Géométrie en petite dimension

TD n°5 : Isométries du plan

Exercice 1

Quelles sont les homothéties qui sont des isométries ?

Exercice 2

Soit ABC un triangle. On note s_A, s_B, s_C les symétries centrales par rapport à A, B, C respectivement. Décrire l'isométrie $s_A \circ s_B \circ s_C$.

Exercice 3

Soient r_a et r_b deux rotations non triviales d'angle θ_a et θ_b. Montrer que $r_a \circ r_b = r_b \circ r_a$ si et seulement si r_a et r_b ont même centre.

Exercice 4

Soient t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et σ la réflexion par rapport à la droite D. A quelle condition a-t-on $\sigma \circ t = t \circ \sigma$?

Exercice 5

Soit ABC un triangle de périmètre 1.

1. Montrer qu'il existe un point C' tel que ABC' est isocèle en C', l'aire de ABC' est égale à l'aire de ABC et le périmètre de ABC' est plus petit que celui de ABC.
2. En déduire l'existence d'un triangle isocèle de base $[AB]$ de même périmètre que ABC mais d'aire plus grande.
3. En déduire que parmi les triangles de périmètre 1, celui d'aire maximale est le triangle équilatéral.

Exercice 6

- Montrer que le produit de deux symétries centrales est une translation.
- Déterminer le vecteur de translation.
- Montrer que le produit de deux rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ est une symétrie centrale.
- Déterminer le centre de cette symétrie centrale.

Exercice 7

Soient d, d' deux droites du plan. On note σ_d, $\sigma_{d'}$ les réflexions par rapport aux droites d et d'.

- Montrer que si $d /\!/ d'$ alors $\sigma_{d'} \circ \sigma_d$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ à déterminer.
- On rappelle que si $d \cap d' = \{\Omega\}$ alors $\sigma_{d'} \circ \sigma_d$ est une rotation de centre Ω. Calculer l'angle de cette rotation à l'aide de l'angle orienté (d, d').

Exercice 8

Montrer que toute rotation et toute translation est le produit de plusieurs couples de réflexions.

Exercice 9

Soient r_1, r_2 deux rotations d'angles θ_1, θ_2 respectivement. Montrer que :

- Si $\theta_1 + \theta_2 = 0 \quad [2\pi]$ alors $r_2 \circ r_1$ est une translation.
- Si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \quad [2\pi]$ alors $r_2 \circ r_1$ est une rotation.

Exercice 10

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. On note I, J, K les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On note r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. On pose $f = r \circ t$ et $g = t \circ r$.

1. Montrer que $AKIJ$ est un carré.
2. Quelle est la nature de f et g ? Quelles sont leurs éléments caractéristiques ?
3. Quelle est la nature de $g \circ f^{-1}$? ses éléments caractéristiques ?

Exercice 11

Soient B, C deux points distincts. On note I le milieu de $[BC]$. On note r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$, R_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$, t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. On note s la composée $r_C \circ t \circ r_B$.

1. Quelle est la nature de s ?
2. Quelle est l'image de B par s ?
3. Quelles sont les caractéristiques de s ?

Exercice 12

1. Montrer que l'image d'un cercle par une isométrie est un cercle de même rayon.
2. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de même rayon. Déterminer toutes les isométries qui transforment $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$.

Exercice 13

Soient D et D' deux droites données. On note E la réunion de D et D'. Trouver l'ensemble des déplacements qui préservent E lorsque :

1. D et D' sont perpendiculaires.
2. D et D' sont sécantes et non perpendiculaires.
3. D et D' sont distinctes et parallèles.

Exercice 14

Soient A et B deux points distincts. On note r_A et r_B les rotations de centre A et B, et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Si M est un point du plan, on note $M_1 = r_A(M)$ et $M_2 = r_B(M)$. Soit f la transformation $r_B \circ r_A^{-1}$.

1. Construire $C = f(A)$.
2. Quelle est la nature de f ?
3. Quelles sont les éléments caractéristiques de f ?
4. Quelle est la nature du quadrilatère M_1M_2CA ?
5. On suppose que le point M décrit le cercle Γ de diamètre $[AB]$. Quel est le lieu géométrique du point M_2 lorsque M parcourt Γ ?
6. Déterminer le lieu géométrique de I le milieu de $[M_1M_2]$ lorsque M parcourt Γ.

Exercice 15

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. Soient M, N, P trois points sur chacun des côtés de ABC. On va trouver le triangle MNP inscrit à ABC de périmètre minimal (Problème de Fagnano).

1. On fixe un point P sur $[AB]$, trouver $M \in [BC]$ et $N \in [CA]$ tel que MNP est de périmètre minimal. On montrera en même temps que ces points sont uniques.
2. Exprimer le périmètre du triangle MNP trouvé à la question précédente en fonction de CP et des angles du triangle ABC.
3. On laisse à présent P varier. Trouver pour quel point $P \in [BC]$, le périmètre de MNP est minimal.