UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie en petite dimension

Examen Terminal : 18 décembre 2014

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses.

Durée : Deux heures

Il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions pour avoir la note maximale.

Questions de cours

1. Soit f une bijection du plan. Ecrire avec des quantificateurs les phrases :
   « f multiplie les distances. » « f conserve les distances. »
2. Quelle est la nature du produit de deux rotations d'angle π ? Déterminer les caractéristiques géométriques de ce produit.
3. Quelle est la nature du produit de deux rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$? Déterminer les caractéristiques géométriques de ce produit.
4. Démontrer que la somme des angles d'un triangle est égale à π.
5. Donner la nature ainsi que les caractéristiques géométriques des applications du plan complexe dans lui-même suivantes :

$$z \mapsto iz \qquad z \mapsto 2z+i \quad z \mapsto (1+i)z+3i \quad z \mapsto \bar{z} \quad z \mapsto \bar{z}+1.$$

Exercice 1

Soit ABC un triangle du plan. Soient I le barycentre de $\{(A,1),(B,2)\}$, J le barycentre de $\{(B,2),(C,-3)\}$ et K le barycentre de $\{(C,-6),(A,2)\}$.

1. Est-ce que les droites (CI), (JA) et (KB) sont concourantes ? Si oui, exprimer ce point à l'aide A, B et C.

   Soient I' le barycentre de $\{(A,1),(B,-2)\}$, J' le barycentre de $\{(B,4),(C,2)\}$ et K' le barycentre de $\{(C,1),(A,1)\}$.
2. Est-ce que les points I', J' et K' sont alignés ?

Exercice 2

Soit ABC un triangle direct du plan (autrement dit on suppose que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère direct du plan). On note A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On note P l'unique point du plan tel que $PA = PC$ et $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}) = \frac{\pi}{2}$. On note Q l'unique point du plan tel que $QA = QB$ et $(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QB}) = -\frac{\pi}{2}$.

1. Faire une figure.

   On note r_P la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_Q la rotation de centre Q et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $s_{A'}$ la symétrie centrale de centre A'.
2. Quelle est la nature de la bijection $f = r_Q \circ s_{A'} \circ r_P$.
3. Calculer $f(A)$.
4. Quelles sont les caractéristiques géométriques de f ?
5. On note P' le symétrique de P par rapport à A'. Montrer que $r_Q(P') = P$.
6. En déduire que le triangle $P'QP$ est isocèle rectangle en un sommet à déterminer.
7. En déduire la particularité du triangle $A'PQ$.

Exercice 3

On considère l'équation suivante :

$$z^6 = 64 \text{ pour } z \in \mathbb{C} \qquad (E)$$

1. Trouver une solution évidente de cette équation.
2. Montrer que si z est solution alors $-jz$ est aussi solution.
3. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est de cardinal 6.
4. On introduit l'application $z \mapsto -jz$. Quelle est la nature de cette application ? Quelles sont ces caractéristiques géométriques ?
5. On note $z_1, ..., z_6$ les solutions de l'équation énumérées dans le sens trigonométrique. Faire un dessin et montrer que le polygone de sommets $z_1, ..., z_6$ est régulier, c'est à dire que tous ses côtés sont de même longueur.
6. Calculer l'angle $(\widehat{z_1 O z_2})$ où O est le point d'affixe 0.
7. Trouver deux similitudes indirectes qui préservent l'ensemble des solutions de (E).