re}(e^{5i\theta}) \\
&= \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^5) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(\cos\theta)^k(i\sin\theta)^{5-k}\right) \\
&= \binom{5}{0}(\cos\theta)^5 - \binom{5}{2}(\cos\theta)^3(\sin\theta)^2 + \binom{5}{4}(\cos\theta)(\sin\theta)^4 \\
&= (\cos\theta)^5 - 10(\cos\theta)^3(1-(\cos\theta)^2) + 5(\cos\theta)(1-(\cos\theta)^2)^2 \\
&= 16(\cos\theta)^5 - 20(\cos\theta)^3 + 5\cos\theta.
\end{aligned}$$

Question 2

En déduire que

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \qquad \sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

On vérifiera que

$$16X^5 - 20X^3 + 5X + 1 = (X+1)(4X^2 - 2X - 1)^2.$$

En développant, on trouve :

$$\begin{aligned}
(X+1)(4X^2-2X-1)^2 &= (X+1)(16X^4 - 16X^3 - 4X^2 + 4X + 1) \\
&= 16X^5 - 20X^3 + 5X + 1.
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, et comme

$$\cos\pi = \cos(3\pi) = -1,$$

$x = \cos\frac{\pi}{5}$ et $x = \cos\frac{3\pi}{5}$ sont des solutions de l'équation

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = 0.$$

Or, d'après la factorisation de $16X^5 - 20X^3 + 5X + 1$ démontré ci-dessus, les solutions de cette équation sont

$$x = -1 \qquad \text{et} \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Comme $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{5} < \pi$ et comme la fonction cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, on a

$$-1 < \cos\frac{3\pi}{5} < 0 < \cos\frac{\pi}{5} < 1,$$

donc

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(2\theta) = \operatorname{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^2) = (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 = 1 - 2(\sin\theta)^2,$$

donc $(\sin\theta)^2 = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$. En particulier, on a

$$\left(\sin\frac{\pi}{10}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{8} \qquad \text{et} \qquad \left(\sin\frac{3\pi}{10}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{8}.$$

Comme

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{8} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{8},$$

on en déduit

$$\sin\frac{\pi}{10} \in \left\{\pm\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right\} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{3\pi}{10} \in \left\{\pm\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right\}.$$

Finalement, comme la fonction sin est à valeurs strictement positives sur $]0, \pi[$, donc en $\frac{\pi}{10}$ et en $\frac{3\pi}{10}$, on en déduit

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Question 3

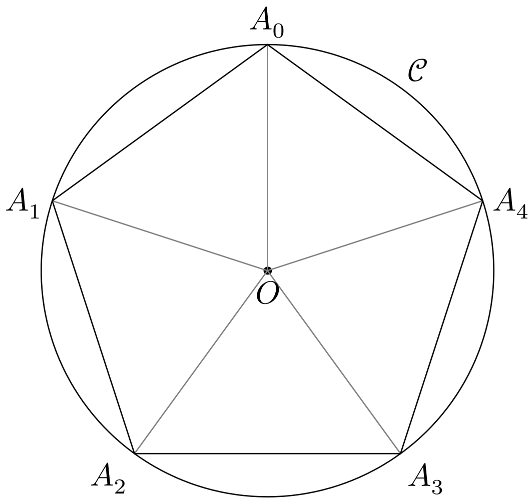
Quelle est la longueur des côtés d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 ? celle d'un décagone régulier ?

Soit $A_0A_1A_2A_3A_4$ un pentagone régulier inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. Pour simplifier les notations, on pose $A_5 = A_0$. Les triangles OA_iA_{i+1}, pour $0 \leqslant i \leqslant 4$, sont isocèles en O (car les points A_i sont tous sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O), et ils sont isométriques car ils ont les mêmes longueurs de côtés (car le pentagone est régulier). On en déduit en particulier que les angles $\widehat{A_iOA_{i+1}}$ sont tous égaux, et donc que leur mesure est $\frac{2\pi}{5}$.
Le théorème d'Al-Kashi appliqué au triangle OA_0A_1 donne alors

$$\begin{aligned}
A_0A_1^2 &= OA_0^2 + OA_1^2 - 2\,OA_0\,OA_1 \cos\widehat{A_0OA_1} \\
&= 2 - 2\cos\frac{2\pi}{5} \\
&= 2 - 2\left(2\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^2 - 1\right) \\
&= 4 - 4\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^2 \\
&= 4 - 4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 \\
&= \frac{5-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que la longueur des côtés d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 est :

