Géométrie en petite dimension

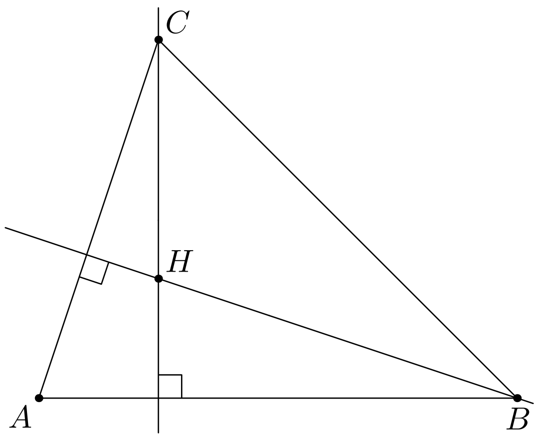
Examen de décembre 2016 (corrigé)

Exercice 2 (5 points)

Soit ABC un triangle non aplati dans un plan euclidien. Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et de C.

Question 1

Faire une figure en plaçant les éléments indiqués.



Question 2

En utilisant les axiomes du produit scalaire, montrer que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA}.$$

Les noms ou énoncés des axiomes utilisés pendant le calcul doivent figurer sur la copie.

Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ se calcule comme

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (-\overrightarrow{BA}) \cdot (-\overrightarrow{CA}) \\
&= (-1)(-1)\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} \quad \text{par linéarité par rapport à chaque argument} \\
&= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} \\
&= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA} \quad \text{par symétrie.}
\end{aligned}$$

Question 3

Montrer en utilisant la formule de Chasles que

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA}.$$

Le produit scalaire $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$ se calcule comme

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} & = & (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ & = & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} \\ & & \text{par linéarité par rapport à chaque argument} \\ & = & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA}. \end{array}$$

car par hypothèse la hauteur (BH) est orthogonale au côté (AC) et donc $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Question 4

En déduire que la droite (AH) est la hauteur issue de A.

En reprenant le calcul précédent, à l'aide de la relation obtenue à la première question

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} & = & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} \\ & = & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} \\ & = & (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BH}) \cdot \overrightarrow{BA} \text{ par linéarité par rapport au premier argument} \\ & = & (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}) \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BA} \quad \text{par la relation de Chasles} \\ & = & 0 \end{array}$$

car par hypothèse la hauteur (CH) est orthogonale au côté (AB) et donc $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$. La droite (AH) est donc orthogonale au côté (BC) et passe par le sommet A : c'est donc la hauteur issue de A.

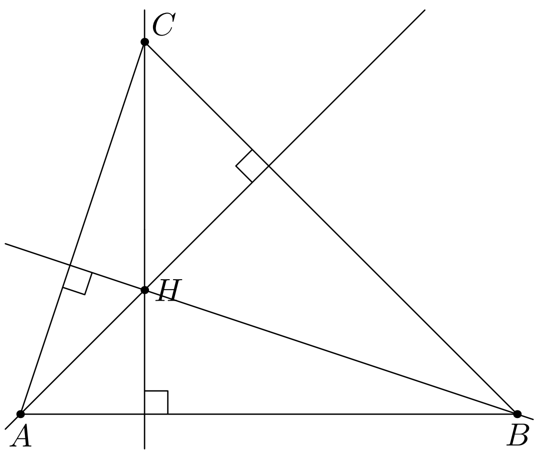
Question 5

Montrer que les hauteurs de ABC sont concourantes.

Comme la hauteur issue de A passe par le point d'intersection H des hauteurs issues de B et de C, les trois hauteurs sont concourantes en H.

Question 6

Faire une nouvelle figure complète, en partant du même triangle ABC.

