UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie en petite dimension

Interrogation 1 (1 heure et 30 minutes)
Corrigé

Le sujet est certainement trop long et le barème est donné à titre indicatif. Nous recommandons de bien rédiger les questions que vous choisissez de traiter, plutôt que d'en traiter beaucoup. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la note. Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration. On peut admettre explicitement le résultat d'une question pour l'utiliser ultérieurement. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Il est bon de relire sa copie...

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.

Exercice 1 : 3 points

Soit E un plan et $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère. On considère l'application

$$\varphi : (\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) \mapsto xy' + yx'$$

L'application φ est-elle un produit scalaire ?

Éléments de solution 1

Le vecteur $\vec{\imath} - \vec{\jmath}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vérifie

$$\varphi(\vec{\imath} - \vec{\jmath}, \vec{\imath} - \vec{\jmath}) = (1)(-1) + (-1)(1) = -2 < 0.$$

L'application φ n'est donc pas positive : ce n'est donc pas un produit scalaire.

Exercice 2 : 2 points

Énoncer le théorème de l'angle inscrit.

Éléments de solution 2

Soit E un plan euclidien orienté. Soit O un point et $\mathcal{C}$ un cercle de centre O. Soit A, B, M trois points de $\mathcal{C}$ avec $M \neq A$ et $M \neq B$. Alors

$$\operatorname{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv 2 \operatorname{Mes}((\widehat{(MA)(MB)})[2\pi].$$

Exercice 3 : 3 points

1. Soit ABC un triangle dans un plan euclidien orienté E. On notera $a = BC, b = CA$ et $c = AB$ et $\alpha = \mathrm{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$. Calculer a^2 en fonction de b, c et α.
Indication : on pourra développer $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2$.
2. En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{3}$.

***Éléments de solution* 3**

Soit ABC un triangle dans un plan euclidien orienté E.

1.
$$\begin{aligned} a^2 &= CB^2 = (\overrightarrow{CB})^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 \\ &= (\overrightarrow{AB})^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{AC})^2 \\ &= AB^2 - 2\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\| \cos\alpha + AC^2 \\ &= c^2 - 2cb\cos\alpha + b^2. \end{aligned}$$

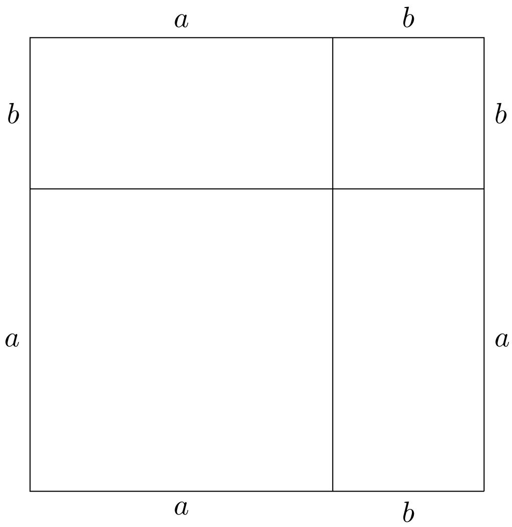
   Cette formule s'appelle la formule d'Al-Kashi et généralise le théorème de Pythagore.
2. Dans un triangle équilatéral ABC, $\mathrm{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \pi/3[2\pi]$ et tous les côtés ont même longueur, disons a. On trouve donc
$$a^2 = 2a^2 - 2a^2\cos(\pi/3)$$
   soit
$$\cos(\pi/3) = 1/2.$$

Exercice 4 : 7 points

1. Rappeler les quatre axiomes de la fonction d'aire.
2. Démontrer à partir des axiomes la formule de l'aire d'un carré de côté a.
3. Démontrer à partir des axiomes que l'aire d'un rectangle est le produit de sa longueur par sa largeur.
4. Soit $ABCD$ un rectangle et I un point de $[AB]$. Démontrer, à l'aide des questions précédentes, que l'aire du triangle CDI est la moitié du produit de sa hauteur par la longueur de sa base correspondante.

