UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie en petite dimension

Feuille n°4 : Aires, cas d'égalité et découpages

Les sujets de TD sont disponibles sur la page web :
https://lectures.lionel.fourquaux.org/2016-2017/gpd/

Aires

Exercice 1

On considère un secteur circulaire $\mathscr{C}$ de sommet O sur l'arc $\widehat{AB}$ d'angle $\theta \in]0, \pi/2[$ et de rayon r. On note E le point d'intersection de la tangente à l'arc en A (c'est à dire la droite orthogonale à (OA) passant par A, qui ne rencontre le cercle de centre O et de rayon r qu'en un seul point) et de la droite (OB).

1. À l'aide d'un axiome de la fonction d'aire, montrer que si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont deux parties bornées d'un espace euclidien E telles que $\mathscr{P}$ est incluse dans $\mathscr{Q}$, alors
$$\mathrm{Mes}(\mathscr{P}) \leq \mathrm{Mes}(\mathscr{Q}).$$
2. Déterminer l'aire du secteur circulaire $\mathscr{C}$.
3. Déterminer l'aire des triangles OAB et OAE.
4. Démontrer que pour tout nombre réel $\theta \in]0, \pi/2[$,
$$\sin\theta \leq \theta \leq \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Exercice 2

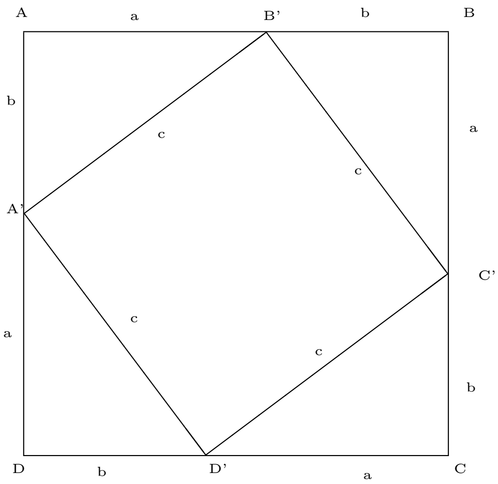
Soit ABC un triangle dans un plan euclidien orienté E. On notera $a = BC, b = CA$ et $c = AB$. Notons p la moitié de son périmètre.

1. Montrer que
$$\begin{aligned} 2p(p-a) &= bc + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ 2(p-b)(p-c) &= bc - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$
2. En déduire que l'aire du triangle ABC est $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Théorème de Pythagore

Exercice 3

Soit $\mathscr{T}$ un triangle rectangle dont les côtés adjacents à l'angle droit mesurent a et b, et l'hypoténuse c. On construit dans un carré $ABCD$ de côté $a+b$ les points $A'B'C'D'$ sur les côtés aux distances indiquées des extrémités.



Montrer que $A'B'C'D'$ est un carré. En déduire une démonstration du théorème de Pythagore.

Exercice 4

1. Soit ABC un triangle équilatéral de côté a. Soit B' le milieu de $[AC]$. Soit L le point de $[BB']$ tel que $B'L = a/2$. Soit d la droite orthogonale à (BB') qui passe par L. Soit M un point d'intersection de d avec le cercle de diamètre $[BB']$. Calculer BM.

Découpage

Le *théorème de Bolyai* affirme que deux polygones de même aire peuvent toujours être obtenus l'un à partir de l'autre par découpage et recollement. On va étudier le découpage d'un triangle équilatéral pour obtenir un carré de même aire.

Exercice 5

On considère un triangle équilatéral ABC que l'on souhaite découper de façon à pouvoir le transformer en un rectangle, voire un carré.

