UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie en petite dimension

Correction Contrôle continu n°2

Questions de cours

1. Attention, il ne faut pas confondre l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire qui montrent que pour tout couples $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de vecteurs, on a :
$$|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \tag{CS}$$
$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\| \tag{IT}$$
La première c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la seconde l'inégalité triangulaire. On a égalité dans (CS) **si et seulement si** les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. On a égalité dans (IT) **si et seulement si** les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ET de même sens.
2. Cf cours.
3. Une proposition du cours montre que, si $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$ alors les applications $z \mapsto az + b$ et $z \mapsto a\bar{z} + b$ sont des similitudes de rapport $|a|$. Les applications f_1,f_2 et f_4 sont donc des similitudes de rapports respectifs 1, 2 et 1. Par conséquent, f_1 et f_4 sont des isométries et f_2 n'est pas une isométrie. Enfin, f_3 n'est pas similitude, par exemple car $f_3(1) = f_3(-1)$ donc f_3 n'est pas injective donc n'est pas bijective or toute similitude est bijective.

Exercice 1

1. On vérifie que $OA = OB = OC = 1$ donc Γ est le cercle de centre O et de rayon 1.
2. Par associativité du barycentre, comme
$$(G, 3) = Bary((A, 1), (B, 1), (C, 1))$$
On a
$$(I(M), 6) = Bary((A, 1), (B, 1), (C, 1), (M, 1)) = Bary((G, 3), (M, 3))$$
Donc $I(M)$ est le milieu de $[GM]$.

3. ...
4. Par définition de H, on a :

$$2\overrightarrow{HI(M)} = \overrightarrow{OI(M)} + \overrightarrow{GI(M)} = \overrightarrow{OG} + 2\overrightarrow{GI(M)}$$

Or $\overrightarrow{GI(M)} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$ ainsi

$$2\overrightarrow{HI(M)} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{OM}$$

En particulier, en prenant la norme, on trouve $HI(M) = \frac{1}{2}OM = \frac{1}{2}$ car M est sur le cercle de centre O et de rayon 1. Donc $I(M)$ est sur le cercle de centre H et de rayon $\frac{1}{2}$.
5. Comme $I(M)$ est sur un cercle et que ce cercle passe par A', B' et C', il est sur le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$.

Réciproquement soit un point I du cercle circonscrit à $A'B'C'$, alors on introduit le point $N = I + \overrightarrow{GI}$. On va montrer que N est sur le cercle de centre O et de rayon 1 et que vérifie $I(N) = I$.
   — On a $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{GI} = 2\overrightarrow{HI}$.
   Donc N est sur le cercle de centre O et de rayon 1.
   — On a $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{GI}$ donc $\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{0}$ donc I est le milieu de $[GN]$ donc $I(N) = I$.

On a posé $N = I + \overrightarrow{GI}$ car on veut que $I(N) = I$, la question 2 nous dicte donc de poser $N = I + \overrightarrow{GI}$, ou un truc du même genre, par exemple, on aurait pu aussi poser N l'unique point tel que I est le milieu de $[GN]$, soit N l'image de G par la symétrie centrale de centre I, soit N l'image de G par l'homothétie de rapport -1 et de centre I...

Exercice 2

1. Faire un dessin propre permet de gagner un point facilement...
2. Soit M un point du plan, pour calculer $MA^2 + MB^2$, on utilise "Chasles avec le point I", on obtient :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= MI^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + MI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} \\ &= 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \end{aligned}$$

Or $IA = IB$ et $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ car I est le milieu de $[AB]$ donc

$$= 2MI^2 + 2IA^2 + 0$$

Or $IA = 1$ puisque $AB = 2$ et I est le milieu de $[AB]$ ainsi

$$= 2MI^2 + 2$$

3. **Attention, la fonction f n'est pas définie sur le plan mais sur la DROITE** $\mathcal{D}$. *Idée : La quantité MI est minimale quand M parcourt $\mathcal{D}$, lorsque M est le projeté orthogonal de I sur $\mathcal{D}$.* **Exemple de rédaction :** On note H le projeté orthogonal de I sur $\mathcal{D}$. Montrons que :

$$\forall M \in \mathcal{D}, \qquad f(M) \geqslant f(H)$$

Soit M un point de $\mathcal{D}$. On a :

$$IM \geqslant IH$$

par définition de H, donc

$$IM^2 \geqslant IH^2$$

donc

$$2IM^2 + 2 \geqslant 2IH^2 + 2$$

cqfd

.

Le minimum de f est donc $2IH^2 + 2 = 2\mathrm{dist}(I, \mathcal{D})^2 + 2$ et le point H atteint le minimum.

4. Montrons à présent que le minimum est atteint en un unique point. Soit $K \in \mathcal{D}$ un point qui réalise le minimum de f. Montrons que $K = H$. On a, par définition de K :

$$f(K) = f(H)$$

autrement dit

$$2IK^2 + 2 = 2IH^2 + 2$$

d'où

$$IK = IH$$

Par conséquent, K réalise aussi le minimum de la distance entre I et la droite $\mathcal{D}$, or ce minimum est atteint en un unique point : le projeté orthogonal H de I sur $\mathcal{D}$.

5. On note h la distance entre I et la droite $\mathcal{D}$. On vient de montrer que le minimum de f était $2h^2 + 2$. Calculons h explicitement, pour cela, on choisit un point C sur $\mathcal{D}$, par exemple $C = (3, 0)$ et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{D}$, par exemple $\overrightarrow{n}$, on a $\overrightarrow{CI} = (-2, 0)$:

$$h = \frac{\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|} = \frac{|x_I + y_I - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|1 + 0 - 3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Donc le minimum de f est $2 \cdot (\sqrt{2})^2 + 2 = 6$.