UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie en petite dimension

TD n° 4

Faites des figures !

Exercice 1

Soit $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ une similitude du plan.

(a) Montrer que l'image par f du segment $[A, B]$ est un segment. Le segment image peut-il être réduit à un point si $A \neq B$?

(b) Montrer quel l'image par f d'un triangle ABC est un triangle.

(c) Montrer que le triangle ABC est applati (A, B et C sont alignés) **ssi** il y a un cas d'égalité dans l'une des trois inégalités triangulaires liant A, B et C.

(d) En utilisant la question précédente, montrer que l'image par f d'un triangle non applati est non applati.

(e) Retrouver le résultat précédent en utilisant l'aire du triangle ABC et le rapport de la similitude f.

Exercice 2

Soit $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ une similitude du plan. Montrer que

(a) L'image du milieu d'un segment $[AB]$ est le milieu du segment $[f(A), f(B)]$.

(b) L'image de le centre de gravité d'un triangle (ABC) est le centre de gravité du triangle image $(f(A)f(B)f(C))$.

(c) L'image d'une médiane d'un triangle (ABC) est une médiane du triangle image $(f(A)f(B)f(C))$. Retrouver le résultat précédent.

(d) L'image d'une hauteur d'un triangle (ABC) est une hauteur du triangle image $(f(A)f(B)f(C))$.

(e) L'image d'un carré est un carré.

Exercice 3

Soit h une homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}^*$. Montrer que l'image d'un cercle de rayon r par h est un cercle de rayon $|k|r$.

Exercice 4

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centres O et O', et de rayon 1 et 2. Trouver les homothéties h qui envoient $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$ (c'est à dire telles que $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$).

Exercice 5

Soient h_1 et h_2 deux homothéties de centre A_1 et A_2, et de rapport k_1 et k_2. On suppose que $k_1k_2 \neq 1$. La transformation $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de centre I et de rapport k_1k_2. Si M est un point du plan, on note $M' = h_1(M)$ et $M'' = h_2(M')$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que $\overrightarrow{IA_1''} = k_1k_2\overrightarrow{IA_1}$.
3. Montrer que $\overrightarrow{A_2A_1''} = k_2\overrightarrow{A_2A_1}$.
4. En déduire que I vérifie $(1-k_2)\overrightarrow{IA_2} + (k_2 - k_1k_2)\overrightarrow{IA_1} = \vec{0}$
5. Traduire cette égalité en termes de barycentre.

Exercice 6

Soient h_1 et h_2 deux homothéties de centre A_1 et A_2, et de rapport k_1 et k_2. On suppose que $k_1k_2 = 1$. La transformation $h_2 \circ h_1$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Si M est un point du plan, on note $M' = h_1(M)$ et $M'' = h_2(M')$.

1. Faire une figure, en supposant par exemple que $k_1 = 2$.
2. Montrer que (MM'') est parallèle à (A_1A_2).
3. Montrer que $\overrightarrow{u} = (1-k_2)\overrightarrow{A_1A_2}$. On pourra calculer l'image de A_1 par $h_2 \circ h_1$ de deux façons différentes.

Exercice 7

Soient h une homothétie de centre A de rapport k et t une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. La transformation $h \circ t$ est une homothétie de centre I et de rapport k . Si M est un point du plan, on note $M' = t(M)$ et $M'' = h(M')$.

Montrer que I vérifie $(1-k)\overrightarrow{IA} + k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. On pourra calculer l'image de A par $h \circ t$ de deux façons différentes.

Exercice 8

Soient h une homothétie de centre A de rapport k et t une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. La transformation $t \circ h$ est une homothétie de centre J et de rapport k . Si M est un point du plan, on note $M' = h(M)$ et $M'' = t(M')$.

Montrer que J vérifie $(1-k)\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 9

Soit ABC un triangle.

1. Soit f l'application du plan dans le plan qui à un point M associe le point M', où M' est le barycentre du système $\{(A,2),(B,-3),(C,1),(M,2)\}$, f admet-elle un point fixe ?
2. Montrer que f est une translation dont on déterminera le vecteur.
3. Soit g l'application du plan dans le plan qui à un point M associe le point M'', où M'' est le barycentre du système $\{(A,1),(B,1),(C,-1),(M,1)\}$, g admet-elle un point fixe ?
4. Montrer que g est une homothétie dont on déterminera le rapport et le centre.

Exercice 10

Soit ABC un triangle. On note G le centre de gravité de ABC, O le centre du cercle circonscrit et H l'intersection des hauteurs. On note A', B', C' les milieux de $[BC], [CA], [AB]$. On note Γ le cercle passant par A, B, C et Γ' le cercle passant par A', B', C'. On note O' le centre de Γ'.

1. Montrer que l'homothétie h de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ envoie A sur A', B sur B' et C sur C'.
2. Montrer que l'image par h d'une hauteur de ABC est une médiatrice de ABC.
3. Montrer que $h(H) = O$.
4. Montrer que $h(\Gamma) = \Gamma'$.
5. En déduire que $h(O) = O'$.
6. Montrer que l'homothétie g de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$ envoie Γ sur Γ'.
7. En déduire que le cercle Γ' passe par le milieu de $[HA]$, $[HB]$ et $[HC]$.
8. En étudiant $h \circ g^{-1}$ montrer que $g(A)$, O' et A' sont alignés.
9. En déduire que le pied de la hauteur issue de A est sur Γ'. On montre de la même façon que Γ' passe par les pieds des hauteurs du triangle ABC.

Le cercle Γ' s'appelle le cercle des 9 points d'Euler.

Exercice 11

Soit $[AB]$ un segment. Soit M un point du plan tel que le triangle AMB est rectangle en M.

- Décriver le lieu géométrique du point M, autrement dit quel est l'ensemble des points possibles.
- Décriver le lieu géométrique du centre de gravité du triangle AMB.

Exercice 12

Soit $[BD]$ un segment. Soit A un point du plan qui décrit le cercle de centre D et de rayon un réel $r > 0$. Soit C l'unique point du plan tel que $ABCD$ est un parallélogramme. Soit C' le symétrique de C par rapport à D.

— Décrire le lieu géométrique du point C'.

— Décrire le lieu géométrique du point C.