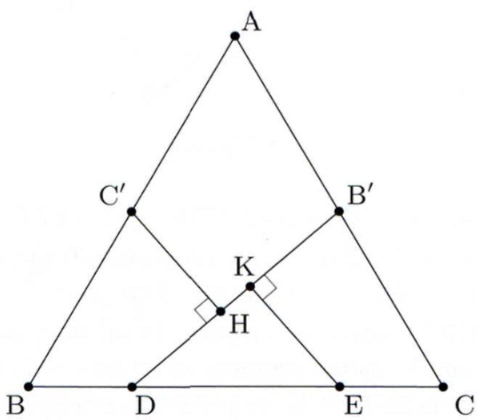


Fig. a

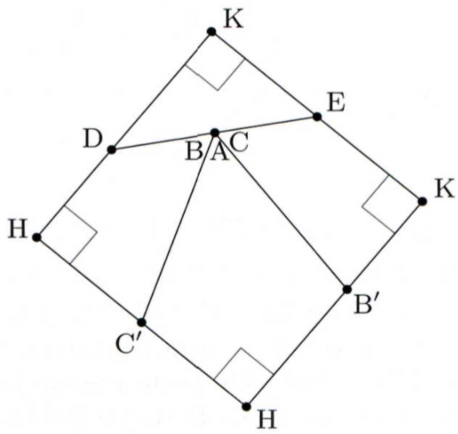


Fig. b

1. On part du triangle équilatéral ABC et on place un point D sur $[BC]$ tel que $0 < BD < \frac{1}{2}BC$. On construit ensuite E sur le même segment tel que $DE = \frac{1}{2}BC$. On joint D au milieu B' de $[AC]$, et on appelle H et K les projetés orthogonaux de C' et E sur $[B'D]$.
On suppose le découpage effectué selon le modèle des figures a et b donne un rectangle sur

la figure b. Refaire des figures en choisissant D proche de B. Montrer en utilisant le fait que la figure b est un rectangle avec coïncidence de certains points que :

- B' et C' sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$,
- $DE = \frac{1}{2}BC$,
- $KE = HC'$,
- $DH = KB'$.

2. Montrer que $DEB'C'$ est un parallélogramme.
3. En déduire que les triangles $BC'D$ et $CB'E$ ont deux côtés et un angle égaux. Peut-on en déduire qu'ils sont isométriques ?
4. On part du triangle équilatéral ABC et on place un point D sur $[BC]$ tel que $0 < BD < \frac{1}{2}BC$. On construit ensuite E sur le même segment tel que $DE = \frac{1}{2}BC$. On joint D au milieu B' de $[AC]$, et on appelle H et K les projetés orthogonaux de C' et E sur $[B'D]$.
   Montrer que l'on obtient bien un rectangle en découpant la figure comme indiqué sur les figures c et d .

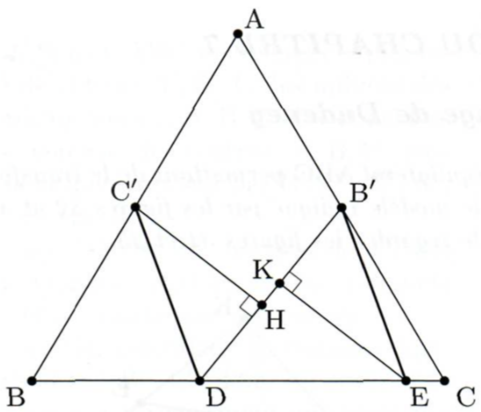


Fig. c

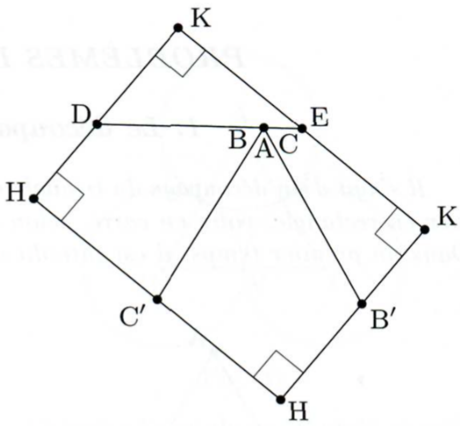


Fig. d

5. Calculer, en fonction du côté a du triangle, les longueurs des côtés du rectangle obtenu dans le cas où les points D et E sont au quart et trois quart du segment $[BC]$. Ce rectangle est-il un carré ?
6. Déterminer la position de D pour laquelle on obtient effectivement un carré. On précisera la longueur $B'D$ à l'aide d'un calcul d'aire.

