UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie en petite dimension

Contrôle continu n°2 : vendredi 20 novembre 2015

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses.

Durée : Une heure

Questions de cours

On rappelle qu'une définition (ou un théorème) est un énoncé clair, précis et non ambigu. Une attention toute particulière sera portée sur ces points.

1. Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ainsi que son cas d'égalité.
2. Rappeler la définition d'une isométrie, d'une similitude.
3. *On rappelle que l'on identifie l'ensemble des nombres complexes et le plan de façon canonique par l'application :* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ *définie par* $\varphi(x, y) = x + iy$. Les applications suivantes $f_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sont-elles des similitudes :

$$f_1(z) = z + 1 \quad f_2(z) = 2z + 3 \quad f_3(z) = z^2 \quad f_4(z) = i\bar{z} + 1$$

   Lorsque la réponse est oui, quel est le rapport de la similitude ? Est-ce une isométrie ?

Exercice 1

On se place dans le plan d'origine O. Soient

$$A = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \ , \quad B = (0, -1) \ , \quad C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Soit G le centre de gravité du triangle ABC. On note Γ le cercle circonscrit à ABC.

1. Quel est le centre et le rayon de Γ.
2. *Soit M un point sur Γ. On note*

$$I(M) = Bary((A, 1), (B, 1), (C, 1), (M, 3))$$

TSVP →

Ainsi $I : M \mapsto I(M)$ définit une application de Γ dans le plan.

Simplifier l'expression de $I(M)$ en terme de barycentre de seulement 2 points.

3. *On note $A' = I(A)$, $B' = I(B)$ et $C' = I(C)$.*
   Placer les points A', B' et C' sur l'annexe fournie avec le sujet.
4. *On note $H = Bary((G,1),(O,1))$.*
   Exprimer $2\overrightarrow{HI(M)}$ en fonction de M et O. En déduire que $I(M)$ est sur un cercle de centre H et de rayon à déterminer.
5. Montrer que $I(M)$ parcourt le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ quand M parcourt Γ.

Exercice 2

Soient A, B deux points du plan tels que $AB = 2$ et $\mathcal{D}$ une droite ne passant ni par A, ni par B. On considère l'application : $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = MA^2 + MB^2$.

1. Faire un dessin.
2. *On pose $I = Bary\{(A,1),(B,1)\}$.* Montrer que $f(M) = 2MI^2 + 2$.
3. Quel est le minimum de la fonction f ? En quel point M ce minimum est-il atteint ?
4. Est-ce que le point M qui atteint le minimum est unique ?
5. *On suppose à présent que $A = (0,0)$, $B = (2,0)$ et que $\mathcal{D}$ est donnée par l'équation $x + y - 3 = 0$.* Calculer explicitement le minimum de la fonction f.