UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie en petite dimension

Examen de juin 2017 (corrigé)

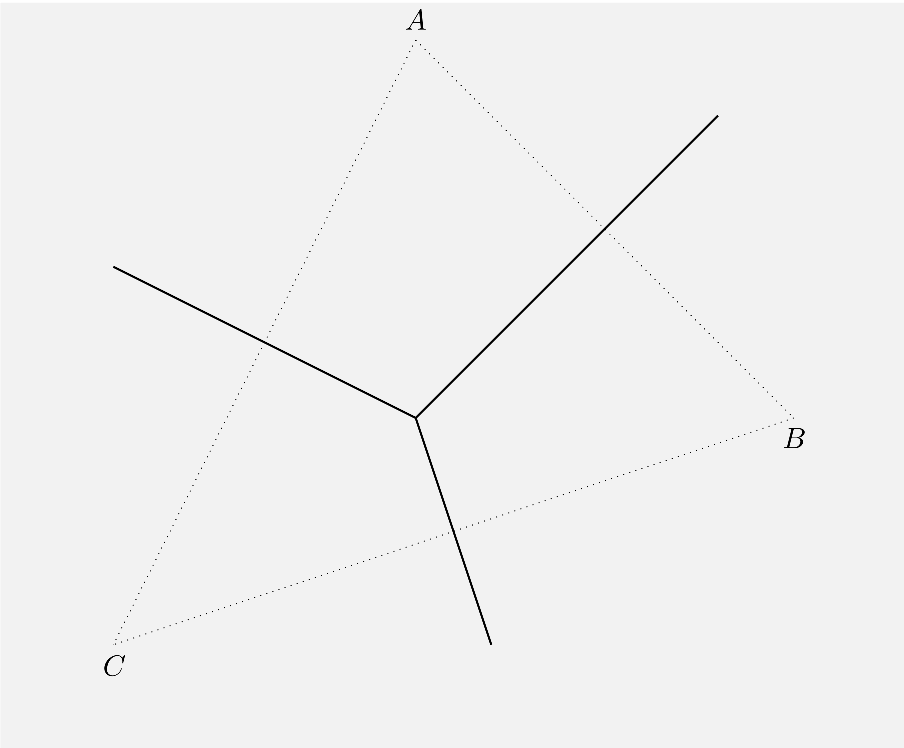
Exercice 1

Soit A, B, C, D quatre points du plan euclidien E. Le but de l'exercice est de construire le diagramme de Voronoï des points A, B, C, D. On rappelle qu'il consiste en une partition de l'espace E en quatre parties, chacune associée à l'un des quatre points. La partie associée à A ne doit contenir que des points plus proches de A que des autres points B, C et D. De façon générale, la partie associée à un point ne doit contenir que des points plus proches de ce point que des autres points.

