UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie en petite dimension

Interrogation 1 (1 heure et 30 minutes)

Le sujet est certainement trop long et le barème est donné à titre indicatif. Nous recommandons de bien rédiger les questions que vous choisissez de traiter, plutôt que d'en traiter beaucoup. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la note. Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration. On peut admettre explicitement le résultat d'une question pour l'utiliser ultérieurement. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Il est bon de relire sa copie...

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.

Exercice 1 : 3 points

Soit E un plan et $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère. On considère l'application

$$\varphi : (\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) \mapsto xy' + yx'$$

L'application φ est-elle un produit scalaire ?

Exercice 2 : 2 points

Énoncer le théorème de l'angle inscrit.

Exercice 3 : 3 points

1. Soit ABC un triangle dans un plan euclidien orienté E. On notera $a = BC, b = CA$ et $c = AB$ et $\alpha = \text{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$. Calculer a^2 en fonction de b, c et α.
   Indication : on pourra développer $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2$.
2. En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{3}$.

Exercice 4 : 7 points

1. Rappeler les quatre axiomes de la fonction d'aire.
2. Démontrer à partir des axiomes la formule de l'aire d'un carré de côté a.
3. Démontrer à partir des axiomes que l'aire d'un rectangle est le produit de sa longueur par sa largeur.
4. Soit $ABCD$ un rectangle et I un point de $[AB]$. Démontrer, à l'aide des questions précédentes, que l'aire du triangle CDI est la moitié du produit de sa hauteur par la longueur de sa base correspondante.

Exercice 5 : 7 points

Soit E un plan euclidien. On rappelle que les médianes d'un triangle non aplati sont les droites qui joignent un sommet au milieu du côté opposé. On rappelle le lemme des chevrons :

Soit ABC un triangle non aplati et M un point du plan distinct de A. On suppose que la droite (AM) coupe le côté (BC) et on note M' leur point d'intersection. Alors le rapport des aires $\frac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)}$ est égal au rapport des longueurs $\frac{M'B}{M'C}$ sur la base (BC)

$$\frac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)} = \frac{M'B}{M'C}.$$

1. Rappeler la définition et la caractérisation de la médiatrice d'un segment.
2. Montrer que les médiatrices d'un triangle non aplati sont concourantes (c'est-à-dire qu'elles s'intersectent en un point commun aux trois droites).
3. Soit ABC un triangle non aplati et M un point du plan tel que la droite (AM) coupe le côté (BC) et tel que les aires $\mathcal{A}(AMB)$ et $\mathcal{A}(AMC)$ soient égales. Que dire de la droite (AM) vis-à-vis du triangle ABC ?
4. (*Question facultative : on pourra admettre le résultat*) Soit ABC un triangle non aplati. On note A' le milieu du segment $[BC]$, B' celui de $[CA]$ et C' celui de $[AB]$. Montrer, en raisonnant par l'absurde et en considérant le quadrilatère $BB'C'C$, que les médianes (BB') et (CC') ne sont pas parallèles.
5. Montrer que les médianes d'un triangle non aplati sont concourantes.

Un corrigé sera disponibile sur la page du cours
https://lectures.lionel.fourquaux.org/2016-2017/gpd/