UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie en petite dimension

Examem 2eme Session
Jeudi 18 juin 2015

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.
Justifiez toutes vos réponses.

Durée : Deux heures

Questions de cours

On rappelle qu'une définition (ou un théorème) est un énoncé clair, précis et non ambigu. Une attention toute particulière sera portée sur ces points.

1. Rappeler la définition d'une similitude, d'une isométrie.
2. Quelle est la nature du produit de deux rotations d'angle π ? Déterminer les caractéristiques géométriques de ce produit.
3. Quelle est la nature du produit de deux rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$? Déterminer les caractéristiques géométriques de ce produit.
4. Démontrer que la somme des angles d'un triangle est égale à π.
5. Donner la nature ainsi que les caractéristiques géométriques des applications du plan complexe dans lui-même suivantes :

$$z \mapsto -iz \qquad z \mapsto 3z - i \qquad z \mapsto (1-i)z + 2i.$$

Exercice 1

Soit ABC un triangle du plan. Soient I le barycentre de $\{(A,2),(B,3)\}$, J le barycentre de $\{(B,3),(C,-1)\}$ et K le barycentre de $\{(C,-1),(A,2)\}$.

1. Est-ce que les droites (CI), (JA) et (KB) sont concourantes ? Si oui, exprimer ce point à l'aide A, B et C.

Soient I' le barycentre de $\{(A,2),(B,-1)\}$, J' le barycentre de $\{(B,1),(C,3)\}$ et K' le barycentre de $\{(C,3),(A,2)\}$.

2. Est-ce que les points I', J' et K' sont alignés ?

Exercice 2

Soit ABC un triangle du plan. On note A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On note G le centre de gravité de ABC.

1. Faire une figure tout au long de l'exercice.
2. Quel est le rapport de l'homothétie h de centre A qui vérifie $h(G) = A'$.
3. Quel est le rapport de l'homothétie g de centre A' qui vérifie $g(B) = C$.
4. On note $H = g(G)$. Montrer que $GA = GH$.
5. Montrer que $GBHC$ est un parallélogramme.

Soient d_1, d_2 et d_3 trois droites concourantes en un point K. On cherche à construire 3 points $A_1 \in d_1$, $A_2 \in d_2$ et $A_3 \in d_3$ tels que d_1, d_2 et d_3 sont les médianes du triangle $A_1A_2A_3$.

6. Faire une nouvelle figure.
7. Utiliser les questions précédentes pour montrer que : pour tout point $A_1 \in d_1$ différent de K, il existe un unique couple $(A_2, A_3) \in d_2 \times d_3$ tel que les droites d_1, d_2 et d_3 sont les médianes du triangle $A_1A_2A_3$.

Exercice 3

Si X est un point du plan alors on note s_X la symétrie centrale de centre X.

1. Quelle est la nature de la composée de trois symétries centrales ?
2. Quelle est la nature de la composée de quatre symétries centrales ?
3. Quelle est la nature de la composée d'un nombre quelconques de symétries centrales ?

Soit ABC un triangle, on cherche trois points I, J et K tels que A est le milieu de $[IJ]$, B est le milieu de $[JK]$ et C est le milieu de $[KI]$.

4. Si I, J, K sont des solutions du problème qu'elle est l'image de I par la transformation $s_C \circ s_B \circ s_A$.
5. En déduire que le problème possède un et une seule solution.

Soit $ABCD$ un quadrilatère, on cherche quatre points I, J, K et L tels que A est le milieu de $[IJ]$, B est le milieu de $[JK]$, C est le milieu de $[KL]$ et D est le milieu de [LI].

6.*Bonus* Montrer que le problème possède aucune ou bien une infinité de solutions.

7.*Bonus* Montrer que le problème possède au moins une solution si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.