Question 1

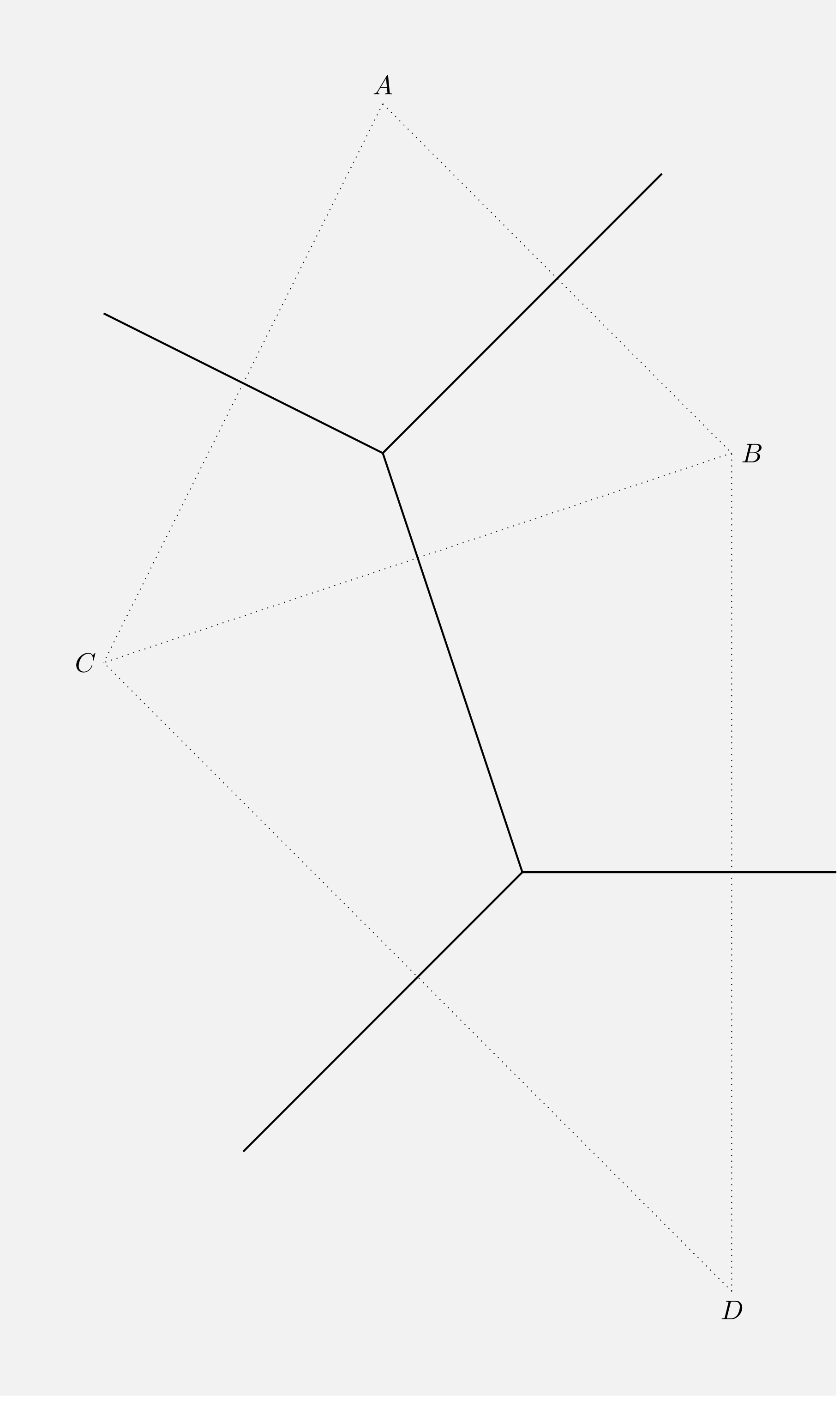
Construire le diagramme de Voronoï de A, B C. On précisera la nature des éléments construits et on donnera leur propriété utilisée (par exemple : on construit le cercle de centre A et de rayon AB car tous les points de ce cercle sont à la même distance de A que le point B.). On ne demande pas de démonstration complète de l'exactitude de la construction.

On trace la médiatrice du segment AB, qui partionne l'espace en deux demi-plans, le lieu des points plus proches de A que de B et le lieu des points plus proches de B que de A. On trace ensuite la médiatrice des segments $[BC]$ et $[AC]$. On détermine les trois ensembles du diagramme de Voronoï des trois points A, B et C en utilisant pour frontières des segments dans les trois médiatrices construites.



Question 2

Construire le diagramme de Voronoï de A, B C D.



Aucune frontière des cellules de Voronoï n'est portée par la médiatrice de $[AD]$.

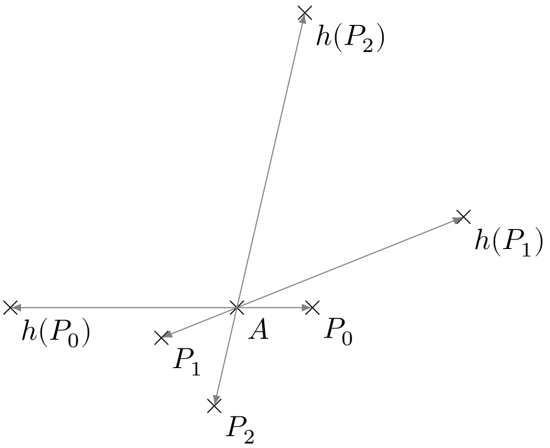
Exercice 2

Soit E un plan euclidien orienté. Soit A un point de E, d une droite de E de vecteur directeur $\vec{u}$. Définir précisément (tout énoncé inexact ou incomplet sera compté comme faux) ce qu'est

Question 1

l'homothétie de centre A et de rapport -3. Faire une figure pour représenter l'image de trois points par cette homothétie.

