UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie en petite dimension

Examen terminal (Décembre 2016)

Durée : 2h

Le barème est donné à titre indicatif. Nous recommandons de bien rédiger les questions que vous choisissez de traiter, plutôt que d'en traiter beaucoup. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la note. Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration. On peut admettre explicitement le résultat d'une question pour l'utiliser ultérieurement. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Il est bon de relire sa copie...

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.

Exercice 1 : 2 points

Définir *précisément* (tout énoncé inexact ou incomplet sera compté comme faux) ce qu'est dans un plan euclidien orienté

1. une rotation.
2. une symétrie glissée.

Exercice 2 : 6 points

Soit ABC un triangle non aplati dans un plan euclidien. Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et de C.

1. Justifier que les hauteurs issues de B et de C sont sécantes.
2. Faire une figure en plaçant les éléments indiqués. *Cette figure ne devra pas être modifiée lors des questions suivantes.*
3. En utilisant les axiomes du produit scalaire, montrer que
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA}.$$
Les noms ou énoncés des axiomes utilisés pendant le calcul doivent figurer sur la copie.
4. Montrer en utilisant la formule de Chasles que
$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA}.$$
5. Montrer que
$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BA}.$$
6. En déduire que la droite (AH) est la hauteur issue de A.
7. Montrer que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.
8. Faire une nouvelle figure complète, en partant du même triangle ABC.

Exercice 3 : 3 points

Soit A et B deux points d'un plan euclidien E. Construire à la règle et au compas un point C tel que le triangle ABC soit rectangle et isocèle en C. On justifiera la construction.

Exercice 4 : 6 points

Soit ABC un triangle non aplati dans un plan euclidien E. On notera

G le centre de gravité de ABC, qui est le barycentre des points massifs $(A, 1)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$,
O le centre de son cercle circonscrit, qui est le point d'intersection de ses médiatrices,
H son orthocentre, qui est le point d'intersection de ses hauteurs,
et A' le milieu du segment $[BC]$.

1. *Question préliminaire de cours* : Soit Ω un point de E et k un nombre réel non nul. Soit A et B deux points distincts dans E. Montrer que la droite image de la droite (AB) par l'homothétie h de centre Ω et de rapport k est parallèle à (AB).
2. Écrire la définition du fait que G est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$.
3. Montrer que le centre de gravité G de ABC vérifie
$$\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}.$$
4. En déduire l'image de la médiatrice de $[BC]$ par l'homothétie de centre G et de rapport -2.
5. Montrer que H est l'image de O par l'homothétie de centre G et de rapport -2.
6. En déduire que le centre de gravité G de ABC, le centre O de son cercle circonscrit et son orthocentre H sont alignés.
7. Montrer que
$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Exercice 5 : 6 points

Dans le plan complexe, on considère trois points A, B et C d'affixes a, b et c.

1. Rappeler sans démonstration l'expression des normes de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de a, b et c.
2. Rappeler sans démonstration l'expression d'une mesure de l'angle de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}})$ en fonction de a, b et c.
3. On suppose que B est l'image de C par la rotation de centre A et d'angle α, avec α un réel. Donner la formule traduisant ceci en fonction de a, b, c et α.
4. Que peut-on dire du triangle ABC si l'on a :
$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{b-a}{c-a} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ?$$
5. Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si
$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$
Indication : on pourra utiliser le fait que $(X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}}) = X^2 - X + 1$.

Un corrigé sera disponible sur la page du cours
https://lectures.lionel.fourquaux.org/2016-2017/gpd/