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

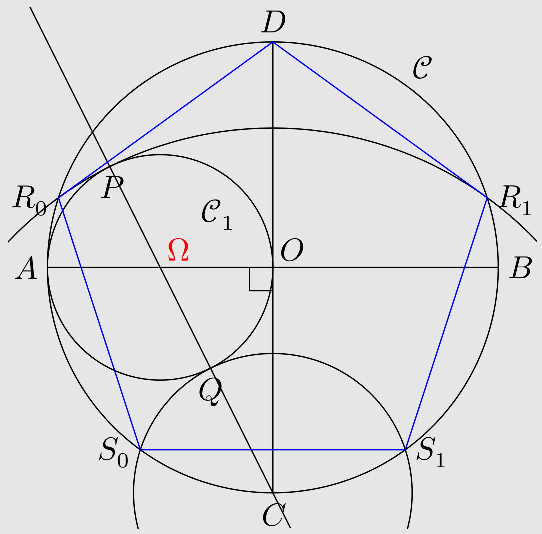


Un raisonnement analogue dans la cas du décagone régulier donne que la longueur des côtés d'un décagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 est

$$\sqrt{2-2\cos\frac{2\pi}{5}} = 2\sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Question 4

On considère la construction suivante :



Les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont deux diamètres orthogonaux d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Notons $\mathcal{C}_1$ le cercle de diamètre $[AO]$, et P et Q les points d'intersection du cercle $\mathcal{C}_1$ et de la droite passant par C et par le centre de $\mathcal{C}_1$. Soient R_0 et R_1 les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et du cercle de centre C passant par P, et soient S_0 et S_1 les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et du cercle de centre C passant par Q. Calculer les longueurs CP et CQ.

Notons Ω le milieu du segment $[OA]$. On a alors $O\Omega = \frac{1}{2}OA$. D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle $OC\Omega$, on a

$$C\Omega = \sqrt{OC^2 + O\Omega^2} = OA\sqrt{1+\frac{1}{4}} = OA\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Comme $\Omega P = \Omega Q = O\Omega = \frac{1}{2}OA$, puisque O, P et Q sont des points du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre Ω, et comme les points C, Q, Ω et P sont alignés par construction de P et Q, on en déduit

$$CP = \frac{1+\sqrt{5}}{2}OA \qquad \text{et} \qquad CQ = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}OA$$

si P et Q sont choisis comme sur la figure (sinon, échanger P et Q).

Question 5

En déduire la mesure des angles $\widehat{COR_0}$ et $\widehat{COS_0}$.

On a $CR_0 = CP = \frac{1+\sqrt{5}}{2}OA$ par construction. D'après le théorème d'Al-Kashi appliqué au triangle COR_0, on a

$$\begin{aligned}\cos\widehat{COR_0} &= \frac{OC^2 + OR_0^2 - CR_0^2}{2\,OC\,OR_0} \\ &= \frac{2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2} \\ &= \frac{1-\sqrt{5}}{4},\end{aligned}$$

donc la mesure de l'angle $\widehat{COR_0}$ est $\frac{3\pi}{5}$.
De même, avec le triangle COS_0, on trouve

$$\cos\widehat{COS_0} = \frac{2 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

donc la mesure de l'angle $\widehat{COS_0}$ est $\frac{\pi}{5}$.

Question 6

En déduire que les points $DR_0S_0S_1R_1$ forment un pentagone régulier.

Si les points sont choisis comme sur la figure, on a

$$\begin{aligned}(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OR_0}}) &= (\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}}) + (\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OR_0}}) = \pi - \frac{3\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} \pmod{2\pi} \\ (\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OS_0}}) &= (\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}}) + (\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OR_0}}) = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5} \pmod{2\pi}\end{aligned}$$

et par symétrie par rapport à la droite (CD) (qui échange R_0 avec R_1, et S_0 avec S_1, puisque le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[CD]$ et les cercles de centre C passant par P et Q respectivement ont leur centre sur cette droite, et en particulier sont invariants par cette symétrie), on en déduit

$$(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OR_1}}) = -\frac{2\pi}{5} \pmod{2\pi} \qquad \text{et} \qquad (\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OS_1}}) = -\frac{4\pi}{5} \pmod{2\pi},$$

donc les points $DR_0S_0S_1R_1$ forment bien un pentagone régulier.