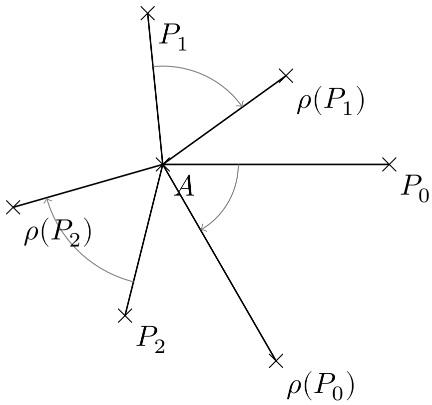
C'est l'application h de E dans E, qui au point P associe l'unique point $Q = h(P)$ tel que $\overrightarrow{AQ} = -3\overrightarrow{AP}$.



Question 2

la rotation de centre A et d'angle $-\pi/3$. Faire une figure pour représenter l'image de trois points par cette rotation.

C'est l'application ρ de E dans E, qui au point P associe l'unique point $R = \rho(P)$ tel que $AR = AP$ et $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AR}}) = -\frac{\pi}{3}$.

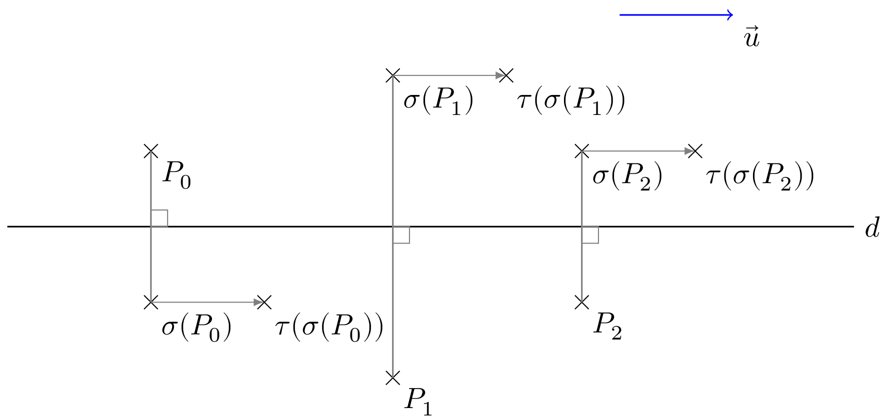


Question 3

la symétrie glissée d'axe d et de vecteur $\vec{u}$. Faire une figure pour représenter l'image de trois points par cette symétrie glissée.

C'est la composée (dans n'importe quel ordre) de la réflexion σ (i.e. symétrie axiale) par rapport à la droite d et de la translation τ de vecteur $\vec{u}$.

Rappelons que la réflexion par rapport à la droite d est l'application de E dans E, qui au point P associe l'unique point S tel que d soit la médiatrice du segment $[PS]$. Rappelons aussi que la translation de vecteur $\vec{u}$ et l'application de E dans E, qui au point P associe l'unique point T tel que $\overrightarrow{PT} = \vec{u}$.