***Éléments de solution* 4**

1. Soit E un plan euclidien. Il existe une fonction $\mathcal{A}$ appelée fonction d'aire qui à presque toutes les parties bornées de E associe un nombre réel positif telle que
   - l'aire d'un carré de côté 1 est 1.
   - l'aire est additive sur les parties disjointes.
   - l'aire est invariante par translations, symétries et rotations.
   - l'aire $\mathcal{A}(h(\mathcal{P}))$ de l'image $h(\mathcal{P})$ d'une partie $\mathcal{P}$ par une homothétie h de rapport λ est $\lambda^2\mathcal{A}(\mathcal{P})$.
2. Soit $\mathcal{C}$ un carré de côté a. Il est obtenu à partir d'un carré de côté 1 par une homothétie de rapport a. Son aire est donc a^2.
3. Soit $\mathcal{R}$ un rectangle de côté $a \times b$. Le carré de côté $a + b$ peut être recouvert, avec des intersections qui sont des segments donc d'aire nulle, par un carré de côté a, un autre de côté b et deux rectangles isométriques à $\mathcal{R}$ de côté $a \times b$.

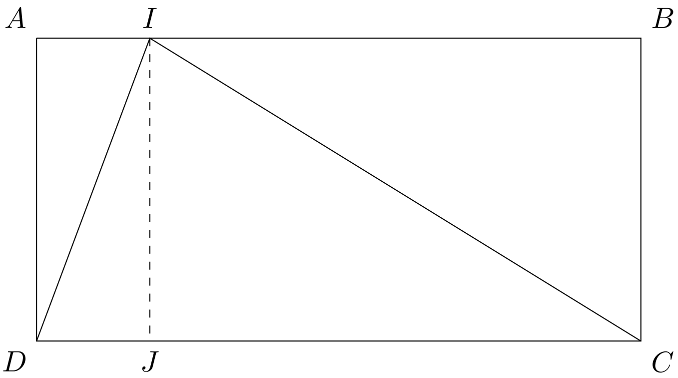


Par conséquent,

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\mathcal{A}(\mathcal{R}).$$

On en déduit que l'aire du rectangle $\mathcal{R}$ est ab.

4. Soit $ABCD$ un rectangle et I un point de $[AB]$. On considère la droite orthogonale à (CD) passant par I. Elle coupe (CD) en un point noté J.



Le quadrilatère $AIJD$ a quatre angles droits : c'est donc un rectangle. Sa diagonale $[DI]$ le partage en deux triangles ADI et JID symétriques par rapport au centre du rectangle, donc de même aire. Donc,

$$\mathcal{A}(DIJ) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(AIJD).$$

De même dans le rectangle $IBCJ$, on trouve

$$\mathcal{A}(CIJ) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(IBCJ).$$

En ajoutant ces deux égalités, on trouve

$$\mathcal{A}(DIC) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABCD) = \frac{1}{2}CD \times AB.$$

La seconde égalité résulte de la question précédente.

Exercice 5 : 7 points

Soit E un plan euclidien. On rappelle que les médianes d'un triangle non aplati sont les droites qui joignent un sommet au milieu du côté opposé. On rappelle le lemme des chevrons :

Soit ABC un triangle non aplati et M un point du plan distinct de A. On suppose que la droite (AM) coupe le côté (BC) et on note M' leur point d'intersection. Alors le rapport des aires $\frac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)}$ est égal au rapport des longueurs $\frac{M'B}{M'C}$ sur la base (BC)

$$\frac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)} = \frac{M'B}{M'C}.$$

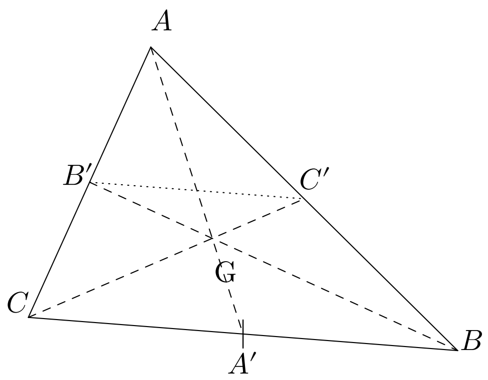
1. Rappeler la définition et la caractérisation de la médiatrice d'un segment.
2. Montrer que les médiatrices d'un triangle non aplati sont concourantes (c'est-à-dire qu'elles s'intersectent en un point commun aux trois droites).
3. Soit ABC un triangle non aplati et M un point du plan tel que la droite (AM) coupe le côté (BC) et tel que les aires $\mathcal{A}(AMB)$ et $\mathcal{A}(AMC)$ soient égales. Que dire de la droite (AM) vis-à-vis du triangle ABC ?
4. (*Question facultative : on pourra admettre le résultat*) Soit ABC un triangle non aplati. On note A' le milieu du segment $[BC]$, B' celui de $[CA]$ et C' celui de $[AB]$. Montrer, en raisonnant par l'absurde et en considérant le quadrilatère $BB'C'C$, que les médianes (BB') et (CC') ne sont pas parallèles.
5. Montrer que les médianes d'un triangle non aplati sont concourantes.

