UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie en petite dimension

Interrogation 2

Durée : 2h

Le barème est donné à titre indicatif. Nous recommandons de bien rédiger les questions que vous choisissez de traiter, plutôt que d'en traiter beaucoup. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la note. Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration. On peut admettre explicitement le résultat d'une question pour l'utiliser ultérieurement. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Il est bon de relire sa copie...

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.

Exercice 1 : 4 points

Énoncer *précisément* (tout énoncé inexact ou incomplet sera compté comme faux) les trois cas d'égalité des triangles. Toutes les hypothèses des énoncés devront être écrites. Il n'est pas demandé de les démontrer.

Exercice 2 : 2 points

Définir *précisément* (tout énoncé inexact ou incomplet sera compté comme faux) ce qu'est une homothétie (dans un plan euclidien).

Exercice 3 : 4 points

Soit E un plan euclidien orienté. Soit ABC un triangle équilatéral tel que $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = \pi/3$. Soit M un point de son cercle circonscrit tel que M est sur l'arc entre B et C ne contenant pas A. Le but de l'exercice est de montrer que $MA = MB + MC$.

1. On considère le point N de (BM) tel que N est sur la demi-droite issue de M ne contenant pas B, et tel que $MN = MC$. Montrer que $\mathrm{Mes}\,\widehat{CMN} = \frac{\pi}{3}$. On pourra admettre que l'angle $\widehat{CMB}$ est obtus.
2. En déduire la nature du triangle CMN.
3. On admettra que $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MC}}) = +\pi/3$. En considérant une isométrie bien choisie, montrer que $MA = MB + MC$.

Exercice 4 : 4 points

Soit $(O, \vec{I}, \vec{J})$ un repère orthonormé direct du plan euclidien E. Soit d la droite passant par le point $A(1,2)$ et de vecteur directeur $\vec{J}$.

1. Déterminer la nature (Est-ce une isométrie ? Est-elle directe ? Quelle est sa place dans la liste des isométries du plan ?) et les éléments caractéristiques (angles, axe, centre, ou vecteur...) de $t_{2\vec{I}} \circ s_d$, composée de la symétrie axiale s_d d'axe d suivie de la translation $t_{2\vec{I}}$ de vecteur $2\vec{I}$.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $t_{2\vec{I}+3\vec{J}} \circ s_d$, composée de la symétrie axiale s_d d'axe d suivie de la translation $t_{2\vec{I}+3\vec{J}}$ de vecteur $2\vec{I} + 3\vec{J}$.

Exercice 5 : 7 points

Soit ABC un triangle non plat dans le plan $\mathcal{P}$.

1. Montrer que les médiatrices des côtés du triangle ABC sont concourantes. (On montrera en particulier qu'elles ne sont pas parallèles.)
2. On note Δ_A la droite parallèle à (BC) passant par A, Δ_B la parallèle à (CA) passant par B, et Δ_C la parallèle à (AB) passant par C. Montrer que les droites Δ_A et Δ_B sont sécantes.
3. On note A' le point d'intersection des droites Δ_B et Δ_C, B' le point d'intersection de Δ_C et Δ_A, C' celui de Δ_A et Δ_B. Montrer que le quadrilatère $AC'BC$ est un parallélogramme.
4. Montrer que $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \vec{0}$.
5. On note $\mathcal{D}_A$ la hauteur issue de A dans le triangle ABC. Montrer que $\mathcal{D}_A$ est la médiatrice du segment $[B'C']$.
6. Montrer que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.
7. On note σ_A la symétrie centrale par rapport au point A, σ_B celle par rapport au point B, et σ_C celle par rapport au point C. On considère l'application $\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A$. Est-ce une isométrie ? Est-elle directe ? Quelle est sa place dans la liste des isométries du plan ? Préciser si possible des éléments caractéristiques (angles, axe, centre, ou vecteur...) Combien a-t-elle de points fixes ? (Rappel : toutes les réponses doivent être démontrées.)

Un corrigé sera disponibile sur la page du cours
https://lectures.lionel.fourquaux.org/2016-2017/gpd/