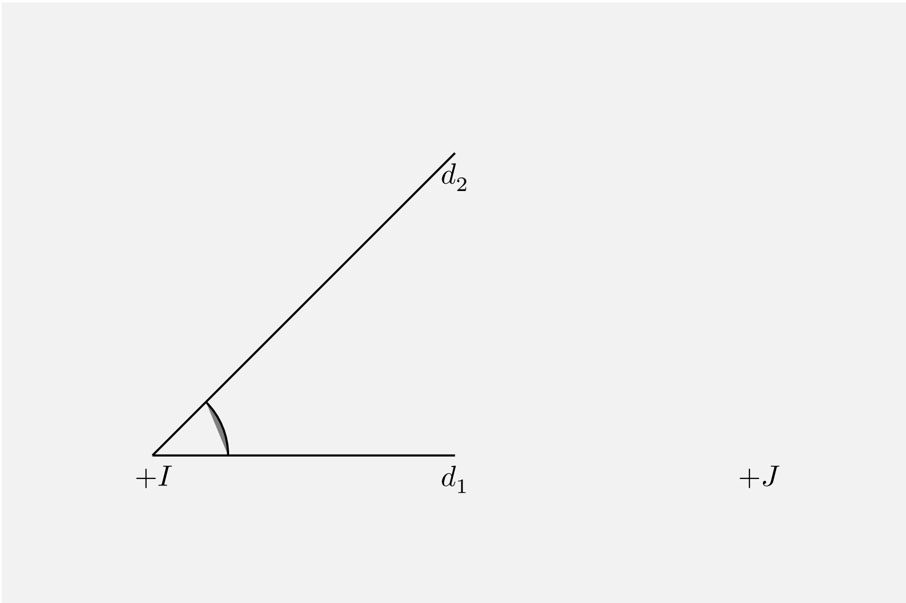


Exercice 3

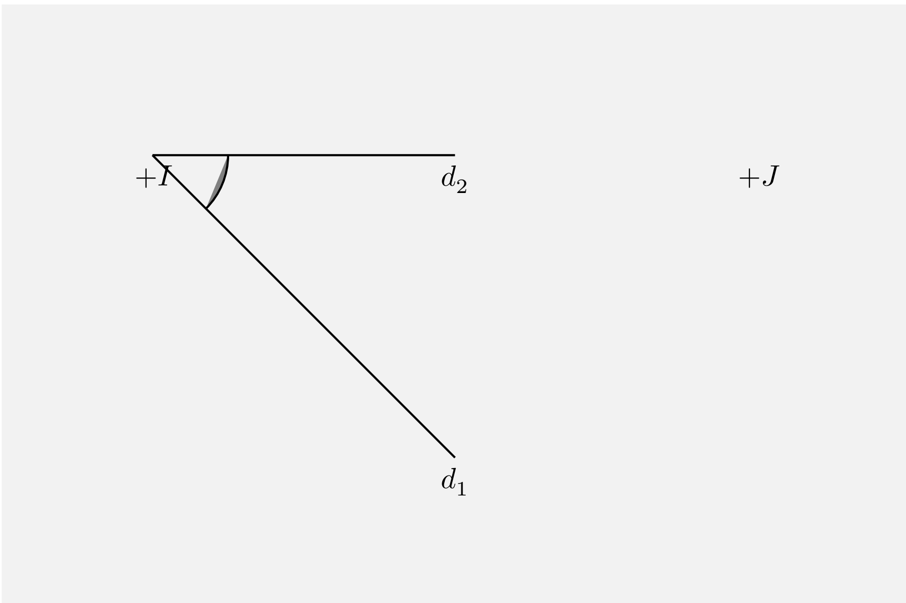
Soit I et J deux points d'un plan euclidien orienté E.

Question 1

Décomposer la rotation $r_{I,\pi/2}$ comme composée de deux symétries axiales. Peux-t-on le faire de plusieurs façons ? La construction des images d'un point de E par la composée proposée puis par la rotation $r_{I,\pi/2}$ suffira comme justification dans cette question.



$r_{I,\pi/2} = s_{d_2} \circ s_{d_1}$
Mais on peut aussi choisir



Question 2

Décomposer la rotation $r_{J,\pi/2}$ comme composée de deux symétries axiales. La construction des images d'un point d'un point de E par la composée proposée puis par la rotation $r_{J,\pi/2}$ suffira comme justification dans cette question.

C'est la même chose qu'à la question précédente, en remplaçant I par J.

Question 3

Montrer à l'aide des deux questions précédentes que la composée $r_{J,\pi/2} \circ r_{I,\pi/2}$ est une symétrie centrale dont on précisera le centre.

Si $I = J$, alors $r_{J,\pi/2} \circ r_{I,\pi/2} = r_{I,\pi}$ donc cette composée est la symétrie centrale de centre I.
On suppose désormais que $I \neq J$.
Posons :

- δ_0 la droite image de la droite (IJ) par la rotation $r_{I,-\pi/4}$;
- δ_1 la droite image de (IJ) par la rotation $r_{J,\pi/4}$;
- σ_0 la réflexion (i.e. symétrie axiale) par rapport à δ_0 ;
- σ_1 la réflexion par rapport à δ_1 ;
- σ_2 la réflexion par rapport à (IJ).

