Géométrie en petite dimension

Contrôle continu n°1 : lundi 20 octobre 2014

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.
Justifiez toutes vos réponses.

Durée : Une heure

Questions de cours

On rappelle qu'une définition (ou un théorème) est un énoncé clair, précis et non ambigu. Une attention toute particulière sera portée sur ces points.

1. Rappeler la définition du barycentre.
2. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que ce cas d'égalité.
3. Rappeler le théorème Al-Kashi. Donner une démonstration.

Exercice 1

On considère le nombre complexe $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Calculer le module et l'argument de j. Donner le forme géométrique de j.
- Montrer que $j^3 = 1$.
- Montrer que $j^2 + j + 1 = 0$.
- Montrer que $\overline{j} = j^2$.
- Soient A, B, C trois distincts points du plan d'affixe a, b, c. Montrer l'équivalence suivante :

$$\text{Le triangle } ABC \text{ est équilatéral} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c-a}{c-b} = -j^2 \text{ ou } -j.$$

- Calculer les parties réelles et imaginaires des fractions suivantes :

$$\frac{3+j}{1-j} \qquad \frac{1+j}{1-i}$$

Exercice 2

On considère le triangle ABC avec

$$A(-1,4) \quad B(-2,2) \quad C(3,1)$$

1. Faire un dessin (en rapport avec l'exercice).
2. Déterminer les coordonnées de I le barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(B,1)$. Justifier en une ligne que la droite (CI) est la médiane de ABC de sommet C.
3. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, on note M_t le barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(B,1)$ et (C,t). Montrer que M_t est sur la médiane de ABC de sommet C.
4. Réciproquement, soit D un point de la médiane de ABC de sommet C.
   – On suppose que $D \neq C$. Trouver un $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ tel que $D = M_t$.
   – Existe-t-il un $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ tel que $M_t = C$?
5. Déterminer la nature de

$$\left\{ \mathrm{Bary}((A,t/2),(B,t/2),(C,1-t)) \mid \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

   Indice : On pourra, à nouveau, faire apparaître le point I.