Géométrie en petite dimension

Examen de seconde session (Juin 2017)

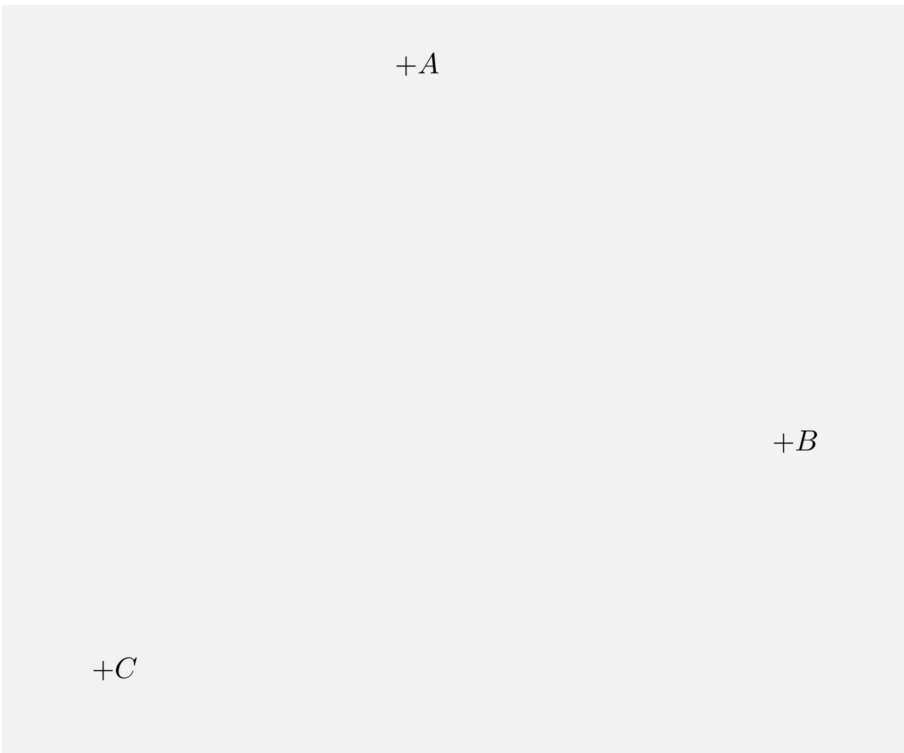
Durée : 2h **Numéro d'anonymat :...................**

Le barème est donné à titre indicatif. Nous recommandons de bien rédiger les questions que vous choisissez de traiter, plutôt que d'en traiter beaucoup. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la note. Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration. On peut admettre explicitement le résultat d'une question pour l'utiliser ultérieurement. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Il est bon de relire sa copie... Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.

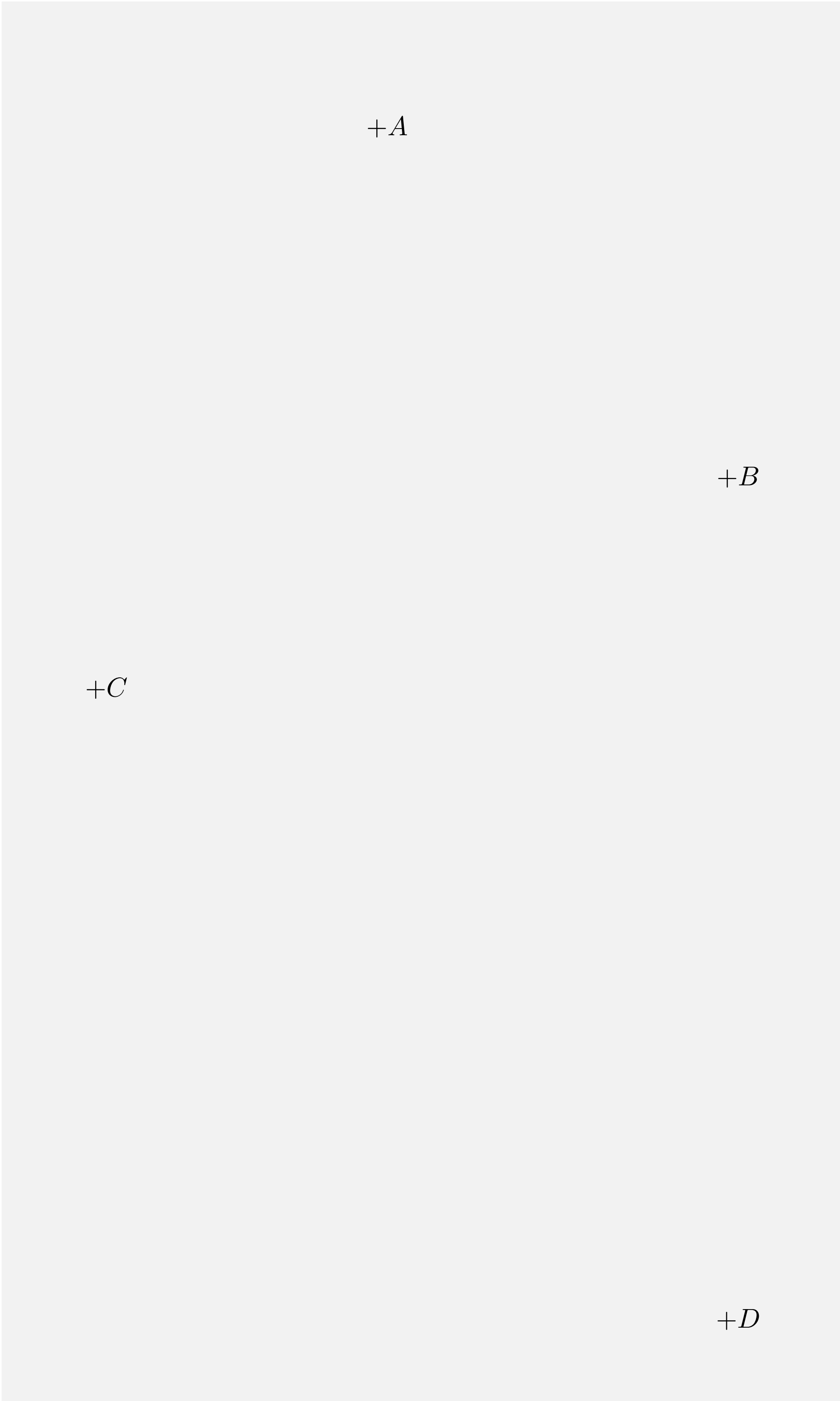
Exercice 1 : 4 points (à faire sur la feuille d'énoncé)

