UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie en petites dimensions

Feuille n°3 :
Trigonométrie, produit scalaire

Manipulation des fonctions trigonométriques

Exercice 1

Soit θ un nombre réel.

1. À l'aide des formules d'addition, calculer $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
2. Vérifier la validité des formules obtenues pour $\theta = \pi/2$ et $\theta = \pi/3$.
3. Calculer $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
4. Vérifier la validité des formules obtenues pour $\theta = \pi/2$ et $\theta = \pi/3$.

Exercice 2

1. Exprimer $\cos(a)\cos(b)$ en fonction de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$.
2. En effectuant un changement de variables à préciser, montrer que pour tous réels p et q on a :
$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$
3. En déduire les solutions de l'équation suivante :
$$\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0.$$

Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}$.
2. À l'aide une méthode similaire, résoudre l'équation $\cos(x) + \sin(x) = 1$.

Un peu de géométrie plane

Exercice 4

Construire à la règle et au compas un angle de mesure $\pi/12$.

Exercice 5

1. On dit qu'un angle est inscrit dans un cercle si son sommet appartient à ce cercle. Démontrer le théorème des angles inscrits :

   Deux angles de vecteurs inscrits dans un cercle interceptant le même arc de cercle sont de même mesure.
2. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles ayant deux points d'intersection I et J. Soient A et M deux points distincts de $\mathcal{C}_1$ (et différents de I et J). On note B le point d'intersection de la droite (AJ) avec $\mathcal{C}_2$ et N le point d'intersection de la droite (MJ) avec $\mathcal{C}_2$.

   En considérant la somme des mesures des angles des triangles AIB et MIN, montrer que $\text{Mes}\,\widehat{AIB} = \text{Mes}\,\widehat{MIN}$.

Exercice 6

Soit E un plan euclidien orienté, muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé direct.

1. Soit n un entier naturel supérieur à 3. Exprimer à l'aide des fonctions trigonométriques cos et sin, le périmètre p_n d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique (c'est à dire le cercle de centre 0 et de rayon 1.)
2. On rappelle que pour tout $\theta \in]0, \pi/2[$,

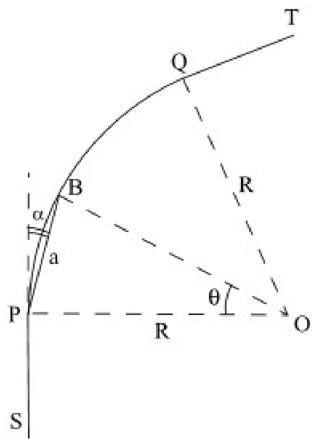
   $$\theta \cos\theta \leq \sin\theta \leq \theta.$$

   Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et déterminer cette limite.

Exercice 7

1. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, P et Q deux points de $\mathcal{C}$ non diamétralement opposés. Calculer Mes$\widehat{OPQ}$ en fonction de Mes$\widehat{POQ}$.
2. Soit d la droite perpendiculaire à (OP) passant par P. En calculant la distance entre O et tout point M de la droite d, montrer que P est l'unique point d'intersection entre d et $\mathcal{C}$. La droite d est appelée *tangente au cercle $\mathcal{C}$ en P.*

   Une équipe d'ingénieurs doit tracer une route. Pour faciliter les virages, il faut que ceux-ci soient tracés en arc de cercle : cela permet aux conducteurs de ne pas avoir à bouger le volant pendant le virage. Il faut aussi que le virage ne soit pas trop serré pour éviter les sorties de route.



   Sur la figure, cela signifie que R doit être assez grand. En l'absence d'outils de cette dimension, les ingénieurs doivent donc repérer quelques points de l'arc de cercle, y placer des piquets, et finir le tracé en joignant ces points.

3. Quelle doit être la valeur des mesures des angles $\widehat{SPO}$ et $\widehat{OQT}$ si on veut une route sans angle brusque ?
4. On choisit de mettre des piquets tous les a mètres (mesurés en ligne droite) sur l'arc de cercle. Soit B la position du premier piquet. Les ingénieurs peuvent facilement reproduire l'angle $\widehat{SPB}$ car il se situe sur la zone de travail. Exprimer $\alpha = \pi - \text{Mes}\,\widehat{SPB}$ en fonction de $\theta = \text{Mes}\,\widehat{POB}$
5. Exprimer α en fonction de a et R.
6. Expliquer, pour conclure, comment placer le premier piquet sur l'arc de cercle, connaissant les longueurs a et R.

Produits scalaire

Exercice 8

Soit E un plan et $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère. On considère l'application

$$\phi : (\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \overrightarrow{u'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) \mapsto xx' + 3yy'.$$

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire.
2. Déterminer un repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ du plan orthonormé pour ce produit scalaire.
3. Calculer $\phi(X\overrightarrow{I} + Y\overrightarrow{J}, X'\overrightarrow{I} + Y'\overrightarrow{J})$.

Exercice 9

Soit E un plan et $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère. Soient α et β des nombres réels. On considère l'application

$$\varphi : (\overrightarrow{u}\left(x, y\right), \overrightarrow{u'}\left(x', y'\right)) \mapsto \alpha xx' + \beta yy'$$

1. Montrer que φ est un bilinéaire et symétrique.
2. Montrer que φ est un produit scalaire si, et seulement si, α et β sont strictement positifs.
3. Montrer que l'application

$$\psi : (\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \overrightarrow{u'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) \mapsto 2xx' + yy' + xy' + x'y$$

   est un produit scalaire. [Indication : Chercher une identité remarquable.]

Exercice 10

Soit E un plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(0, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de norme 1 et de coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ dans le repère $(0, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{I} \cdot \overrightarrow{u}$.
2. Calculer, à l'aide de la définition de la fonction cosinus, la quantité $||\overrightarrow{I}||\,||\overrightarrow{u}||\cos(\widehat{\overrightarrow{I}, \overrightarrow{u}})$.
3. Reprendre les calculs précédents, sans l'hypothèse que $\overrightarrow{u}$ est de norme 1.