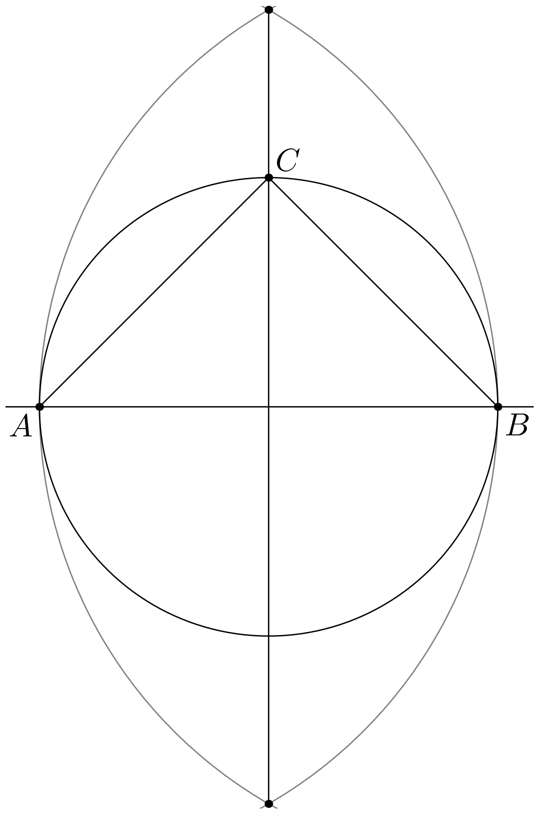


Exercice 3 (3 points)

Soit A et B deux points d'un plan euclidien E. Construire à la règle et au compas un point C tel que le triangle ABC soit rectangle et isocèle en C. On justifiera la construction.

Analyse : supposons que la construction est faite. Comme le triangle ABC est isocèle en C, le point C est sur la médiatrice du segment $[AB]$. Comme le triangle ABC est rectangle en C, le point C est sur le cercle de diamètre $[AB]$. Le point C est donc à l'intersection de la médiatrice du segment $[AB]$ et du cercle de diamètre $[AB]$.

Construction



Exercice 4 (7 points)

Soit ABC un triangle non aplati dans un plan euclidien E. On notera

G le centre de gravité de ABC, qui est le barycentre des points massifs $(A, 1)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$,

O le centre de son cercle circonscrit, qui est le point d'intersection de ses médiatrices,

H son orthocentre, qui est le point d'intersection de ses hauteurs,

et A' le milieu du segment $[BC]$.

Question 1

Question préliminaire de cours : Soit Ω un point de E et k un nombre réel non nul. Soit A et B deux points distincts dans E. Montrer que l'image de la droite (AB) par l'homothétie h de centre Ω et de rapport k est une droite parallèle à (AB).

Cf. votre cours.

Question 2

Écrire la définition du fait que G est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$.

On a donc
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Question 3

Montrer que le centre de gravité G de ABC vérifie
$$\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}.$$

On utilise une propriété du barycentre : G étant le barycentre des points massifs $(A, 1)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$, il vérifie que pour tout point M du plan, $1.\overrightarrow{MA} + 1.\overrightarrow{MB} + 1.\overrightarrow{MC} = (1 + 1 + 1)\overrightarrow{MG}$. Prenons $M = A'$. L'égalité précédente devient : $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{A'G}$. Mais A' étant le milieu de $[BC]$, on a que $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$. Il nous reste donc $\overrightarrow{A'A} = 3\overrightarrow{A'G}$, donc par Chasles : $\overrightarrow{A'G} + \overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{A'G}$, d'où $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$.

Question 4

En déduire l'image de la médiatrice de $[BC]$ par l'homothétie de centre G et de rapport -2.

Appelons d la médiatrice de $[BC]$. D'après l'égalité vectorielle obtenue question 2), l'homothétie de centre G et de rapport -2 envoie le point A' sur le point A. L'image de d par cette homothétie est donc une droite d' passant par le point A (car $A' \in d$), qui est parallèle à d (question préliminaire). Alors, d étant perpendiculaire à (BC), d' l'est également. d' est donc perpendiculaire à (BC) et passe par le point A : c'est la hauteur du triangle ABC issue de A.

Question 5

Montrer que H est l'image de O par l'homothétie de centre G et de rapport -2.