Soit A, B, C, D quatre points du plan euclidien E. Le but de l'exercice est de construire le diagramme de Voronoï des points A, B, C, D. On rappelle qu'il consiste en une partition de l'espace E en quatre parties, chacune associée à l'un des quatre points. La partie associée à A ne doit contenir que des points plus proches de A que des autres points B, C et D. De façon générale, la partie associée à un point ne doit contenir que des points plus proches de ce point que des autres points.

1. Construire le diagramme de Voronoï de A, B C. On précisera la nature des éléments construits et on donnera leur propriété utilisée (par exemple : on construit le cercle de centre A et de rayon AB car tous les points de ce cercle sont à la même distance de A que le point B.). On ne demande pas de démonstration complète de l'exactitude de la construction.



2. Construire le diagramme de Voronoï de A, B C D.



Exercice 2 : 6 points

Soit E un plan euclidien orienté. Soit A un point de E, d une droite de E de vecteur directeur $\vec{u}$. Définir précisément (tout énoncé inexact ou incomplet sera compté comme faux) ce qu'est

1. l'homothétie de centre A et de rapport -3. Faire une figure pour représenter l'image de trois points par cette homothétie.
2. la rotation de centre A et d'angle $-\pi/3$. Faire une figure pour représenter l'image de trois points par cette rotation.
3. la symétrie glissée d'axe d et de vecteur $\vec{u}$. Faire une figure pour représenter l'image de trois points par cette symétrie glissée.

Exercice 3 : 4 points

Soit I et J deux points d'un plan euclidien orienté E.

1. Décomposer la rotation $r_{I,\pi/2}$ comme composée de deux symétries axiales. Peux-t-on le faire de plusieurs façons ? La construction des images d'un point de E par la composée proposée puis par la rotation $r_{I,\pi/2}$ suffira comme justification dans cette question.
2. Décomposer la rotation $r_{J,\pi/2}$ comme composée de deux symétries axiales. La construction des images d'un point d'un point de E par la composée proposée puis par la rotation $r_{J,\pi/2}$ suffira comme justification dans cette question.
3. Montrer à l'aide des deux questions précédentes que la composée $r_{J,\pi/2} \circ r_{I,\pi/2}$ est une symétrie centrale dont on précisera le centre.

Exercice 4 : 6 points

On considère un hexagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Pour simplifier les notations, on pose $A_6 = A_0$. Les longueurs A_iA_{i+1}, pour $0 \leqslant i \leqslant 5$, sont alors toutes égales.

1. Montrer que les six triangles OA_iA_{i+1} sont isocèles.
2. Montrer que les triangles OA_iA_{i+1} sont isométriques au triangle OA_0A_1.
3. Déterminer une mesure des angles $\widehat{A_iOA_{i+1}}$.
4. Montrer que les triangles OA_iA_{i+1} sont équilatéraux.
5. Déterminer les longueurs A_iA_{i+1} en fonction du rayon du cercle $\mathcal{C}$.
6. Montrer que les points O, A_0 et A_3 sont alignés.
7. Montrer que A_3 est le symétrique de A_0 par rapport à O.
8. Soient A et B deux points du plan. En vous appuyant sur les questions précédentes, expliquer comment construire le symétrique de A par rapport à B uniquement à l'aide d'un compas (sans règle).

Un corrigé sera disponible sur la page du cours
https://lectures.lionel.fourquaux.org/2016-2017/gpd/