Ex 7 Feuille 1 (GPD 2015)

$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$ droite du plan passant par $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan.

$M \in \mathcal{D}$ ssi $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

ssi $\det(\vec{AM}, \vec{u}) = 0$ or $\vec{AM} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}$

ssi $\det\left(\begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$

ssi $(x+1) \times 1 - y \times 1 = 0$

ssi $x - y + 1 = 0$

Donc $x - y + 1 = 0$ est une équation de $\mathcal{D}$

$\mathcal{D}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$ droite du plan passant par $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et dirigée par $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Soit $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan.

$M \in \mathcal{D}$ ssi $\vec{BM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

ssi $\det(\vec{BM}, \vec{v}) = 0$ or $\vec{BM} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$

ssi $\det\left(\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$

ssi $(x-1) \times 3 - (y-1) \times 0 = 0$

ssi $x = 1$

Donc $x = 1$ est une équation de $\mathcal{D}$

Ex 8

1. Équation (AB) : $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (AB)$ ssi $\det(\vec{AM}, \vec{AB}) = 0$ $\quad \vec{AM} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$

ssi $(x-1) - (y-1) = 0$

ssi $x - y = 0$

Équation (CD) : $\vec{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et pour $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{CM} = \begin{pmatrix} x-5 \\ y+1 \end{pmatrix}$

$M \in (CD)$ ssi $(x-5) \times 1 - (y+1) \times (-3) = 0$

ssi $x + 3y = 2$

Intersection : Un point $M=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan appartient à $(AB)\cap(CD)$ si et seulement si $\begin{cases} x-y=0 \\ x+3y=2 \end{cases}$

$$\underline{\text{ssi}} \quad \begin{cases} x=y \\ 4y=2 \end{cases} \quad \underline{\text{ssi}} \quad \begin{cases} x=y \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \underline{\text{ssi}} \quad M=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Donc $(AB)\cap(CD)=\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\}$ $\underline{\text{ie}}$ les deux droites se coupent en un unique point de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2. On fait de même et on trouve

Éq (AB) : $4x-y=8$

Éq (CD) : $M\in(CD)$ $\underline{\text{ssi}}$ $\det(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CD})=0$

$\underline{\text{ssi}}$ $(x-2)\times(m-2)-(y-2)\times 1=0$

$\underline{\text{ssi}}$ $(m-2)x-y-2m+6=0$

→ Équation qui dépend de m.

Intersection : $M\in(AB)\cap(CD)$ $\underline{\text{ssi}}$ $\begin{cases} 4x-y=8 \\ (m-2)x-y=2m-6 \end{cases}$

$\underline{\text{ssi}}$ $\begin{cases} y=4x-8 \\ (m-2)x-4x+8=2m-6 \end{cases}$

$\underline{\text{ssi}}$ $\begin{cases} y=4x-8 \\ (m-6)x=2m-14 \end{cases}$

2 CAS

* $m-6=0$ ($\underline{\text{ie}}$ $m=6$)

$\underline{\text{Alors}}$ le système devient

$\begin{cases} y=4x-8 \\ 0=2m-14 \end{cases}$ $\underline{\text{ie}}$ $\begin{cases} y=4x-8 \\ 0=8-14=-6 \end{cases}$ absurde → pas de solution

$\underline{\text{donc}}$ pas de pt d'intersectº des 2 droites

* $m-6\neq 0$ $\underline{\text{Alors}}$ $\begin{cases} y=4(x-2) \\ x=2\dfrac{m-7}{m-6} \end{cases}$ $\underline{\text{ie}}$ $\begin{cases} y=8\left(\dfrac{m-7}{m-6}-1\right)=\dfrac{-8}{m-6} \\ x=2\dfrac{m-7}{m-6} \end{cases}$

Une seule solutº donc un unique point d'intersectº de (AB) et (CD) de coordonnées $\dfrac{2}{m-6}\begin{pmatrix} m-7 \\ -4 \end{pmatrix}$

De plus ce point est d'abscisse nulle $\underline{\text{ssi}}$ $2\dfrac{m-7}{m-6}=0$ $\underline{\text{ssi}}$ $m=7$