Alors, d'après les questions précédentes, on a

$$r_{I,\pi/2} = \sigma_2 \circ \sigma_0 \qquad \text{et} \qquad r_{J,\pi/2} = \sigma_1 \circ \sigma_2,$$

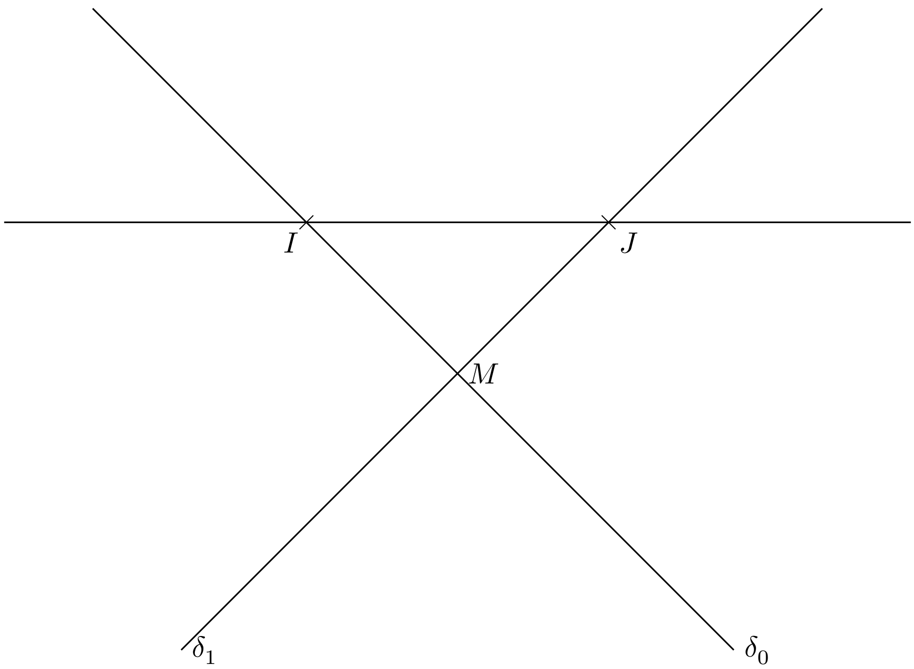
donc

$$r_{J,\pi/2} \circ r_{I,\pi/2} = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_2 \circ \sigma_0 = \sigma_1 \circ \sigma_0.$$

Notons que

$$\mathrm{Mes}(\widehat{\delta_0, \delta_1}) \equiv \mathrm{Mes}(\widehat{\delta_0, (IJ)}) + \mathrm{Mes}(\widehat{(IJ), \delta_1}) \equiv 2\frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod \pi$$

donc les droites δ_0 et δ_1 sont sécantes. (Elles sont même orthogonales.) Notons M leur point d'intersection, alors (comme aux questions précédentes) la composée $r_{J,\pi/2} \circ r_{I,\pi/2} = \sigma_1 \circ \sigma_0$ est la rotation de centre M et d'angle $2\frac{\pi}{2} = \pi$, c'est-à-dire la symétrie centrale de centre M.



Exercice 4

On considère un hexagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Pour simplifier les notations, on pose $A_6 = A_0$. Les longueurs A_iA_{i+1}, pour $0 \leqslant i \leqslant 5$, sont alors toutes égales.

Question 1

Montrer que les six triangles OA_iA_{i+1} sont isocèles.

Comme l'hexagone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ est incrit dans un cercle de centre O, on a

$$OA_0 = OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4 = OA_5$$

(et OA_0 est le rayon du cercle $\mathcal{C}$), donc les triangles OA_iA_{i+1}, pour $0 \leqslant i \leqslant 5$, sont isocèles en O.

Question 2

Montrer que les triangles OA_iA_{i+1} sont isométriques au triangle OA_0A_1.