Éléments de solution 5

1. Soit E un plan euclidien. Soit A et B deux points. La médiatrice du segment $[AB]$ est par définition l'ensemble des points de E équidistants de A et de B. Si A et B sont distincts, la médiatrice est caractérisée par le fait d'être l'unique droite orthogonale à la droite (AB) passant par le milieu du segment $[AB]$.
2. Soit ABC un triangle non aplati. On suppose que les médiatrices de $[AB]$ et de $[BC]$ sont parallèles. Alors, les droites (AB) et (BC), orthogonales à la direction commune des médiatrices, sont parallèles. Comme elles ont en commun le point B, elles sont confondues et les points A, B, C sont alignés. Ceci contredit le fait que le triangle ABC est non aplati. Par conséquent, les médiatrices d'un triangle non aplati sont deux à deux sécantes.
   Soit alors I le point d'intersection des médiatrices de $[AB]$ et de $[BC]$. Par définition des médiatrices, comme I appartient à la médiatrice de $[AB]$, $IA = IB$ et comme I appartient à la médiatrice de $[BC]$, $IB = IC$. Par conséquent, $IA = IC$. Ceci implique que I est aussi sur la médiatrice de $[AC]$. Les trois médiatrices sont donc concourantes au point I.
3. Soit ABC un triangle non aplati et M un point du plan tel que la droite (AM) coupe le côté (BC) en un point noté M' et tel que les aires $\mathcal{A}(AMB)$ et $\mathcal{A}(AMC)$ soient égales. Par le lemme des chevrons

   $$\frac{M'B}{M'C} = \frac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)} = 1.$$

   Par conséquent, le point M' est le milieu du côté $[BC]$ et la droite $(AM) = (AM')$ est la médiane du triangle ABC issue de A.
4. Soit ABC un triangle non aplati. On suppose que les médianes (BB') et (CC') sont parallèles. Par le théorème des milieux dans le triangle ABC, la droite $(B'C')$ est parallèle au côté (BC). Par conséquent, le quadrilatère non aplati $BB'C'C$ a ses côtés opposés deux à deux parallèles : c'est un parallélogramme. Mais les droites $(BC') = (BA)$ et $(B'C) = (AC)$ se coupent en A qui n'est pas le milieu de $[BC']$. On aboutit donc à une contradiction. L'hypothèse que les médianes (BB') et (CC') sont parallèles est donc fausse. Elles sont donc sécantes.



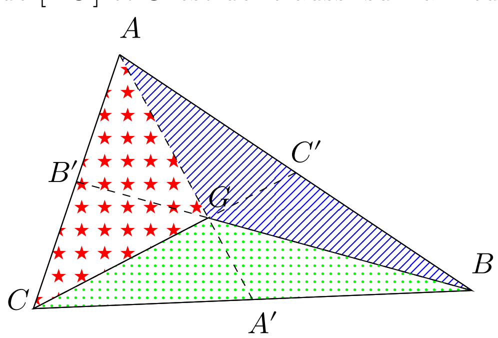
5. Soit ABC un triangle non aplati. Par la question précédente les deux médianes (BB') et (CC') sont sécantes. On note G leur point d'intersection. Par le lemme des chevrons, comme la droite (BG) coupe (AC) au milieu B' de $[AC]$, on trouve

$$\frac{\mathcal{A}(BGA)}{\mathcal{A}(BGC)} = \frac{B'A}{B'C} = 1.$$

De même, comme la droite (CG) est la médiane (CC'), l'aire $\mathcal{A}(CGA)$ est égale à l'aire $\mathcal{A}(CGB)$. On obtient alors l'égalité $\mathcal{A}(BGA) = \mathcal{A}(CGA)$.
Comme B, C, B', C' sont dans le demi-plan ouvert[1] délimité par la droite parallèle à (BC) passant par A, et comme G appartient aux segments $[BB']$ et $[CC']$, G appartient à ce demi-plan ouvert. Par conséquent (AG) n'est pas parallèle à (BC). Par le lemme des chevrons, la droite (AG) coupe donc la droite (BC) en un point A'' tel que

$$\frac{A''B}{A''C} = \frac{\mathcal{A}(AGB)}{\mathcal{A}(AGC)} = 1.$$

Donc A'' est le milieu A' de $[BC]$ et G est donc aussi sur la médiane (AA').



Le point G, point de concours des médianes, est appelé centre de gravité du triangle ABC.

[1] ouvert ici signifie que la droite parallèle à (BC) passant par A n'est pas prise dans le demi-plan