UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie en petite dimension

TD n° 3 : Produit scalaire

Exercice 1

Soit $(ABCD)$ un parallélogramme.

- En utilisant une identité vérifiée par le produit scalaire, montrer que :

$$AC^2 - BD^2 = 4\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

- Montrer que : $(AB) \perp (AD) \iff AC = BD$.
- En utilisant une identité vérifiée par le produit scalaire, montrer que :

$$AB^2 - BC^2 = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

- Montrer que : $(AC) \perp (BD) \iff AB = BC$.

Exercice 2

Soit (ABC) un triangle. On note O le centre du cercle circonscrit, G l'isobarycentre de A, B, C et H le point tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

- Montrer que $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
- En déduire que H est l'orthocentre du triangle (ABC).
- Montrer que O, G et H sont alignés.

Exercice 3

Soient A, B deux points distincts, $\mathcal{D}$ une droite du plan et I le milieu de $[AB]$.

- Montrer que : $\forall M \in \mathcal{P}, \qquad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.
- Trouver le point $M \in \mathcal{D}$ tel que la quantité $MA^2 + MB^2$ est minimale.
- Trouver $K \in \mathcal{P}$ que

$$\forall M \in \mathcal{P} \setminus \{K\}, \quad MA^2 + MB^2 > KA^2 + KB^2.$$

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et soit $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On pose : $C = \{M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3}{4}\}$.

- Ecrire l'équation de C. En déduire que C est un cercle de centre et de rayon à calculer.
- Soit I le milieu de $[A, B]$. Montrer que

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

Vérifier que l'on retrouve le résultat de la question 1.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. On pose : $C = \{M \in \mathcal{P}, \quad MA = \frac{1}{3}MB\}$.

- Ecrire l'équation de C. En déduire que C est un cercle de centre et de rayon à calculer.
- Soit I et J définis par

$$\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{JA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JB}$$

Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad MA^2 - \frac{1}{9}MB^2 = \frac{8}{9}\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ}$$

Vérifier que l'on retrouve le résultat de la question 1.

Exercice 6

Soit A, B, C trois points du plan $\mathcal{P}$. On note G le barycentre de $\{(A, 2), (B, 1), (C, -1)\}$.

- Montrer que

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad 2MA^2 + MB^2 - MC^2 = 2GA^2 + GB^2 - GC^2 + 2MG^2.$$

- Trouver $K \in \mathcal{P}$ tel que

$$\forall M \in \mathcal{P} \setminus \{K\}, \quad 2MA^2 + MB^2 - MC^2 > 2KA^2 + KB^2 - KC^2.$$

Exercice 7

Soit $(ABCD)$ un parallélogramme du plan $\mathcal{P}$.

- Montrer que

$$AB^2 + BC^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} \quad \text{et} \quad CD^2 + DA^2 - BD^2 = 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$$

- Montrer que $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$.

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et soit $B = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Calculer la distance de A et B à la droite (D) d'équation : $3x - y - 6 = 0$
- Même question avec $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et la droite (D) d'équation : $x + 2y - 2 = 0$.

Exercice 9

Soit A, B, C trois points du plan. Déterminer et construire

1. l'ensemble X_1 des points M du plan tels que
$$\|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\| \leqslant 2.$$
2. l'ensemble X_2 des points M du plan tels que
$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|.$$
3. l'ensemble X_3 des points N du plan tels que
$$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|.$$

Exercice 10

Soit ABC un triangle. En quel(s) point(s) P du plan est-ce que
$$\|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\|$$
est minimal ?

Exercice 11

Soit (ABC) un triangle isocèle en A ($AB = AC$). A tout point $M \in (BC)$, on associe les projetés orthogonaux respectifs H et K de M sur les droites (AB) et (AC). Soit I le milieu de $[BC]$.

- Montrer que pour tout point $M \in (BC)$:
$$HM = BM\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) \quad \text{et} \quad KM = CM\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI})$$
- Montrer que pour tout point $M \in [BC]$, $MH + MK$ est une constante.
- Montrer que pour tout point $M \in (BC) \setminus [BC]$, $\|MH - MK\|$ est une constante égale à la constante de la question précédente.

Exercice 12

Soit (ABC) un triangle. On note $\hat{A}$ l'angle $B\hat{A}C$.

- Montrer que $\sin(\hat{A}) = \dfrac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|}$.
- Montrer que si (ABC) est équilatéral alors $\tan(\hat{A}) = \sqrt{3}$.

  On souhaite montrer que les coordonnées des sommets d'un triangle équilatéral ne peuvent être toutes rationnelles. On raisonne par l'absurde.

- Montrer qu'alors $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.
- Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Conclure.

Exercice 13

Calculer la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ lorsque :

- $M = (4, 2)$ et $\mathcal{D}$ admet pour équation cartésienne : $4x + 3y = 7$.
- $M = (1, -1)$ et $\mathcal{D}$ est la droite dirigée par le vecteur $(1, 1)$ et passant par le point $(4, 5)$.

Exercice 14

Calculer la distance du point M au plan Π lorsque :

- $M = (1, 2, 3)$ et Π admet pour équation cartésienne : $x + 2y + 2z = -1$.
- $M = (1, 0, 2)$ et Π est le plan dirigé par $(1, 0, 1)$ et $(2, 2, 3)$, et passant par le point $(4, 5)$.

Exercice 15

Calculer la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ de l'espace lorsque :

- $M = (3, 4, 0)$ et $\mathcal{D}$ admet pour équation cartésienne : $2x + 3y + z = 5$ et $3x + y = 7$.
- $M = (1, -1, 0)$ et $\mathcal{D}$ est la droite dirigée par le vecteur $(1, 1, 2)$ et passant par le point $(4, 0, 5)$.