UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie en petite dimension

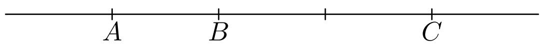
TD n°2 : Barycentres

Exercice 1

Soient A et B deux points du plan. Construire (sur un dessin ainsi qu'en exprimant le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$), s'il existe, le barycentre G des points pondérés suivants :

1. $(A, 1)$ et $(B, 3)$
2. $(A, 2)$ et $(B, 2)$
3. $(A, -1)$ et $(B, 2)$
4. $(A, -2)$ et $(B, -6)$
5. $(A, -2)$ et $(B, 2)$

Exercice 2



Vrai ou faux ?

- B est le barycentre de $\{(A, \frac{1}{2}), (C, \frac{1}{2})\}$.
- B est le barycentre de $\{(A, \frac{1}{3}), (C, \frac{2}{3})\}$.
- B est le barycentre de $\{(A, 2), (C, 1)\}$.
- B est le barycentre de $\{(A, \frac{2}{5}), (C, \frac{1}{5})\}$.
- A est le barycentre de $\{(B, 3), (C, -1)\}$.
- C est le barycentre de $\{(A, -2), (B, 2)\}$.

Où est le barycentre de $\{(A, -1), (B, 2)\}$?

Exercice 3

Dans un plan muni du repère $(O; i, j)$, on considère les points $A = (1, 1)$ et $B = (5, 3)$.

1. Faire une figure, que l'on complètera tout au long de l'exercice.
2. Calculer les coordonnées
   - du barycentre G_1 de $(A, 2)$ et $(B, 1)$.
   - du barycentre G_2 de $(A, -1)$, $(B, 2)$ et $(O, 3)$.
3. Déterminer, s'ils existent, des réels a et b tels que $H = (-1, 0)$ soit le barycentre de (A, a) et (B, b). Donner une interprétation du résultat obtenu.

4. Déterminer, s'ils existent, des réels a et b tels que O soit le barycentre de (A, a) et (B, b). Donner une interprétation du résultat obtenu.
5. Existe-t-il un point C tel que O soit le centre de gravité du triangle ABC ? Si oui, en déterminer les coordonnées.

Exercice 4

Soit A, B, C, D quatre points du plan, et I, J, K, L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD]$, $[AC]$ et $[BD]$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que les segments $[IJ]$ et $[KL]$ ont même milieu.

Exercice 5

Soit ABC un triangle, soit P le symétrique de A par rapport à C, soit Q le point défini par $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, et R le milieu de $[AB]$.

1. Faire une figure.
2. Prouver que les points P, Q et R sont alignés.

Exercice 6

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit K le milieu de $[AD]$ et L le milieu de $[BC]$. Soit J le point du plan défini par $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

1. Faire une figure.
2. Exprimer K comme barycentre de A et D. Exprimer J comme barycentre de A et B.
3. Justifier que les droites (DJ) et (BK) s'intersectent en un unique point G, que l'on exprimera comme barycentre des points A, B et D.
4. Montrer que les droites (DJ), (BK) et (AL) sont concourantes.

Exercice 7

Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan. Soit K le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, 1)$, soit J le milieu du segment $[CD]$, soit G le centre de gravité du triangle BCD, et soit I le milieu du segment $[AG]$. Les points I, J et K sont-ils alignés ?

Exercice 8

Soit ABC un triangle. Notons I le barycentre de $(A, 2), (B, 1)$ et J le barycentre de $(B, 1), (C, -2)$.

1. Faire une figure.

2. Soit G le barycentre de $(A,2),(B,1),(C,-2)$. Justifier que les points A, J et G sont alignés, et que les points C, I et G sont alignés. En déduire la position du point G, et le placer sur la figure.
3. Montrer que les droites (BG) et (AC) sont parallèles.

Exercice 9

On considère un triangle ABC et deux réels λ et μ tels que $\lambda+\mu \neq 0$. On note A' le barycentre de $\{(B,\lambda),(C,\mu)\}$, B' le barycentre de $\{(C,\lambda),(A,\mu)\}$, C' le barycentre de $\{(A,\lambda),(B,\mu)\}$. Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité.

Exercice 10

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que le vecteur $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 11

Soit ABC un triangle.

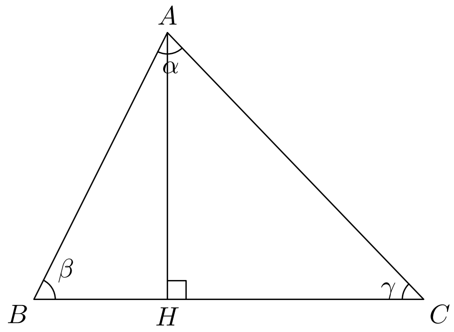
1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des réels m tels que le barycentre G_m du système pondéré $\{(A,1),(B,m),(C,-1)\}$ soit défini. Déterminer le lieu des points G_m lorsque m décrit $\mathcal{D}$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}'$ des réels m tels que le barycentre H_m du système pondéré $\{(A,1),(B,m),(C,1)\}$ soit défini. Déterminer le lieu des points H_m lorsque m décrit $\mathcal{D}'$.

Exercice 12

On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ inscrit dans une sphère S de rayon 1. On admet que le centre O de la sphère circonscrite S coïncide avec l'isobarycentre des 4 sommets et l'intersection des hauteurs. Quelle est la hauteur du tétraèdre ?

Exercice 13

On considère un triangle ABC, non rectangle, à angles aigus, d'angles aux sommets α, β, γ. On note H le pied de la hauteur issue de A.



1. Montrer que le point H est le barycentre de $\{(B, \tan\beta), (C, \tan\gamma)\}$ (indication : $\tan\beta = \frac{AH}{BH}$).
2. Montrer que le barycentre de $\{(A, \tan\alpha), (B, \tan\beta), (C, \tan\gamma)\}$ est un point de la droite (AH).
3. En déduire que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
4. Pourquoi a-t-on supposé que le triangle n'est pas rectangle ?