Programme de colle Integration

Classe de PT

Lycée La Martinière

0.1 Révisions

Exercice 1
Montrer que pour $0 < a < b$, on a $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$. Indication : *Cauchy-Schwarz.*
(bonus : peut-on avoir égalité ?)

Exercice 2
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \,\mathrm{d}t$.
Montrer que (u_n) est décroissante puis convergente.
(bonus) Calculer $u_{n+2} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire un équivalent de u_n.

Exercice 3
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $T > 0$. On suppose qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = K$.
Montrer que f est T-périodique.

0.2 Impropres

Exercice 4
Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3 - 5t^2 + 1}{2t^4 + 2t^3 + t^2 + 1}\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1 + \cos(t) + e^t}\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}\,\mathrm{d}t$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ **5)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - t^2}{1 - \sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ **6)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{\sqrt{|t^2 - 1|}(\sqrt{t} + 2)}\,\mathrm{d}t$ **8)** $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$ **9)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-zt}\,\mathrm{d}t$, où $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

10) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,\mathrm{d}t$ **11)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$ **12)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + t + 1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$

13) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\cos 2x}}\,\mathrm{d}x$

14) Étudier la convergence de l'intégrale de la fonction du **4)** au voisinage de 0, sans calculs.

Exercice 5
Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ? Si oui, calculer leur valeur.

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t) + t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}\,\mathrm{d}t$ **4)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1 + e^t)(1 - e^{-t})}$

5) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|t|}}\,\mathrm{d}t$

Exercice 6 (2011, Mines — élève 6)
Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{t^2}\right) \mathrm{d}t$. Existence puis calcul de I.

Exercice 7
Convergence puis calcul de $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x$.

Solution. Prolongeable par continuité en 0, donc intégrable, et $o(1/x^2)$ en $+\infty$ donc intégrable aussi. Pour le calcul, on remarque qu'avec le changement de variable $u = 1/x$, on trouve :

$$\int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x = \int_{+\infty}^1 \frac{u \ln u}{(u^2+1)^2} \mathrm{d}u$$

Par conséquent $I = 0$. □

Exercice 8
Convergence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) \mathrm{d}x$ et de $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) \mathrm{d}x$

Solution. Pour étudier la convergence en $\pi/2$ de J, le plus simple est de faire un changement de variable $u = x - \pi/2$, ce qui au passage nous montre que $I = J$.
Calculons maintenant $I + J$: □

Exercice 9
Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On suppose que f est dérivable en 0, et que $f(0) = 0$.

1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}t$ est convergente.

2) On suppose de plus que $f'(0) \neq 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2} \mathrm{d}t$ est divergente.

Exercice 10 (ddl)
Existence de

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(\mathrm{th} t) \mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} \mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} \mathrm{d}t$ **4)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t - 1}$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\ln t)^2} \mathrm{d}t$ **6)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t \operatorname{Arctan} t} \mathrm{d}t$ **7)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$ **8)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} t + 2 - \sqrt{t^2+4t+1} \mathrm{d}t$

9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$ **10)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} \mathrm{d}t$ **11)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} \mathrm{d}t$ **12)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} \mathrm{d}t$

13) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$

Exercice 11 (ddl)
Existence et calcul de

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}$ **2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)}$ **3)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ **4)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ **6)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ **7)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \ln(\sin x)\mathrm{d}x$ **8)** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$

9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt[3]{x}}$ **10)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x$ **11)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{x(1+x)^{2/3}}\,\mathrm{d}x$ **12)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$

13) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(x)}{3\cos^2(x)+1}\,\mathrm{d}x$ **14)** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$

0.3 À paramètre

Exercice 12 (ddl, Lebesgue impropre)
Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable.
a) Soit $A > 0$. Montrer

$$\int_0^A \varphi(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

b) Montrer

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Exercice 13 (ENSAIT-Roubaix 2012)
Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ on pose $g(x,t) = e^{-t^2}\cos(xt)$

1) Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et qu'elle est paire.

2) Montrer que f est continue.

3) Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ et exprimer $f'(x)$ à l'aide d'un intégrale impropre.

4) Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

5) En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, trouver une expression de f sans intégrale.

Exercice 14
Pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$ on pose $g(x,t) = \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t$. De plus, soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) **a)** Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée.

2) Mêmes questions pour h.

3) Vérifier que $f + h^2$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$, que l'on déterminera.

4) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (à l'aide d'une majoration) et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 15 (Produit de convolution)

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Montrer que la formule

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

définit une fonction $f * g$ continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $f * g = g * f$ (on justifiera soigneusement).

3) On suppose de plus que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et que la fonction g' est bornée. Montrer que $f * g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $(f * g)' = f * g'$.

Exercice 16 (Transformée de Fourier d'une fonction intégrable)

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on pose

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que la fonction $\widehat{f}$ ainsi définie est continue et bornée sur $\mathbb{R}$. $\pm\infty$).

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^n$, à support compact (c'est-à-dire nulle hors d'un segment $[a, b]$). Déterminer $\widehat{f^{(n)}}(\xi)$ en fonction de ξ et de $\widehat{f}(\xi)$ (remarque : on dérive f *puis* on prend la transformée de Fourier).

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ et supposons que la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$ soit aussi intégrable. Montrer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et montrer que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\widehat{f}(\xi) = -i\widehat{g}(\xi)$.

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto x^n f(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et déterminer $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n}\widehat{f}$ en fonction de $\widehat{g}_n$.

Exercice 17 (ddl)

On pose, pour $x \geqslant 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \frac{1 - \cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.
b) Montrer que F est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F''(x)$.
c) En déduire la valeur de $F(0)$ puis la valeur de l'intégrale convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 18 (ddl)

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + x^3 + t^3}$$

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$.
b) A l'aide du changement de variable $u = 1/t$, calculer $f(0)$.
c) Montrer que f est continue et décroissante.
d) Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$.

Exercice 19 (ddl)

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f est définie et positive sur $]-1, +\infty[$.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser sa monotonie.
c) Former une relation entre $f(x + 2)$ et $f(x)$ pour tout $x > -1$.
d) On pose pour $x > 0$,

$$\varphi(x) = xf(x)f(x - 1)$$

Montrer que

$$\forall x > 0, \varphi(x + 1) = \varphi(x)$$

Calculer $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
e) Déterminer un équivalent à f en -1^+.

Exercice 20 (ddl)
On considère la fonction suivante I définie par :
$\forall x \in \mathcal{D}, I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x \, \mathrm{d}t$.
a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$.
b) Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.
c) Calculer $I(0), I(1), I(2), I(3), I(4)$.
d) Trouver une relation simple entre $I(x+2)$ et $I(x)$.
e) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Que vaut $I(n)I(n-1)$?
f) Déterminer des équivalents simples de I aux extrémités de $\mathcal{D}$.

Exercice 21 (ddl)
Pour $x > 0$, on pose

$$f(x) = \int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2-t^2}}$$

a) Montrer que f est définie et continue.
b) Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.

Exercice 22 (ddl)
Soient a, b deux réels strictement positifs.
a) Justifier l'existence pour tout $x \in \mathbb{R}$ de

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \cos(xt) \, \mathrm{d}t$$

b) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.
c) Exprimer $F(x)$

Exercice 23 (ddl)
Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} \, \mathrm{d}t$$

a) Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
b) Déterminer l'expression de $F(x)$.
c) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}^2 t}{t^2} \, \mathrm{d}t$$