Géométrie en petite dimension

TD n° 1

Calcul vectoriel

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ et dire s'ils sont colinéaires.

1. $$A\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix};\quad C\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix},\quad D\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix};$$
2. $$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix};\quad C\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix},\quad D\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix};$$
3. $$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix};\quad C\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix},\quad D\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix};$$
4. $$A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\quad B=A+\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix};\quad C\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad D=C+\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix};$$
5. $$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\quad B=A+\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix};\quad C\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix},\quad D=C+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix};$$
6. $$A\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix},\quad B=A+\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix};\quad C\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix},\quad D=C+\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix};$$

Exercice 2

Les quatre points suivants permettent-ils de construire deux vecteurs égaux ? colinéaires ? Si oui, que peut-on dire du quadrilatère $ABCD$ ou $ABDC$? On pourra utiliser le résultat de l'exercice 3.

1. $$A\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\quad D\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$
2. $$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix},\quad D\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix},$$
3. $$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},\quad D\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix},$$
4. $$A\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\quad D\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

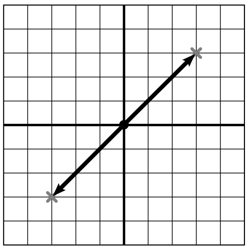
Exercice 3

Soient A, B, C, D, 4 points distincts du plan tels qu'aucun d'eux n'est sur une droite passant par deux autres.

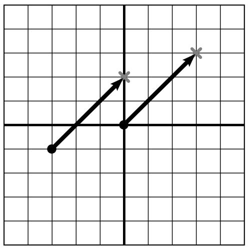
1. On suppose qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{CD} = t\overrightarrow{AB}$. Montrer que $(AC)//(BD)$ **ssi** $t = 1$.
2. En déduire que si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, et les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux et les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont égaux.

Exercice 4

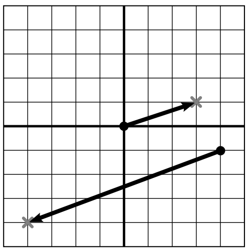
1. Dire pour chaque dessin si les vecteurs sont liés.
2. Donner, pour chaque dessin, les coordonnées [1] de chaque vecteur et leurs déterminants.



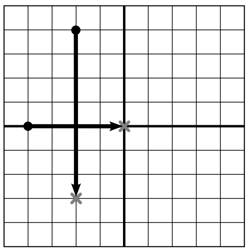
(a)



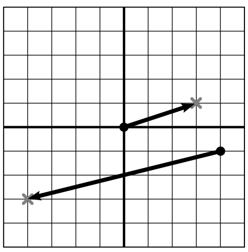
(b)



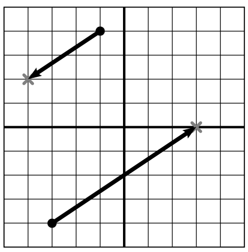
(c)



(d)



(e)



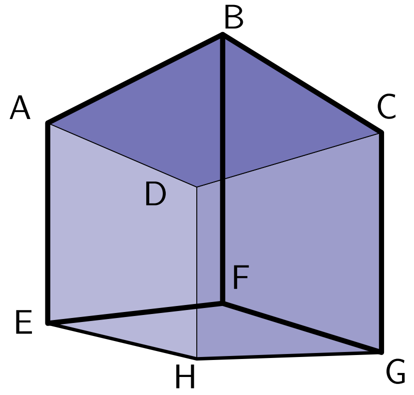
(f)

1. On considérera qu'un petit carré a pour coté 1.

Exercice 5

On considère le **cube** $ABCDEFGH$ dans l'espace. Dire dans chaque cas si les vecteurs sont colinéaires, en justifiant soigneusement votre réponse.

1. $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{HC}$
2. $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EH}$
3. $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EG}$
4. $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$
5. $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC}$
6. $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{HE}$
7. $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DH} + 2\overrightarrow{AB}$



Droites du plan et de l'espace

Exercice 6 : appartenance

1. Le point M appartient-il à la droite (AB) ?

$$M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}.$$

2. Calculer m pour que le point C appartienne à la droite (AB) :

$$C\begin{pmatrix}2\\m\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}.$$

Exercice 7 : Équations et paramétrages

Ecrire l'équation des droites définies paramétriquement par

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\right\}, \quad \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\right\},$$

Donner un paramétrage de la droite d'équation :

$$x + 2y = 4$$

(indication : On commencera par déterminer 2 points distincts de la droite)

Exercice 8 : Intersections

1. Ecrire une équation des droites (AB) et (CD) et déterminer leur intersection pour les points suivants :

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}; \quad C\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}, \quad D\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix};$$

2. Pour quelles valeurs de m les droites (AB) et (CD) ont-elles une intersection non-vide ? Une intersection coïncidant avec un point d'abscisse nulle ?

$$A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix};\quad C\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\quad D\begin{pmatrix}3\\m\end{pmatrix};$$

Exercice 9 : alignement

Les trois points du plan A, B et C sont-ils alignés ? Si oui donner une équation de la droite qui les contient.

(a) $A\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

(b) $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

(c) $A\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$

(d) $A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.

Exercice 10 : Droites de l'espace

1. Trouver un vecteur directeur de la droite de l'espace définie par les équations

$$2x+3y+5z=0 \qquad \text{et} \qquad x+y+z=0$$

2. Déterminer une paire d'équations de la droite de l'espace passant par

$$O\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{et dirigée par} \quad \vec{u}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

3. Déterminer une paire d'équations de la droite de l'espace passant par

$$M\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \text{et dirigée par} \quad \vec{v}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$

Exercice 11 : Plans de l'espace

1. Trouver une forme paramétrique du plan défini par

$$x+3y-z=1$$

2. Donner une équation du plan

$$\text{passant par} \quad A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{et engendré par} \quad \vec{u}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$