Transformations, déplacements

Exercice 6

1. Une translation transforme-t-elle une droite en une droite qui lui est parallèle ?
2. Montrer qu'une translation conserve le parallélisme, c'est à dire qu'elle transforme deux droites parallèles d_1 d_2 en deux droites parallèles d'_1 d'_2.
3. Reprendre les questions pour une rotation.

Exercice 7

Soit E un plan euclidien et A et B deux points de E

1. Déterminer la composée de l'homothétie de centre A et de rapport 2 avec l'homothétie de centre B et de rapport 1/2. On pourra construire l'image de quelques points.
2. Déterminer la composée de l'homothétie de centre A et de rapport 2 avec l'homothétie de centre B et de rapport 3.
3. Que dire en général de la composé de deux homothéties ?

4. Que dire de la composée d'une homothétie et d'une translation ?

Exercice 8

1. Soit d une droite d'un plan euclidien orienté E de vecteur directeur $\vec{u}$. Soit $\vec{v}$ un vecteur orthogonal à $\vec{u}$. Déterminer la composée de la symétrie axiale s_d d'axe d avec la translation t de vecteur $\vec{u}$. *Indication : on pourra décomposer la translation comme composée de deux symétries bien choisies.*
2. Soit d une droite d'un plan euclidien orienté E de vecteur directeur $\vec{u}$. Soit A un point de d. Déterminer la composée de la symétrie axiale s_d d'axe d avec la rotation r de centre A et d'angle $\pi/4$.

Pour aller plus loin

Exercice 9

Soit ABC un triangle. Notons Δ_A, Δ_B et Δ_C les bissectrices des angles en A, B, C respectivement. On note aussi a, b, c les longueurs BC, CA et AB respectivement, et α, β, γ les mesures des angles (non orienté) $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ respectivement.

1. Montrer que si Δ_A est parallèle à Δ_B, alors le triangle ABC est plat. On supposera dans la suite de l'exercice que ce triangle n'est pas plat.
2. Montrer que pour tout point P de Δ_A, la distance de P à la droite (AB) est égale à la distance de P à la droite (AC).
3. En déduire que le point d'intersection de Δ_A et de Δ_B, que l'on notera Ω, est équidistant de (AB), (BC) et (CA). On admettra que cela permet de démontrer que $\Omega \in \Delta_C$.
4. On note A' le projeté orthogonal de Ω sur la droite (BC), c'est-à-dire l'unique point $A' \in (BC)$ tel que $(\Omega A') \perp (BC)$. De même, on note B' le projeté orthogonal de Ω sur (CA) et C' le projeté orthogonal de Ω sur (AB). Montrer que $AB' = AC'$.
5. On admet que $A' \in [BC]$, $B' \in [CA]$, $C' \in [AB]$. Montrer que
$$2AB' + a = 2AB' + A'B + A'C = 2AB' + BC' + CB' = b + c.$$
6. On note $p = \frac{a+b+c}{2}$. Montrer que $AB' = p - a$.
7. On note $r = \Omega A'$. Montrer que
$$r = (p-a)\tan\frac{\alpha}{2} = (p-b)\tan\frac{\beta}{2} = (p-c)\tan\frac{\gamma}{2}.$$
8. En utilisant les formules d'addition pour sin et cos, montrer que
$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}} \quad \text{et} \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}}.$$
9. Montrer que $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$. En déduire que
$$\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\tan\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}}.$$
10. En déduire que $(p-a)(p-b)(p-c) = r^2 p$, puis que l'aire du triangle ABC est
$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$