Programme de colle Fonctions de plusieurs variables

Classe de PT

Lycée La Martinière

Exercice 1
Prolonger en $(0,0)$ lorsque c'est possible, et dans ce cas étudier le caractère $\mathscr{C}^1$.

1) $f(x,y) = \dfrac{xy}{2x^2+y^2}$ **2)** $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{2x^2+y^2}$ **3)** $f(x,y) = y^2/x$ si $x \neq 0$, $f(0,y) = 0$.

Exercice 2
On définit la fonction $f : \begin{array}{ccc} [0,1]\times[0,1] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leqslant y \\ y(1-x) & \text{si } y < x \end{cases} \end{array}$

1) Montrer que f est continue sur $[0,1]\times[0,1]$ (<u>Indication</u> : *Chercher une expression de f sans « si »*).

2) Montrer que f admet un maximum et un minimum sur $[0,1]\times[0,1]$, les déterminer.

Exercice 3 (OT 2011 — ENSAM PT)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ par $f : (x,y) \mapsto xy\ln(x^2+y^2)$.
Montrer que f est prolongeable par continuité en $(0,0)$. Déterminer ses extrema.

Exercice 4 (supplémentaire)
Extrema locaux des fonctions définies sur Ω par

1) $f : (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ sur $\mathbb{R}^2$

2) $g : (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

3) $f(x,y) = x^2 + x^2y + y^3$ sur $\Omega = \mathbb{R}^2$

4) $f(x,y) = xe^y + ye^x$ sur $\Omega = \mathbb{R}^2$. On pourra étudier les variations de $h(x) = e^x + xe^{\frac{1}{x}}$.

5) $f(x,y) = x^2e^y$ sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2+y^2-2y < 1\}$, puis on cherchera les extrema globaux sur $\overline{\Omega} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2+y^2-2y \leqslant 1\}$. On expliquera pourquoi le maximum est sur le bord de $\overline{\Omega}$.

6) $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$. extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$ et globaux sur $B(0,1)$. On étudiera $f(\cos t, \sin t) = 2\cos t(2\cos^2 t - 3)$. (D'après E3A MP 2007)

Exercice 5 (capes, MP MP)
Calculer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans le cercle unité.
On pourra introduire les trois angles α, β et γ, et montrer que l'aire du triangle associé est :

$$f(\alpha,\beta) = \sin(\alpha) + \sin(\beta) - \sin(\alpha+\beta)$$

Exercice 6 (ddl – MP MP)
Si $p \in \mathbb{N}$, soit $f_p : (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \mapsto (x+y)^p \sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
a) Condition nécessaire et suffisante pour que f_p se prolonge par continuité en $(0,0)$?
b) La condition de a) étant remplie, condition nécessaire et suffisante pour que le prolongement obtenu soit différentiable en $(0,0)$?

Exercice 7
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}1^1$. Montrer que

$$\forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(tx) = t^\alpha f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad < \overrightarrow{\nabla} f(x), x >= \alpha f(x)$$

Exercice 8 (supplémentaire)
Résoudre les EDP suivantes dans $\mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$ avec $k = 1$ ou 2.

1) $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ avec $\Omega = \mathbb{R}^2$ et un changement de variable linéaire ($u = x + y$ et $v = x + 2y$).

2) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$ avec $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et un passage en polaire.

3) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ avec $\Omega = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et le changement de variable $x = ue^v$ et $y = e^{-v}$.

4) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - y^2$ avec $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$ et le changement de variable $u = x + y$ et $v = xy$.

5) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ avec $\Omega = \mathbb{R}^2$ et le changement de variable $x = u - v$ et $y = v$. On commencera par donner la structure de l'espace des solutions.

Exercice 9
Soit $f(x, y) = x(x^2 + y^2) - x^2 + y^2$ et $\mathscr{C}$ d'équation $f(x, y) = 0$. Déterminer les points réguliers. Tangentes horizontales.