En généralisant le raisonnement précédent, on a vu que si G est le centre de gravité de ABC et si h est l'homothétie de centre G, de rapport -2, alors h envoie les médiatrices des côtés de ABC sur les hauteurs du triangle ABC (la médiatrice de $[BC]$ est envoyée sur la hauteur issue de A, etc.). Comme O appartient aux 3 médiatrices des côtés de ABC, son image par h appartient aux 3 hauteurs du triangle ABC. Comme ces trois hauteurs sont concourantes en H, l'image $h(O)$ de O par l'homothétie h ne peut être que le point H.

Question 6

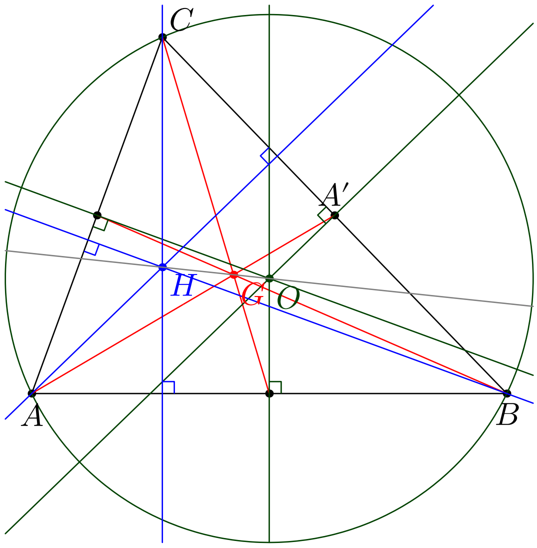
En déduire que le centre de gravité G de ABC, le centre O de son cercle circonscrit et son orthocentre H sont alignés.

Puisque l'homothétie de centre G et de rapport -2 envoie O sur H, on a par définition des homothéties : $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$. Les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GO}$ sont donc colinéaires, ce qui donne l'alignement des points G, H et O.

Question 7

Montrer que
$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

L'égalité $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ résulte de la propriété de G comme isobarycentre des points A, B, C énoncée à la réponse 2). Pour la première égalité, on repart de $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$, que l'on réécrit $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{OG}$. Par Chasles, il vient $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$, d'où l'égalité voulue.



Exercice 5 (6 points)

Dans le plan complexe, on considère trois points A, B et C d'affixes a, b et c.

Question 1

Donner l'expression des normes de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de a, b et c.

On a $\|\overrightarrow{AB}\| = |b - a|$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = |c - a|$.

Question 2

Donner l'expression d'une mesure de l'angle de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}})$ en fonction de a, b et c.

On a Mes $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) = \arg(\frac{b-a}{c-a})$.

Question 3

On suppose que B est l'image de C par la rotation de centre A et d'angle α, avec α un réel. Donner la formule traduisant ceci en fonction de a, b, c et α.

« Le point B est l'image du point C par la rotation de centre A et d'angle α » se réécrit : $b = (c - a)\mathrm{e}^{i\alpha} + a$.

Question 4

Que peut-on dire du triangle ABC si l'on a :

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{b-a}{c-a} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad ?$$

D'après la question précédente on a $b-a = (c-a)\mathrm{e}^{i\alpha}$, donc en prenant le module on obtient $|b-a| = |c-a|$, c'est-à-dire $AB = AC$.
De plus, les deux cas proposés pour $\frac{b-a}{c-a}$ correspondent à $\mathrm{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) = \pm\frac{\pi}{3}$.
Ainsi, dans ces deux cas, le triangle ABC est isocèle en A avec $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$, donc équilatéral.

Question 5

Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$

Indication : on pourra utiliser le fait que $(X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}}) = X^2 - X + 1$.

On remarque que si ABC est équilatéral, alors $\frac{b-a}{c-a}$ est comme dans la question précédente. Donc finalement, le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{b-a}{c-a} = \mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{3}}$. Or

$$(X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}}) = X^2 - X + 1,$$

donc ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{b-a}{c-a}$ est solution de $X^2 - X + 1 = 0$. En remplaçant et en réorganisant les termes on trouve finalement le résultat recherché.