Comme l'hexagone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ est régulier, les segments $[A_iA_{i+1}]$, pour $0 \leqslant i \leqslant 5$, ont tous la même longueur, que l'on notera ℓ.
Notons aussi r le rayon du cercle $\mathcal{C}$).
Pour tout $i \in \{0, \dots, 5\}$, on a alors :

- $OA_i = OA_{i+1} = r$, d'après la réponse à la question précédente ;
- $A_iA_{i+1} = \ell$.

Les longueurs des côtés ne dépendent donc pas de i, donc ces six triangles sont isométriques.

Question 3

Déterminer une mesure des angles $A_i\widehat{OA}_{i+1}$.

On a

$$\sum_{i=0}^{5} \operatorname{Mes} A_i\widehat{OA}_{i+1} = 2\pi,$$

et les angles $A_i\widehat{OA}_{i+1}$ ne dépendent pas de i d'après l'isométrie démontrée à la question précédente, donc

$$\operatorname{Mes} A_i\widehat{OA}_{i+1} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3},$$

pour tout $i \in \{0, \dots, 5\}$.

Question 4

Montrer que les triangles OA_iA_{i+1} sont équilatéraux.

Soit $i \in \{0, \dots, 5\}$. Le triangle OA_iA_{i+1} est isocèle en O, donc

$$\operatorname{Mes} O\widehat{A_iA}_{i+1} = \operatorname{Mes} O\widehat{A_{i+1}}A_i = \frac{\pi - \operatorname{Mes} A_i\widehat{OA}_{i+1}}{2}$$

(puisque la somme des mesures des angles vaut π), or $\operatorname{Mes} A_i\widehat{OA}_{i+1} = \frac{\pi}{3}$ d'après la question précédente, donc

$$\operatorname{Mes} O\widehat{A_iA}_{i+1} = \operatorname{Mes} O\widehat{A_{i+1}}A_i = \frac{\pi}{3},$$

donc les trois angles du triangle OA_iA_{i+1} ont même mesure (qui est alors nécessairement $\frac{\pi}{3}$, donc ce triangle est équilatéral.

Question 5

Déterminer les longueurs A_iA_{i+1} en fonction du rayon du cercle $\mathcal{C}$.

Comme les triangles OA_iA_{i+1} sont équilatéraux, les longueurs A_iA_{i+1} sont égales à OA_i, c'est-à-dire au rayon du cercle $\mathcal{C}$.

Question 6

Montrer que les points O, A_0 et A_3 sont alignés.

On a

$$\text{Mes}\,\widehat{A_0OA_3} = \sum_{i=0}^{2} \text{Mes}\,\widehat{A_iOA_{i+1}} = 3\frac{\pi}{3} = \pi,$$

donc les points A_0, O et A_3 sont alignés.

Question 7

Montrer que A_3 est le symétrique de A_0 par rapport à O.

Comme $OA_0 = OA_3$ et $\text{Mes}\,\widehat{A_0OA_3} = \pi$, le point A_3 est le symétrique du point A_0 par rapport au point O (c'est-à-dire l'image de A_0 par la rotation de centre O et d'angle π).

Question 8

Soient A et B deux points du plan. En vous appuyant sur les questions précédentes, expliquer comment construire le symétrique de A par rapport à B uniquement à l'aide d'un compas (sans règle).

L'idée est de reproduire la figure précédente avec $A_0 = A$ et $O = B$.
On trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre B passant par A. Notons A_i l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $i\frac{\pi}{3}$, pour $0 \leqslant i \leqslant 5$, de sorte que $A_0 = A$ et $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ est un hexagone régulier inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$.
Comme $A_0A_1 = A_0A_5 = AB$, d'après la question 4, les points A_1 et A_5 sont sur le cercle $\mathcal{C}_0$ de centre A passant par B. Comme ils sont aussi sur le cercle $\mathcal{C}$, ce sont les deux points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_0$, ce qui permet de les construire.
Comme $A_0A_1 = A_1A_2 = A_1B$, le point A_2 est le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec le cercle de centre A_1 passant par B qui n'est pas A_0.
De même, le point A_3 est le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec le cercle de centre A_2 passant par B qui n'est pas A_1.
D'après la question 7, le point A_3 ainsi contruit est le symétrique du point A par rapport au point B.